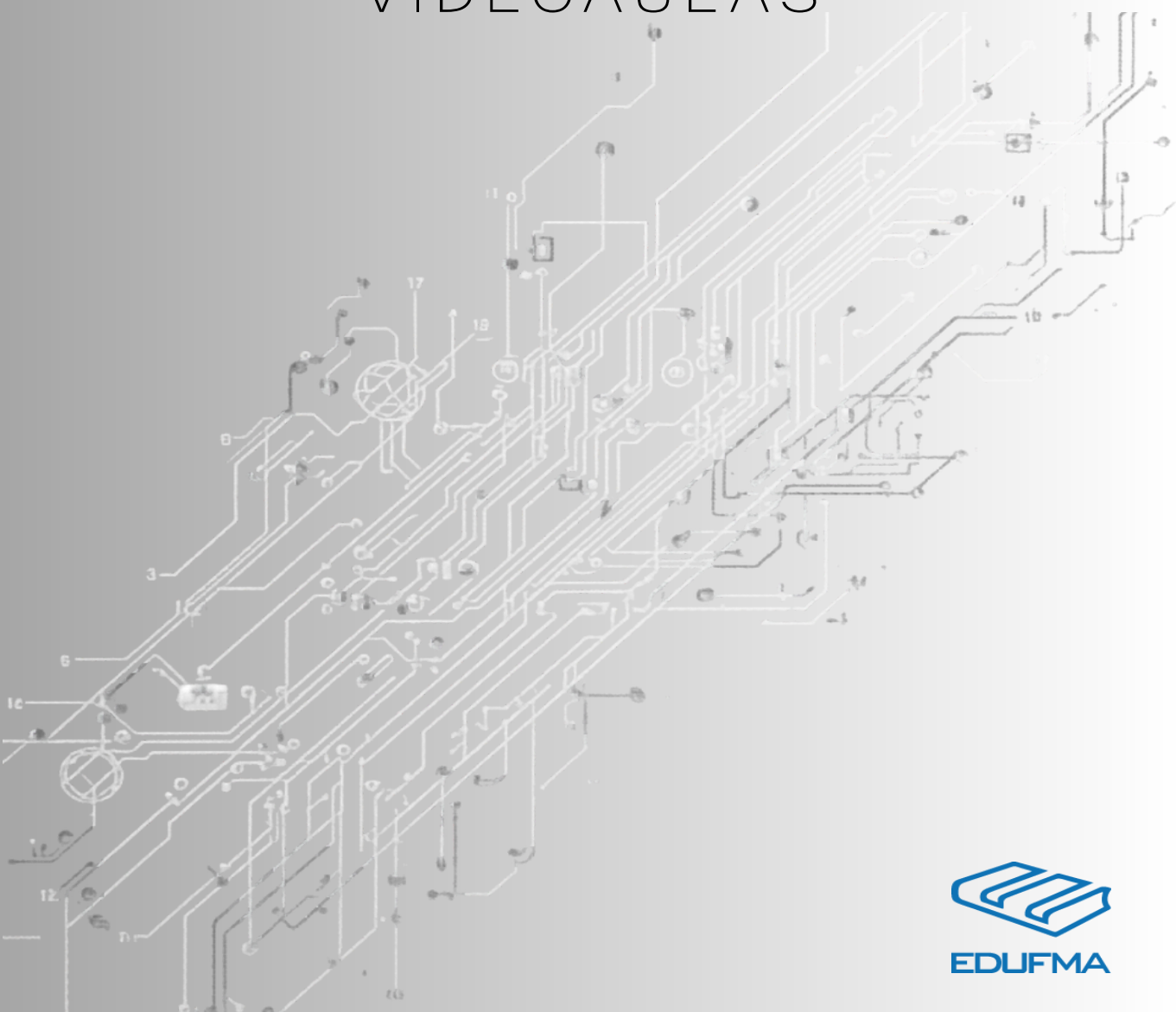


LUCIANO BUONOCORE
LUIZ EUGÊNIO SANTOS ARAÚJO FILHO
ANTONIO JOSÉ PORTELA DE JESUS SANTOS

CIRCUITOS ELÉTRICOS

TEORIA E PRÁTICA EM
VIDEOAULAS



CIRCUITOS ELÉTRICOS

TEORIA E PRÁTICA EM
VIDEOAULAS



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Reitor Prof. Dr. Fernando Carvalho Silva
Vice-Reitor Prof. Dr. Leonardo Silva Soares



SIBi
SISTEMA INTEGRADO
DE BIBLIOTECAS

SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS

Diretor Prof. Dr. César Augusto Castro



EDUFMA

EDITORIA DA UFMA

Coordenadora Irenilma Cadête Lima
Conselho Editorial Profa. Dra. Andréa Katiane Ferreira Costa
Profa. Dra. Débora Batista Pinheiro Sousa
Prof. Dr. Edson Ferreira da Costa
Prof. Dr. José Carlos Aragão Silva
Profa. Dra. Jussara Danielle Martins Aires
Profa. Dra. Karina Almeida de Sousa
Prof. Dr. Luís Henrique Serra
Prof. Dr. Luiz Eduardo Neves dos Santos
Profa. Dra. Luma Castro de Souza
Prof. Dr. Márcio José Celeri
Profa. Dra. Maria Áurea Lira Feitosa
Profa. Dra. Raimunda Ramos Marinho
Profa. Dra. Rosângela Fernandes Lucena Batista
Bibliotecária Márcia Cristina da Cruz Pereira



**EDITORIA
ASSOCIADA
À ABEU**
abeu.org.br

Associação Brasileira das Editoras Universitárias



Esta obra está licenciada sob uma Licença
Creative Commons Atribuição-Não Comercial-Compartilha
Igual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0).

LUCIANO BUONOCORE
LUIZ EUGÊNIO SANTOS ARAÚJO FILHO
ANTONIO JOSÉ PORTELA DE JESUS SANTOS

CIRCUITOS ELÉTRICOS

TEORIA E PRÁTICA EM
VIDEOAULAS

São Luís



EDUFMA

2026

© 2026 EDUFMA – Todos os direitos reservados

Projeto Gráfico, diagramação e capa

Antonio José Portela de Jesus Santos

Revisão

Luciano Buonocore
Luiz Eugênio Santos Araújo Filho

Ilustrações:

Elaboradas pelos autores

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Buonocore, Luciano.

Circuitos elétricos [recurso eletrônico]: teoria e prática em videoaulas / Luciano Buonocore, Luiz Eugênio Santos Araújo Filho, Antonio José Portela de Jesus Santos. — São Luís: EDUFMA, 2026.

160 p.: il.

ISBN 978-65-5363-596-8

1. Circuitos elétricos – Teoria e prática. 2. Tensão. 3. Corrente. I. Araújo Filho, Luiz Eugênio Santos. II. Santos, Antonio José Portela de Jesus. III. Título.

CDD 621.319 2

CDU 621.3.049(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central

Bibliotecária: Marcia Cristina da Cruz Pereira

CRB 13 / 418

CRIADO NO BRASIL [2026]

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte deste livro pode ser reproduzida, armazenada em um sistema de recuperação ou transmitida de qualquer forma ou por qualquer meio, eletrônico, mecânico, fotocópia, microfilmagem, gravação ou outro, sem permissão do autor.

EDUFMA | Editora da Universidade Federal do Maranhão

Av. dos Portugueses, 1966 | Vila Bacanga

CEP: 65080-805 | São Luís | MA | Brasil

Telefone: (98) 3272-8157

www.edufma.ufma.br | edufma@ufma.br

Lista de Figuras

2.1	Medidor de Energia utilizado no Exemplo 1	20
2.2	Conversores de energia: (a) Pilha e (b) Célula fotovoltaica	21
2.3	Simbologia de fontes independentes: (a) tensão e (b) corrente	22
2.4	Simbologia de Fontes dependentes: (a) tensão controlada por tensão, (b) tensão controlada por corrente, (c) corrente controlada por tensão e (d) corrente controlada por corrente	22
2.5	Convenção de sinal de um elemento ativo	23
2.6	Convenção de sinal de um elemento passivo	24
2.7	Elementos do exemplo 2: (a) dispositivo físico e (b) circuito elétrico	25
2.8	Simbolo de um resistor	27
2.9	Convenção de sinal para o resistor: (a) Corrente em queda de tensão (b) Corrente em elevação de tensão	28
2.10	Circuito utilizado no Exemplo 3	28
2.11	Circuito utilizado no Exemplo 4 – emprego da LCK e LTK	31
2.12	Circuito com atribuições de corrente e tensão realizadas	31
2.13	Circuito com a representação das malhas	32
2.14	Diagrama da relação entre as três leis de circuitos elétricos e os métodos de minimização e análise.	33
2.15	Circuito com n resistores em série	34
2.16	Representação da resistência equivalente (R_{eq}) entre os terminais <a, b>	35
2.17	Exemplo de circuito envolvendo cinco resistores em série e seu equivalente.	35
2.18	Circuito com n resistores em paralelo	36
2.19	Exemplo envolvendo dois resistores em paralelo.	37
2.20	Ligações em configurações Δ e Y	38
2.21	Circuito utilizado no exemplo 5, na transformação Δ - Y	39
2.22	Circuito redesenhado	40
2.23	Comparação entre o circuito original e transformado	40
2.24	Transformação de fontes	41
2.25	Casos especiais de transformação de fontes	42
2.26	Representação de um circuito com topologia complexa	42
2.27	Circuito com topologia complexa e seu equivalente de Thévenin simplificado	43
2.28	Topologia complexa e equivalente de Norton	44
2.29	Transformação de fontes e os equivalentes de Thévenin e Norton	45

2.30	Circuito utilizado na obtenção do equivalente de Norton	46
2.31	Circuito após a realização do Passo 1	46
2.32	Circuito utilizado para o cálculo de R_N	47
2.33	Circuito redesenhado para o cálculo de R_N	47
2.34	Circuito para o cálculo de I_N	48
2.35	Circuito para o cálculo de I_N após transformação Y - Δ	48
2.36	Circuito para o cálculo de I_N após transformação Y - Δ e simplificação	49
2.37	Circuito equivalente de Norton obtido	50
2.38	Resultado da simulação para o exemplo 6	50
2.39	Circuito divisor de tensão	51
2.40	Circuito divisor de corrente	52
2.41	Circuito utilizado no exemplo 7	52
2.42	Resultado da simulação para o exemplo 7	54
2.43	Circuito suporte para definição dos termos que compõem a terminologia	54
2.44	Circuito utilizado no exemplo 8	55
2.45	Resultado da simulação para o exemplo 8	58
2.46	Circuito utilizado no exemplo 9	58
2.47	Resultado da simulação para o exemplo 9	61
2.48	Circuito utilizado no exemplo 10	62
2.49	Circuito utilizado no cálculo de i'_o	62
2.50	Circuito utilizado no cálculo de i''_o	63
2.51	Circuito utilizado no cálculo de i'''_o	63
2.52	Resultado da simulação para o exemplo 10	64
2.53	(a) Indutor (energia magnética) e (b) Capacitor (energia elétrica)	65
2.54	Transientes de sinais em circuitos de primeira ordem na resposta natural: (a) RL e (b) RC	70
2.55	Obtenção gráfica da constante de tempo τ no circuito RL: (a) corrente e (b) tensão	73
2.56	Exemplo de transientes de corrente em circuito RL, contendo dois indutores.	75
2.57	Transientes de sinais em circuitos de primeira ordem na resposta natural: (a) RL e (b) RC	78
2.58	Transientes de sinais em circuitos de primeira ordem na resposta ao degrau: (a) circuitos RC antes e após o chaveamento e (b) gráficos tensão e corrente no capacitor	82
2.59	Inferência de informações sobre circuitos de primeira ordem usando apenas gráficos (caso 1)	84
2.60	Inferência de informações sobre circuitos de primeira ordem usando apenas gráficos (caso 2)	86
2.61	Circuito RLC paralelo com transiente em resposta natural	88
2.62	Exemplo de circuito RLC na topologia paralela com resposta natural.	92
2.63	Circuito RLC paralelo com transiente em resposta ao degrau	99
2.64	Exemplo de circuito RLC na topologia paralela com resposta ao degrau.	102
2.65	Circuito RLC paralelo com transiente em resposta natural	107

2.66	Exemplo de circuito RLC na topologia série com resposta natural. . . .	110
2.67	Circuito RLC série com transiente em resposta ao degrau	116
2.68	Exemplo de circuito RLC na topologia série com resposta ao degrau. . .	119
2.69	Formas de sinais alternados: (a) Quadrada, (b) Triangular e (c) Senoidal	124
2.70	Sinais no tempo gerados pelas funções seno (cor azul) e cosseno (vermelho)	125
2.71	Representação gráfica do valor RMS: (a) formas de onda dos sinais tensão (verde) e corrente (azul) no resistor e (b) sinal da potência consumida .	127
2.72	Circuito RL operando no regime AC	128
2.73	Componentes da resposta da corrente no circuito RL	129
2.74	Representação de um ângulo no plano complexo usando a identidade de Euler	131
2.75	Exemplo de migração de circuitos entre domínios tempo e fasorial . . .	133
2.76	Migrando os três fasores do domínio da frequência para o tempo através de seu giro na frequência angular nas funções: a) cosseno e b) seno. . . .	135
2.77	Diagramas fasoriais: a) representações polar e retangular e b) soma de fasores	136
2.78	Possibilidades de localização das impedâncias no plano complexo	138
2.79	Relação tensão e corrente domínio do tempo e fasorial para impedância resistiva	139
2.80	Relação tensão e corrente domínio do tempo e fasorial para impedância indutiva	140
2.81	Relação tensão e corrente domínio do tempo e fasorial para impedância capacitiva	141
2.82	LTK no domínio fasorial: (a) circuito RLC série no regime AC, (b) diagrama fasorial e (c) LTK fasorial	142
2.83	Associação de impedâncias: (a) série e (b) paralelo	143
2.84	Conversão entre topologias de impedâncias	144
2.85	Transformações entre circuitos com fontes fasoriais de tensão e corrente	145
2.86	Exemplo de circuito para obtenção da máxima transferência de potência através do circuito equivalente de Thévenin	146
2.87	Circuitos parciais e dados simulados do exemplo do circuito original . .	148
2.88	Exemplo de circuito para solução em análise nodal	149
2.89	Circuito da Figura 2.88 no domínio fasorial para emprego da análise nodal	150
2.90	Arbitragem dos sentidos das três correntes fasoriais de malha (horários)	151
2.91	Resultados simulados no Multisim com os fasores correntes na forma polar	152
2.92	Circuito no regime AC para solução pelo método de superposição no domínio: a) tempo e b) fasorial	153
2.93	Circuitos com a contribuição de cada fonte fasorial: a) corrente $\vec{I}$ e b) tensão $\vec{V}$	154

Lista de Tabelas

2.1	Principais características relativas aos temas de cada unidade teórica da disciplina Circuitos Elétricos	16
2.2	Link para as videoaulas de revisão	155
3.1	Link para as videoaulas - Materiais iniciais	157
3.2	Link para as videoaulas - Instrumentos de laboratório	158

Sumário

Prefácio	10
1 INTRODUÇÃO	12
2 REVISÃO DOS CONTEÚDOS TEÓRICOS	15
2.1 REVISÃO TEXTUAL DA UNIDADE 1	17
2.1.1 Tensão, Corrente, Potência e Energia	18
2.1.2 Fontes de Tensão e Corrente	20
2.1.3 Três Leis de Circuitos Elétricos	26
2.1.4 Métodos de simplificação e de análise de circuitos elétricos	32
2.2 REVISÃO TEXTUAL DA UNIDADE 2	64
2.2.1 Expressões de tensão, corrente, potência e energia nos indutores e capacitores	64
2.2.2 Transientes de primeira ordem	68
2.2.3 Transientes de segunda ordem	86
2.3 REVISÃO TEXTUAL DA UNIDADE 3	123
2.3.1 Fontes no domínio AC	124
2.3.2 A ferramenta fasor	130
2.3.3 Impedâncias puras e mistas	137
2.3.4 Alguns métodos de minimização no domínio fasorial	143
2.3.5 Alguns métodos de análise no domínio fasorial	149
2.4 Videoaulas de revisão	155
3 PRÁTICAS	156
3.1 Materiais iniciais	156
3.2 Instrumentos de laboratório	158
Referências Bibliográficas	159

Prefácio

A formação em Engenharia Elétrica demanda a construção sólida de conhecimentos fundamentais, os quais servirão de base para o desenvolvimento das competências técnicas e analíticas exigidas ao longo da trajetória acadêmica e profissional. Nesse contexto, a disciplina de Circuitos Elétricos se destaca como um dos pilares estruturantes do curso, sendo responsável por estabelecer a conexão entre os conteúdos iniciais e as áreas mais avançadas da Engenharia.

É com grande satisfação, na condição de Coordenadora do Curso de Engenharia Elétrica, que apresento esta obra, a qual representa uma contribuição significativa para o processo de ensino-aprendizagem para estudantes de graduação. O material aqui reunido oferece suporte consistente e acessível, favorecendo a compreensão progressiva dos conceitos fundamentais de análise de circuitos elétricos e consolidação do conhecimento ao longo da formação.

O livro reflete uma trajetória de dedicação ao ensino, traduzida na sistematização de recursos pedagógicos desenvolvidos ao longo de anos de experiência docente. Soma-se a isso a sólida formação acadêmica e científica do professor Luciano Buonocore, cuja trajetória inclui formação em uma instituição de excelência como o Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), reconhecido nacional e internacionalmente pelo rigor e qualidade na formação de engenheiros. Essa base contribui de maneira significativa para a consistência técnica e o elevado padrão acadêmico do material apresentado.

Destaca-se, ainda, a adoção de uma abordagem contemporânea, que integra texto e videoaulas, ampliando as possibilidades de aprendizagem e atendendo às diferentes necessidades dos estudantes. Tal proposta dialoga com as demandas atuais do ensino superior, ao incorporar recursos didáticos diversificados e acessíveis contemplando exemplos práticos interessantes.

Outro aspecto de grande relevância é o caráter colaborativo da obra, evidenciado pela participação ativa de discentes de pós-graduação e graduação em projetos institucionais. Essa integração entre docentes e alunos fortalece o ambiente acadêmico, estimula o protagonismo estudantil e contribui para a formação de profissionais mais preparados e comprometidos com a excelência.

Ressalto, portanto, a importância deste livro como instrumento de apoio contínuo aos estudantes, desde os períodos iniciais até as etapas mais avançadas do curso. Trata-se de um recurso que não apenas complementa o estudo das disciplinas, mas também incentiva a autonomia e o aprofundamento do aprendizado.

Assim, manifesto meu reconhecimento à iniciativa e ao empenho de todos os envolvidos na elaboração desta obra, cuja relevância acadêmica certamente impactará positivamente a formação dos nossos estudantes e o fortalecimento do Curso de Engenharia Elétrica da UFMA.

São Luís, agosto de 2026.

Profa. Dra. Maria de Fátima Santos

Coordenadora do Curso do Curso de Engenharia Elétrica (UFMA)

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

De forma geral, o conteúdo pedagógico abordado na disciplina Circuitos Elétricos trata do conhecimento das três leis de circuitos elétricos e, como consequência, os métodos de minimização e análise de circuitos disponíveis, usando como base essas leis. Esses conhecimentos adquiridos atendem às necessidades de seus empregos nas disciplinas de eletrônica, automação e controle, além da área de potência. Em alguns circuitos, até mesmo no ramo de telecomunicações, fazem uso desses métodos, porém eles não são aplicáveis aos circuitos e sistemas de microondas, onde as três leis não são válidas, sendo necessário o uso da teoria eletromagnética.

Dessa forma, a disciplina representa uma ligação importante entre os períodos iniciais do Curso de Engenharia e aqueles que encaminham o graduando para conhecimentos mais específicos contemplados pelas diversas áreas mencionadas. Nesse primeiro semestre de 2026, existem dois PPCs (Projetos Pedagógicos de Curso) sendo ofertado no Curso de Engenharia Elétrica, onde o mais atualizado está sendo implantado no primeiro semestre na graduação. Dessa forma, o anterior encontra-se em vigência e será gradualmente substituído a cada semestre. Ao final de dez períodos, todo o novo PPC será totalmente implantado e o único do Curso. No PPC que está sendo substituído, as disciplinas teórica (Circuitos Elétricos com 60 horas) e prática (Laboratório de Circuitos Elétricos com 30 horas) localizam-se no quarto e quinto período da grade curricular, respectivamente. No PPC que está sendo implementado, a parte teórica e prática da disciplina tem os conteúdos teórico e prático na mesma disciplina (Circuitos Elétricos com 90 horas), localizando-se no terceiro período.

Como docente, o autor Luciano Buonocore leciona ambas as disciplinas desde o primeiro período do ano de 2013. Durante esse período de 13 anos (26 períodos letivos), vários instrumentos pedagógicos foram desenvolvidos, visando fornecer materiais com objetivo de melhorar o aprendizado do graduando:

1. Criação das aulas em slides animados no ambiente PowerPoint, desde os primeiros semestres, os quais foram aprimorados no tempo com as necessidades de alterações com objetivo de melhor detalhar os conteúdos ministrados; e
2. Criação de videoaulas em projetos PROAES (Pró-Reitora de Assuntos Estudantis) em programas que tinham o objetivo de atender aos discentes com vulnerabilidade socioeconômica.

A organização de parte desse material e três outras aulas com revisão dos conteúdos das unidades ministradas na disciplina teórica, acrescentado textos e videoaulas, é o objetivo do lançamento deste livro. Os cinco projetos PROAES tem tema em circuitos elétricos, desenvolvidos por alunos (bolsistas UFMA) do Curso de Engenharia Elétrica, três abordando a parte teórica e dois a parte prática.

Para a elaboração dos materiais citados, de início foi necessário decidir qual livro texto seria usado como base. Foram consultadas algumas referências bibliográficas, tendo destaque para duas delas e, finalmente, escolhida a de Nilsson e Riedel (2009). À época (2013), o livro estava na 8ª edição em língua portuguesa publicado pela Editora Pearson Education do Brasil Ltda. Essa decisão levou em consideração o excelente aspecto pedagógico, tanto na apresentação do conteúdo teórico, quanto na farta utilização de problemas de avaliação e exemplos, bem como as muitas questões disponibilizadas ao final de cada capítulo. Outro aspecto interessante do livro é a presença de questão prática antes do início de cada capítulo e a respectiva solução ao final, após a apreensão do conteúdo apresentado, metodologia que agrega o aspecto prático de engenharia às informações abordadas na teoria.

Todo o curso, criado como aulas na forma de slides animados em PowerPoint, segue fielmente os capítulos e seções do livro. A referência bibliográfica com todos os elementos desse livro é citada abaixo. Alguns pequenos textos que mereceram destaque do livro base foram retirados na íntegra, respeitando os direitos autorais com o uso entre aspas. Essa metodologia na construção dos slides das aulas teve como objetivo concatenar as informações e, principalmente, orientar os alunos para pontos importantes que fossem ler no livro, quando da consulta para aprimorar os conhecimentos e dirimir as dúvidas. Por questões de direitos autorais, as videoaulas com o conteúdo teórico não constam desta publicação.

NILSSON, J. W.; RIEDEL, S.A. CIRCUITOS ELÉTRICOS – Princípios e Aplicações. 8ª ed., Pearson Education do Brasil, 2009, 564 p.

A organização do material presente neste ebook contém texto e vídeos. A parte de texto tem a função apenas de esclarecer o conteúdo das videoaulas presentes no capítulo referente à revisão. O capítulo 2 apresenta os textos e as três videoaulas de revisão dos conteúdos ministrados na disciplina. O capítulo 3 apresenta todo o material relacionado a parte prática da disciplina realizada em laboratório. As videoaulas desenvolvidas em três projetos PROAES, um referente às aulas ministradas na disciplina e os dois outros a 60 questões com soluções por cálculo, simulação no ambiente Multisim e programação por script em Matlab não puderam fazer parte desta publicação em função de direitos autorais. Essas videoaulas são disponibilizadas apenas para acesso online aos alunos

inscritos na teoria e prática da disciplina, no caso Circuitos Elétricos e Laboratório de Circuitos Elétricos, respectivamente.

O projeto PROEN, período 2018-2019, desenvolvido à época pelo graduando Bruno Dias dos Reis, contemplou 22 aulas teóricas com conteúdos avaliados em três provas requeridas na Resolução UFMA 1892-CONSEPE de 2019. Ainda na parte teórica, foram desenvolvidas 60 videoaulas sobre soluções de problemas (conceitual, simulado em ambiente Multisim e programação por script em Matlab), edição 2019-2020, pelos alunos Bruno Leal da Silva e Lucas Silveira Soeiro, em que cada um implementou 30 videoaulas.

No que se refere ao conteúdo prático da disciplina, três outros alunos participaram, dois deles com videoaulas (Yoseph Michael S. Silva e Abmael Rodrigo Costa Souza) na edição 2018-2019 e uma aluna na preparação de tutoriais (Patrinny Rose de Ataíde Rocha) no período 2019-2020.

Ainda que todas as videoaulas contidas neste ebook tenham sido criadas por partes, elas contêm poucos erros de fala e escrita que podem passar despercebidos. Na criação das videoaulas foram feitos as escritas dos scripts ou textos que compõem as falas dos slides, suas revisões pelo coordenador dos projetos, para então serem transformadas em áudio e, finalmente, sincronizadas com a animação dos slides na geração dos vídeos das mesmas. Isso não compromete a informação, pois no contexto, mesmo quando percebida a pequena falha (áudio e/ou texto), é possível a compreensão da informação.

Todos os graduandos participaram dos projetos com bolsa UFMA, fornecida pela PROAES. Neste livro constarão apenas os projetos das videoaulas (sem a presença dos tutoriais), disponibilizadas para acesso por links nos capítulos seguintes. Praticamente todos os alunos citados participaram em mais de uma vez como monitores dessas disciplinas (teoria e prática), produzindo outros materiais relacionados às aulas que ministravam como reforço aos alunos inscritos. No primeiro semestre de 2020, a monitoria passou a ser feita através de submissão de projetos PEM (Projeto de Ensino de Monitoria) da PROEN (Pró-Reitoria de Ensino) da UFMA.

É importante registrar que o LRC (Laboratório de Robótica Móvel e Comunicação Sem Fio), com as linhas básicas de pesquisa em robótica móvel probabilística e sistemas embarcados, teve a cooperação direta desses e outros alunos do Curso de Engenharia Elétrica da UFMA, em um total de mais de 30 desde a sua implantação em 2013.

Por fim, é necessário destacar que, ao invés de buscar uma qualidade que possa ser considerada de excelência neste ebook, o objetivo é a publicação de materiais desenvolvidos por alunos do LRC na forma de videoaulas.

Capítulo 2

REVISÃO DOS CONTEÚDOS TEÓRICOS

A apresentação da parte teórica do tema Circuitos Elétricos é feita neste capítulo que disponibiliza os textos e as videoaulas, os quais contemplam as revisões dos três conteúdos organizados em unidades de avaliação da disciplina.

A importância destes materiais tem a função de possibilitar ao aluno fazer a rememoração completa dos conteúdos da disciplina, a qualquer tempo que seja necessário. Como exemplo de situações que possam demandar uma recordação dos temas tratados na disciplina, pode-se citar a revisão antes do início de um semestre letivo ou mesmo quando o graduando for prestar o exame ENADE, realizado nos cursos de universidades públicas e privadas.

O material dessas três videoaulas não fizeram parte de nenhum projeto PROAES, como as demais que são disponibilizadas nos próximos capítulos. Foram desenvolvidas entre o fim de 2024 e início de 2025, antes da publicação deste ebook, pelo engenheiro eletricitista Antonio José Portela de Jesus Santos, sob coordenação do prof. Dr. Luciano Buonocore, ambos autores deste livro.

De forma resumida, os conteúdos dos textos e videoaulas são informações que abordam o regime de operação do circuito elétrico (fontes contínuas e alternadas), as leis e métodos empregados na minimização e análise (obtenção de uma ou mais variáveis), os componentes empregados (resistores, capacitores e indutores) e os tipos de manipulações em cálculos, envolvendo números reais apenas (operação em regime contínuo) ou complexos (regime alternado). A Tabela 1 apresenta as principais características relativas a cada um desses conteúdos, relacionadas aos capítulos da referência bibliográfica usada como texto básico e já citada.

A divisão adotada para ministrar e avaliar os conteúdos da disciplina segue uma lógica que considera, basicamente, o tipo de circuitos que estão sendo estudados e qual o regime de alimentação empregado, no caso DC (fontes de valores fixos, invariantes no tempo) e AC (fontes de sinais com formato senoidal).

Na unidade 1, os componentes de circuitos são formados apenas por fontes de tensão e/ou correntes DC e resistores. Essa pouca quantidade de elementos é suficiente para que as três leis de circuitos elétricos sejam enunciadas, além da apresentação dos métodos de minimização e análise, todas válidas também na solução dos circuitos das duas outras unidades. Os métodos de minimização e análise são obtidos, matematicamente, a partir apenas das três leis de circuitos elétricos. No caso dos métodos de minimização, o objetivo é diminuir a complexidade do circuito de maneira a permitir fazer sua análise na busca da solução de uma ou mais variáveis (tensão, corrente, potência, etc) do mesmo. Como indicado na Tabela 1, os cálculos nas leis e métodos citados empregam números reais, já que são usados apenas resistores, além de fontes de tensão e corrente no domínio DC.

Tabela 2.1: Principais características relativas aos temas de cada unidade teórica da disciplina Circuitos Elétricos

PRIMEIRA UNIDADE	SEGUNDA UNIDADE	TERCEIRA UNIDADE
1. Circuitos em regime DC.	1. Circuitos em regime DC.	1. Circuitos em regime AC
2. Circuitos resistivos apenas (operação com números reais).	2. Estudos de transientes de 1ª e 2ª ordem.	2. Estudos das leis e métodos no regime AC
3. Três leis básicas de circuitos elétricos.	3. Elementos armazenadores de energia (indutor e capacitor).	3. Ferramenta fasor na solução de circuitos no domínio AC
4. Métodos de minimização.	4. Transientes 1ª ordem - circuitos "RL" e "RC".	4. Operação com números complexos (Impedâncias no domínio fasorial)
5. Métodos de análise.	5. Transientes 2ª ordem - circuitos RLC paralelo e série.	5. Diagramas fasoriais
6. Capítulos 2, 3 e 4 do livro texto.	6. Capítulos 6, 7 e 8 do livro texto.	6. Capítulo 9 do livro texto

Na unidade 2 são introduzidos dois novos componentes de circuitos, o capacitor e o indutor, ambos armazenadores de energia, diferente do resistor que é um elemento que dissipa a potência entregue na forma de calor (efeito Joule). Pelo fato dos circuitos estarem operando no regime DC, os valores de tensão e corrente em regime não variam e, dessa forma, os indutores estão em curto e os capacitores em aberto, de

maneira que o circuito a ser analisado nessas condições retorna ao usado na unidade 1, permanecendo apenas os resistores e fontes DC. Para verificar o armazenamento e fornecimento de energia pelo indutor (magnética) e capacitor (elétrica), é necessário que haja uma mudança na topologia do circuito que se encontra em regime, promovida pelo acionamento de uma ou mais chaves. Nessa alteração, com uma nova configuração do circuito, haverá a carga e/ou descarga (transiente de sinais) de capacitores e/ou indutores através dos componentes resistivos. Quando o circuito envolver apenas indutor e resistor (RL) ou capacitor e resistor (RC), o transiente é dito de primeira ordem, matematicamente equacionado com o uso da LTK (RC) ou LCK (RL), além da lei de Ohm. Entretanto, se o circuito contiver ambos os tipos de armazenadores de energia, seja na topologia paralela ou série de ligação desses três elementos, o transiente dos sinais será de segunda ordem, também matematicamente expresso pelas leis de circuitos, LCK e LTK, respectivamente. Nesse ponto, a relação da tensão e corrente no indutor e no capacitor são necessárias, impondo a ordem dos transientes mencionados, os quais podem ser de reposta natural ou a degrau, após a alteração do layout do circuito (transitório), sendo resultante de uma configuração de circuito que não possui ou contém elementos forçantes (fontes DC), respectivamente.

Na unidade 3, os circuitos passam a ser alimentados por fontes alternadas e de formato senoidal, o que acarreta o aparecimento de impedâncias, números complexos que possuem como parte real os resistores e imaginários as reatâncias, não existentes em circuitos em regime DC. Essas reatâncias indicam a capacidade do elemento indutivo e capacitivo de resistir ao armazenamento de energia magnética e elétrica, respectivamente, de forma análoga à resistência, que impede a circulação de corrente. As três leis e métodos estudados e válidos para a aplicação em circuitos em regime DC (unidades 1 e 2), também são aplicáveis para o regime AC, somente que, ao invés de cálculos envolvendo números reais, empregam números complexos. Para facilitar os cálculos nas aplicação das leis e métodos no domínio AC, a ferramenta fasor é empregada. Dessa forma, os métodos envolvidos nos cálculos desses circuitos podem ser feitos no domínio do tempo ou fasorial (plano complexo). No domínio do tempo, os cálculos envolvem operações aritméticas com funções trigonométricas e no fasorial apenas o módulo e ângulo de fase dos fasores tensão e corrente, além das impedâncias (não são fasores, apenas valores complexos), facilitando a operação de soma, subtração, divisão e multiplicação, requeridas nas leis e métodos de minimização e análise.

Antes de disponibilizar os links para acesso às videoaulas (final da seção), as revisões dos conteúdos também é apresentada na forma de texto, contendo os conceitos e exemplos com soluções de circuitos na forma de cálculos, resultados simulados e gráficos.

2.1 REVISÃO TEXTUAL DA UNIDADE 1

Aqui serão apresentados os principais conceitos necessários para a realização de análise de circuitos de corrente contínua ou no regime DC. Nesse contexto, serão

revisadas as variáveis de interesse (tensão, corrente, potência e energia), as três leis de circuitos elétricos e os métodos de minimização e análise empregados na solução de circuitos. Além disso, tanto as leis quanto os métodos citados são válidas para os temas adorados nas duas próximas unidades. No caso, a unidade 2 trata da inserção de dois novos componentes armazenadores de energia, indutor e capacitor, acrescentando duas novas relações entre tensão e corrente, uma para cada componente, em acréscimo às três leis revisadas nesta primeira unidade. No caso da unidade 3, todo o conteúdo visto para circuitos no regime DC são válidos para o regime de alimentação AC de circuitos, quando todos os componentes passivos (resistor, capacitor e indutor) são substituídos por impedâncias, conforme será revisto.

2.1.1 Tensão, Corrente, Potência e Energia

Antes de iniciar os estudos relativos aos circuitos elétricos, é preciso definir as grandezas físicas utilizadas. A definição de cada uma delas pode ser realizada a partir do conceito da carga elétrica, uma propriedade intrínseca da matéria que determina a interação eletromagnética entre os prótons e elétrons, que são partículas subatômicas, assim como os nêutrons. Os prótons são cargas positivas, os elétrons cargas negativas e os nêutrons não possuem cargas, apresentando fenômenos de atração quando de polaridades diferentes e repulsa, caso contrário.

A unidade de carga elétrica (q) é o Coulomb (C), sendo definida de acordo com a Eq. 2.1, onde n é o número inteiro de partículas. A carga elementar é o valor em um único elétron ou próton (iguais em módulo e opostas em sinais), valendo $e \approx 1,602 \times 10^{-19}$ C.

$$q = n \times e \quad (2.1)$$

A carga elétrica definida na Eq. 2.1 é uma grandeza estática, que pode descrever, por exemplo, a carga acumulada em um corpo ou material, que pode ser majoritariamente positiva ou negativa. Embora a carga acumulada seja uma grandeza estática, quando temos dois corpos com concentrações de cargas diferentes (por exemplo, um corpo com excesso de elétrons e outro com falta), surge uma tensão elétrica pela diferença de potencial. A unidade de tensão elétrica (v) é o Volt (V). Definimos a tensão como a quantidade de trabalho realizado (ou energia transferida) em Joule (J) por unidade de carga elétrica em Coulomb, de acordo com a Eq. 2.2

$$v = \frac{dw}{dq} \quad (2.2)$$

A partir do momento em que a carga elétrica flui de maneira ordenada por um meio condutor, define-se a corrente elétrica (i). Ela representa a taxa de variação da carga elétrica em Coulomb que atravessa uma seção transversal do condutor por unidade de tempo em segundos (s), sendo expressa matematicamente pela Eq. 2.3. A unidade de corrente elétrica é o Ampère (A), que é uma das unidades fundamentais do sistema internacional de unidades (SI) e equivale a $6,241509074 \times 10^{18}$ C/s, valor que representa fisicamente o número de elétrons passando no condutor em um segundo.

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (2.3)$$

Ao definir a corrente elétrica, é necessário distinguir entre o seu sentido real e o seu sentido convencional. No sentido real, em materiais condutores como cobre, a corrente é formada pelo movimento de elétrons, que possuem carga negativa. Com isso, eles são repelidos pelo polo negativo e atraídos pelo polo positivo. Portanto, o fluxo real de partículas ocorre do polo negativo para o positivo. Já no sentido convencional ou convenção passiva, definiu-se que a corrente flui do polo positivo para o negativo. É este sentido que se utiliza nos estudos de circuitos elétricos, em todas as análises e fórmulas matemáticas. Independentemente do sentido adotado, o valor da corrente (i) calculado pela Eq. 2.3 permanece o mesmo, pois o que importa para a análise é o fluxo de carga através do condutor.

A potência elétrica (p) representa a velocidade na qual a energia é fornecida ou consumida instantaneamente em um circuito, podendo ser definida como a taxa de energia por unidade de tempo, expresso na Eq. 2.4. A unidade de potência elétrica é o Watt (W).

$$p = \frac{dw}{dt} \quad (2.4)$$

Pode-se reescrever a equação da potência elétrica de modo a relacioná-la à tensão e corrente definidas nas Eq. 2.2 e Eq. 2.3, conforme Eq. 2.5.

$$p = \frac{dw}{dq} \times \frac{dq}{dt} = v \times i \quad (2.5)$$

Por fim, a energia elétrica é a capacidade de realizar trabalho e representa a potência total integrada ao longo de um intervalo de tempo. Enquanto a potência diz quão rápido a energia está sendo convertida, a energia fornece o valor total envolvido nesse processo.

Matematicamente, pode-se obter a energia a partir da integração da potência (Eq. 2.4) no tempo, com o resultado dessa integração, sendo a fórmula para obtenção da energia (ω) consumida entre os intervalos quaisquer de tempo t_1 e t_2 , mostrada na Eq. 2.6:

$$\omega = \int_{t_1}^{t_2} p \, dt \quad (2.6)$$

No SI (Sistema Internacional) a unidade de energia é o Joule (J). Contudo, em contextos práticos e comerciais, como em contas de luz residenciais, é comum utilizar o Quilowatt-hora (kWh), que representa a energia consumida por um dispositivo de $1.000 \, W$ operando durante uma hora.

O Exemplo 1 revela por que as concessionárias de energia utilizam o kWh para medir a energia elétrica consumida em residências. Suponha que uma pessoa, ao observar o medidor de energia da Figura 2.1, verificou que o valor exibido no *display* era totalizado em kWh . Por curiosidade, ela resolveu converter esse valor para a unidade de energia do SI (J), a fim de verificar a diferença entre as representações.



Figura 2.1: Medidor de Energia utilizado no Exemplo 1

Para converter o valor de para a unidade do Sistema Internacional (J), deve-se decompor a unidade kWh em suas definições de base:

O prefixo quilo (k): Representa 1.000 e o Watt (W) no S.I. é definido como $1 \frac{J}{s}$. A Hora (h) deve ser convertida para segundos, onde $1 h = 60 min = 60 \times 60 = 3.600 s$.

O cálculo passo a passo:

$$\omega_m = 1.862 kWh = 1.862 \times 1.000 W \times 3.600 s$$

Substituindo W por $\frac{J}{s}$:

$$\omega_m = 1.862 \times 1.000 \frac{J}{s} \times 3.600 s$$

Note que os segundos se cancelam, restando apenas a unidade de energia:

$$\omega_m = 1.862 \times 3.600.000 J$$

$$\omega_m = 6.703.200.000 J \text{ ou } \omega_m = 6,70 GJ$$

Pode-se concluir que a representação em kWh facilita a totalização e leitura da energia, já que a representação em Joules é um número muito grande.

2.1.2 Fontes de Tensão e Corrente

Para revisar o funcionamento de fontes de tensão e corrente, é preciso lembrar de como é o processo de conversão de energia. Uma fonte de energia elétrica é um dispositivo capaz de realizar a conversão de uma forma de energia, que pode ser

química, mecânica, luminosa, etc. em energia potencial elétrica. Nas Figuras 2.2a e 2.2b pode-se observar dois dispositivos onde essa conversão ocorre: uma pilha e uma célula fotovoltaica.

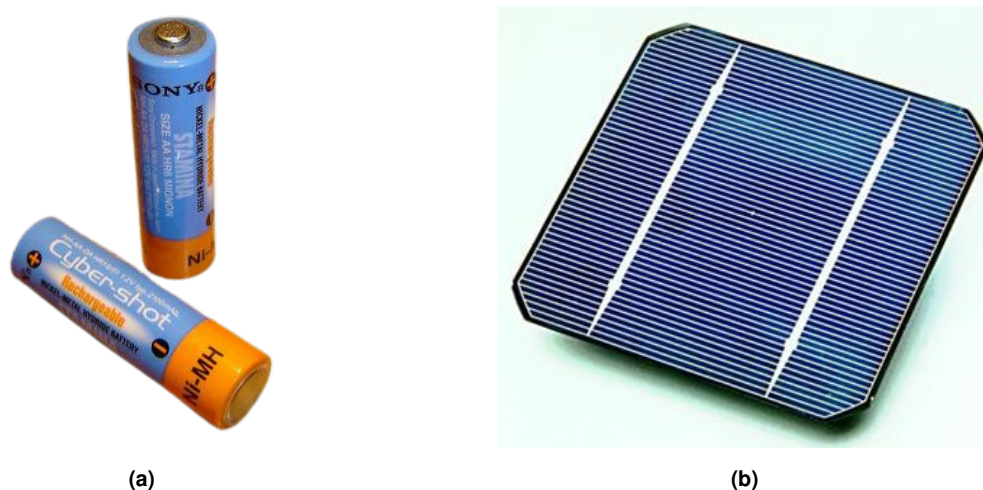


Figura 2.2: Conversores de energia: (a) Pilha e (b) Célula fotovoltaica

Na pilha, ocorre a transformação de energia química em energia elétrica, resultado da reação de oxirredução que separam as cargas, criando acúmulo de elétrons no polo negativo. Já na célula fotovoltaica os fótons da luz solar possibilitam que os elétrons dos átomos de silício passem para a banda de condução, deixando lacunas que possibilitam a passagem de corrente elétrica.

A conversão de energia é bidirecional, ou seja, existem dispositivos que convertem energia elétrica em outros tipos, como a mecânica em um motor, ou mecânica em elétrica como acontece com os geradores.

Com a compreensão de como a conversão de energia ocorre é possível definir as fontes de energia elétrica, que podem fornecer ou absorver potência e devem manter, idealmente, a tensão ou a corrente constante nos seus terminais durante esse processo. O termo idealmente fornece a aproximação do valor real que, mesmo em tomadas elétricas, pode variar ainda que em pequena quantidade sem prejuízos ao funcionamento do equipamento a ela conectado. Além disso as recarregáveis, com pilhas e baterias, com o uso perdem a carga, diminuindo o valor nominal de seus terminais.

Para a análise de circuitos, considera-se que fontes de tensão e corrente são ideais. As fontes ideais podem ser independentes ou dependentes.

Uma fonte de tensão independente, cuja simbologia usuais podem ser vistas na Figura 2.3a, é aquela que mantém o valor da tensão constante em seus terminais sem levar em consideração a corrente que a percorre.

Já a fonte de corrente independente, cuja simbologia usual pode ser vista na Figura 2.3b, é aquela que mantém a corrente fornecida constante sem considerar a tensão em

seus terminais. Nas condições ideais, pode-se chegar à necessidade de elas terem de fornecer uma potência acima da qual é possível em uma condição real.

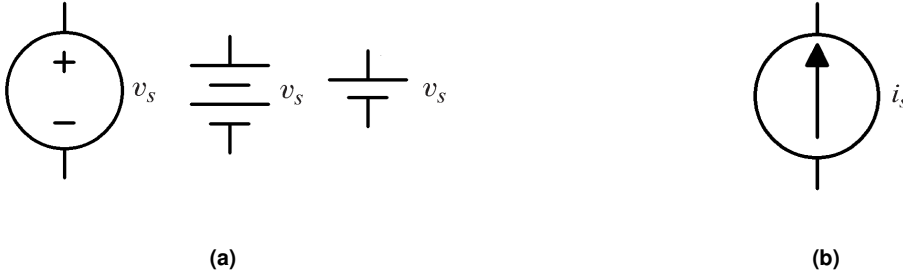


Figura 2.3: Simbologia de fontes independentes: (a) tensão e (b) corrente

As fontes de tensão e corrente dependentes podem ser divididas em quatro tipos, cuja simbologias usuais podem ser vistas na Figura 2.4. As fontes de tensão dependentes podem ser controladas por tensão (Figura 2.4a) ou corrente (Figura 2.4b) e as fontes de corrente dependentes também podem ser controladas por tensão (Figura 2.4c) ou corrente (Figura 2.4d). Diferente das anteriores, estas fontes têm seu valor determinado por uma tensão ou corrente presente em outro ponto do circuito. Elas são essenciais para modelar o comportamento de componentes ativos, como são os casos dos transistores de junção bipolar e de efeito de campo.

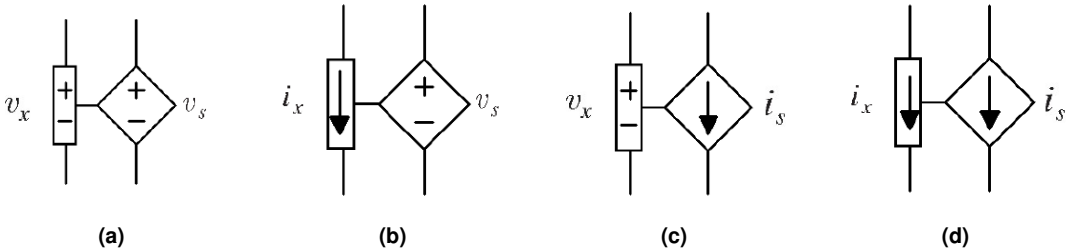


Figura 2.4: Simbologia de Fontes dependentes: (a) tensão controlada por tensão, (b) tensão controlada por corrente, (c) corrente controlada por tensão e (d) corrente controlada por corrente

Para a fonte de tensão controlada por tensão vista na Figura 2.4a, pode-se encontrar a relação entre a tensão de fornecimento v_s e a tensão de controle v_x , mostrada na Eq. 2.7. O fator μ é denominado ganho de tensão adimensional, na medida em que relaciona duas tensões.

$$v_s = \mu \times v_x \quad (2.7)$$

Já para a fonte de tensão controlada por corrente vista na Figura 2.4b, pode-se encontrar a relação entre a tensão de fornecimento v_s e a corrente de controle i_x ,

mostrada na Eq. 2.8. O fator ρ é denominado resistência de transferência ou transresistência elétrica e é dado em Volt por Ampere (V/A), relacionando corrente à tensão.

$$v_s = \rho \times i_x \quad (2.8)$$

Para a fonte de corrente controlada por tensão vista na Figura 2.4c, pode-se encontrar a relação entre a corrente de fornecimento i_s e a tensão de controle v_x , mostrada na Eq. 2.9. O fator α é denominado condutância de transferência ou transcondutância e é dado em Ampere por Volt (A/V), relacionando tensão à corrente.

$$i_s = \alpha \times v_x \quad (2.9)$$

Já para a fonte de corrente controlada por corrente vista na Figura 2.4d, pode-se encontrar a relação entre a corrente de fornecimento i_s e a corrente de controle i_x , mostrada na Eq. 2.10. O fator β é denominado ganho de corrente e é adimensional, relacionando sinais de correntes.

$$i_s = \beta \times i_x \quad (2.10)$$

Diferente das fontes reais, as fontes ideais de tensão e corrente (sejam elas independentes ou dependentes) não apresentam perdas internas, funcionando como modelos matemáticos fundamentais para o estudo de circuitos elétricos, já que seus parâmetros de fornecimento (tensão ou corrente) não variam no tempo. Essas fontes também são chamadas de fontes contínua CC ou DC. Desse modo, existem fontes de tensão CC e fontes de corrente CC.

As fontes CC são um exemplo de elemento ativo, pois elas representam os dispositivos que podem fornecer energia elétrica, como as pilhas, células fotovoltaicas, baterias, geradores e outros que possuam essa capacidade. A convenção de sinal para elementos ativos como as fontes diz que a corrente deve entrar pelo polo negativo da fonte e sair pelo positivo, como pode-se observar na Figura 2.5. Essa convenção é denominada passiva (contrária a circulação dos elétrons do polo negativo para o positivo da fonte), considerando o consumo de potência com valor positivo.

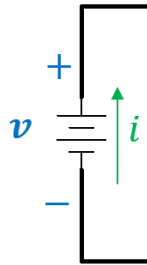


Figura 2.5: Convenção de sinal de um elemento ativo

Para os elementos ativos, a potência pode ser calculada de acordo com a Eq. 2.11, onde o sinal negativo indica matematicamente que a corrente entra pelo polo negativo da fonte de tensão, circulando em elevação de tensão, que é a convenção de sinal utilizada.

$$p = -v \times i \quad (2.11)$$

Desse modo, quando $p < 0$ dizemos que a fonte CC está fornecendo energia, enquanto que para $p > 0$ a fonte está absorvendo energia. Um exemplo prático para a afirmação anterior é o funcionamento da bateria de um celular. Durante o uso do aparelho, a bateria fornece energia para os componentes até que chega em um nível crítico, necessitando de recarga. Durante a recarga, essa mesma bateria passa a consumir energia, transformando energia elétrica em química, para estabelecer uma capacidade suficiente para o funcionamento.

Já elementos passivos são modelos de dispositivos que absorvem energia, como os resistores, indutores, capacitores, fontes CC que realizam recarga, dentre outros que possuam essa capacidade. A convenção de sinal para elementos passivos diz que a corrente deve entrar pelo terminal positivo do componente e sair pelo terminal negativo, circulando em queda de tensão, como pode-se observar na Figura 2.6.

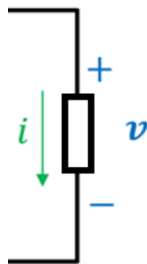


Figura 2.6: Convenção de sinal de um elemento passivo

Para os elementos passivos, a potência pode ser calculada de acordo com a Eq. 2.12, onde o sinal positivo indica matematicamente que a corrente entra pelo terminal positivo do componente.

$$p = +v \times i \quad (2.12)$$

Desse modo, quando $p > 0$ dizemos que o componente está consumindo potência, enquanto que para $p < 0$ o componente está fornecendo. Um exemplo prático para a afirmação anterior é a carga e descarga de um capacitor. No processo de carga, o capacitor absorve energia (quantidade de potência no tempo) do circuito e a armazena na forma de campo elétrico. Já na descarga, o capacitor fornece a energia armazenada ao circuito em que está contido.

O Exemplo 2 é útil para observar a importância da identificação de elementos ativos e passivos no circuito, além da verificação da potência. Na Figura 2.7a pode-se observar uma lanterna, a qual possui uma lâmpada incandescente que trabalha com uma tensão

de 2,4 V e corrente de 0,5 A. A corrente é fornecida por duas pilhas de 1,5 V conectadas em série no interior da lanterna. As pilhas e a lâmpada estão conectadas em série, junto a uma chave que controla o acionamento da lanterna.

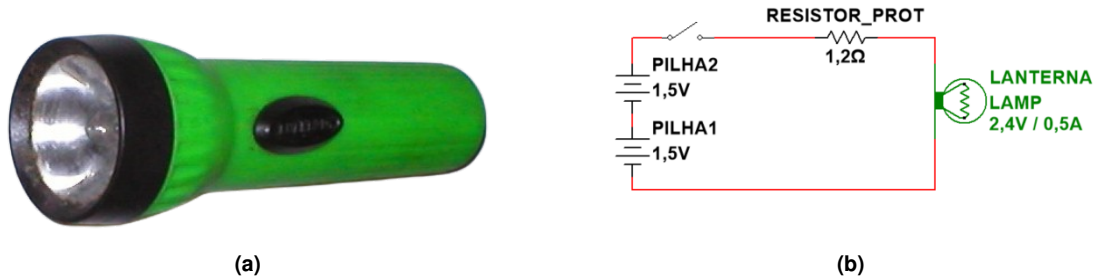


Figura 2.7: Elementos do exemplo 2: (a) dispositivo físico e (b) circuito elétrico

Para proteger a lâmpada de tensões maiores que a sua especificação, uma resistência de 1,2 Ohms é conectada em série com as pilhas, para possibilitar a conexão das pilhas aos terminais da lâmpada da lanterna sem causar danos. O circuito descrito pode ser visto na Figura 2.7b. Deseja-se calcular: a) a potência fornecida por cada pilha, b) a potência total fornecida pelas pilhas, c) a potência consumida pela lâmpada e d) a potência consumida pelo resistor de proteção.

Todo o circuito está em série, isto é, a corrente i no circuito deve ser igual a corrente nominal que a lâmpada suporta. Como a corrente entra no terminal negativo e sai pelo positivo de cada pilha (convenção passiva), pode-se deduzir que as duas pilhas são elementos ativos, que fornecem energia para o circuito. A regra é que, sempre que o circuito contiver apenas uma fonte independente ela, necessariamente, estará fornecendo energia ao mesmo. Como as pilhas possuem o mesmo valor de tensão e são percorridas pela mesma corrente, ambas fornecem a mesma quantidade de potência, portanto:

$$p_{pilha1} = p_{pilha2} = -v_{pilha} \times i$$

$$p_{pilha1} = p_{pilha2} = -1,5 \times 0,5$$

$$p_{pilha1} = p_{pilha2} = -0,75 \text{ W} = -750 \text{ mW}$$

Pelos cálculos realizados, observa-se que cada pilha fornece 750 mW para o circuito, com a geração sendo indicada pelo sinal negativo.

A potência total gerada (p_{total}) pode ser obtida somando as potências fornecidas por todos os elementos ativos presentes no circuito, no caso, as duas pilhas.

$$p_{total} = p_{pilha1} + p_{pilha2}$$

$$p_{total} = (-0,75) + (-0,75)$$

$$p_{total} = -1,50 W$$

Pelos cálculos realizados, observa-se que a potência total fornecida pelas pilhas foi de $1,50 W$ para o circuito.

A potência consumida pela lâmpada pode ser obtida usando os dados de tensão e corrente nominais de seu funcionamento. Portanto:

$$p_{lâmpada} = v_{lâmpada} \times i$$

$$p_{lâmpada} = +2,4 \times 0,5$$

$$p_{lâmpada} = +1,20 W$$

Observa-se que a potência total consumida pela lâmpada foi $1,20 W$ para o circuito, com o consumo indicado pelo sinal positivo.

Pode-se deduzir que as duas pilhas fornecem a energia que é consumida pela lâmpada e pelo resistor de proteção, enunciado no princípio da conservação de energia, onde a soma algébrica das potências em todos os elementos de um circuito deve ser igual a 0. Isso indica que toda potência fornecida pelos elementos ativos (valor negativo) é consumida pelos elementos passivos (valor positivo). Portanto, a potência consumida pelo resistor de proteção (p_{rp}) é igual a:

$$p_{pilha1} + p_{pilha2} + p_{lâmpada} + p_{rp} = 0$$

$$(-0,75) + (-0,75) + 1,20 + p_{rp} = 0$$

$$(-0,30) + p_{rp} = 0$$

$$p_{rp} = +0,30 W \rightarrow p_{rp} = +300 mW$$

2.1.3 Três Leis de Circuitos Elétricos

Para realizar a análise de circuitos elétricos é preciso observar três leis que são essenciais e permitem compreender o comportamento dos circuitos elétricos: A Lei de Ohm e as Leis das Correntes de Kirchhoff (LCK) e das Tensões de Kirchhoff (LTK). Juntas, essas leis formam o ferramental matemático indispensável para engenheiros e técnicos, permitindo desde o cálculo de componentes simples, como o resistor de proteção de uma lanterna, até o projeto de sistemas eletrônicos sofisticados e redes elétricas de potência. A teoria de circuitos elétricos evita o uso geral da teoria eletromagnética, baseando-se em três premissas: a) parâmetros concentrados, b) não haver carga líquida no sistema e, no caso do capacitor, as cargas são separadas entre as placas, não havendo carga líquida e c) não haver acoplamento magnético entre

elementos distintos dos circuitos e, no caso do transformador, o acoplamento existe no mesmo elemento do circuito. Portanto, as duas últimas premissas não violam o uso das leis.

Resistência e Lei de Ohm

O conceito de resistência elétrica foi estabelecido pelo físico e matemático alemão George Simon Ohm (1787 – 1854). A resistência nada mais é do que a capacidade de um material de impedir a passagem de corrente elétrica, sendo que o componente elétrico que representa esse comportamento é o resistor, cuja simbologia usual pode ser observada na Figura 2.8.



Figura 2.8: Símbolo de um resistor

O cientista Ohm publicou diversos trabalhos no século XIX, indicando que a tensão elétrica entre dois pontos de um condutor é diretamente proporcional a corrente elétrica que o atravessa. Isso pode ser expresso matematicamente pela Eq. 2.13, conhecida como Lei de Ohm, sendo usado o sinal positivo quando em queda e negativo com a corrente em elevação de tensão, de modo que a resistência tenha sempre o valor positivo. Na Eq. 2.13, a tensão v é dada em Volt (V), a corrente elétrica i é dada em Ampere (A) e a resistência elétrica é dada em Ohm (Ω).

$$v = R \times i \quad (2.13)$$

Também é possível representar a Lei de Ohm para que seja utilizada no cálculo de corrente e resistência, conforme pode-se observar nas Eq. 2.14 e 2.15.

$$i = \frac{v}{R} \quad (2.14)$$

$$R = \frac{v}{i} \quad (2.15)$$

Pode-se relacionar a Eq. 2.13, que representa a Lei de Ohm, com a Eq. 2.5, que representa a corrente elétrica em termos de tensão e corrente. Desse modo, é possível obter o equacionamento para a potência em um resistor em termos da corrente, representado na Eq. 2.16.

$$p = v \times i = R \times i \times i = R \times i^2 \quad (2.16)$$

A Eq. 2.14 também pode ser relacionada com a Eq. 2.5, para encontrar o equacionamento para a potência em um resistor em termos da tensão, conforme Eq. 2.17.

$$p = v \times i = v \times \frac{v}{R} = \frac{v^2}{R} \quad (2.17)$$

Também é importante observar a convenção de sinal para o equacionamento da Lei de Ohm, que depende do sentido que a corrente percorre o resistor em comparação com atribuição de tensão adotada. Para a corrente entrando no terminal positivo de tensão no resistor, como na Figura 2.9a, a fórmula da Lei de Ohm leva sinal positivo, indicando que a atribuição de tensão no elemento está de acordo com a convenção de sinal para um elemento passivo, conforme pode-se observar na Figura 2.6. Da mesma forma, pode-se observar na Figura 2.9b que a fórmula para quando a corrente entra pelo terminal negativo da tensão no resistor leva sinal negativo. Essa condição evita que o resistor assuma valor negativo, o que seria uma contradição por informar que ele estaria gerando potência e não consumindo sempre e transformando basicamente em calor (efeito Joule).

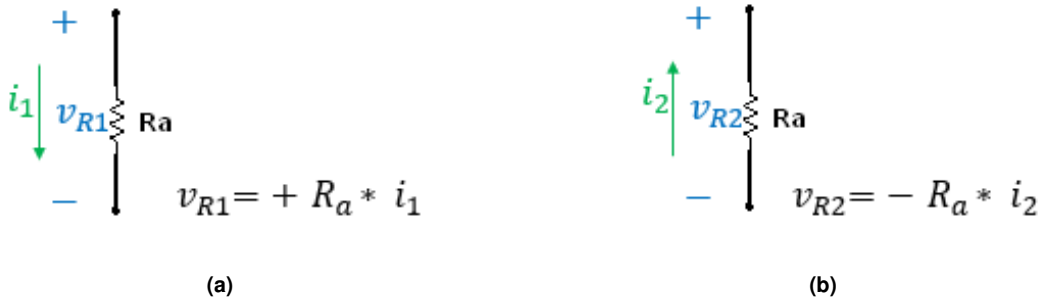


Figura 2.9: Convenção de sinal para o resistor: (a) Corrente em queda de tensão (b) Corrente em elevação de tensão

O exemplo 3 será utilizado para mostrar a utilidade da Lei de Ohm para encontrar o valor de resistência em um elemento de circuito baseado nos valores de tensão e corrente medidos nesse componente. O circuito simples é apresentado na Figura 2.10.

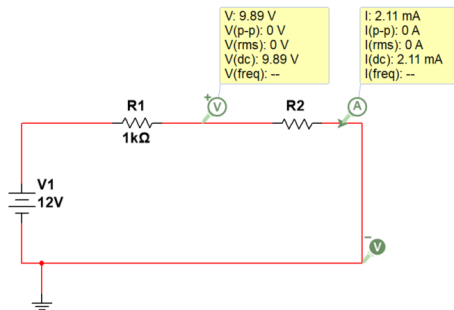


Figura 2.10: Circuito utilizado no Exemplo 3

As pontas de prova mostram os valores das variáveis que podem ser utilizadas para obter o valor do resistor. No caso da tensão é usado o par de medidores sobre os terminais do componente ($+V$ e $-V$) e da corrente o medidor (A) que se encontra em série, como requisitado.

Para encontrar a solução do problema proposto, pode-se utilizar a Eq. 2.15 para calcular a resistência em função da tensão e corrente (lei de Ohm). Portanto:

$$R2 = \frac{v_{R2}}{i}$$

Para o circuito, considerando a tensão medida em R2 ($v_{R2} = 9,89 V$) e a corrente que percorre o resistor ($i = 2,11 mA$), fazendo as substituições:

$$R2 = \frac{9,89}{2,11 \times 10^{-3}}$$

$$R2 = 4,7 k\Omega$$

Existe outras maneiras de se obter por cálculo, sem o uso das medidas simuladas, como o emprego do método de divisor de tensão, revisto mais adiante neste capítulo. Uma grande vantagem na análise de circuitos é a possibilidade de se empregar diferentes métodos, buscando obter o valor de uma ou mais variáveis, a menos que seja explicitamente pedido um método específico de solução.

Lei das Correntes de Kirchhoff (LCK) e Lei das Tensões de Kirchhoff (LTK)

O físico alemão Gustav Robert Kirchhoff (1824 – 1887) foi o responsável por formular duas leis que são amplamente utilizadas na análise de circuitos elétricos complexos, que possuem muitas fontes e resistores associados. Conforme mencionadas, são as Lei das Correntes de Kirchhoff ou LCK e Lei das Tensões de Kirchhoff ou LTK. Antes de apresentar essas leis, é importante definir o que é ramo, nó e malha em um circuito elétrico. Um ramo é a representação de um elemento do circuito, como fontes ou resistores. Já um nó representa o ponto de conexão entre dois ou mais ramos. Por fim, uma malha é qualquer caminho condutor fechado existente em um circuito elétrico. Uma malha é qualquer caminho que inicia e termina no mesmo nó do circuito sem passar duas vezes por qualquer nó no percurso.

A LCK ou Lei dos Nós estabelece que a soma das correntes que chegam em um nó é igual a soma das correntes que saem desse mesmo nó. Essa Lei é baseada no princípio da conservação de energia e, na prática, significa que um nó não acumula cargas elétricas. Matematicamente, esse fenômeno é expresso na Eq. 2.18, onde I_{chegam} indica as correntes que chegam em um nó e I_{saem} indica as correntes que saem de um nó.

$$\sum I_{chegam} = \sum I_{saem} \quad (2.18)$$

A partir da Eq. 2.18 pode-se generalizar essa definição para ‘n’ correntes em um nó, pois a soma algébrica das correntes em um nó (sinais opostos entre as que entram e

saem) é igual a zero, conforme definido na Eq. 2.19, com n sendo o número de correntes envolvidas.

$$\sum_n I_n = 0 \quad (2.19)$$

Para utilizar a Eq. 2.19, é importante convencionar como indicar matematicamente se uma corrente está entrando ou saindo de um nó. Geralmente, correntes entrando em um nó são representadas com sinal negativo ($-$) enquanto correntes saindo de um nó são representadas com sinal positivo ($+$), porém nada impede que a atribuição seja invertida, já que a definição realizada na Eq. 2.19 é matematicamente equivalente, quando é multiplicada por menos um.

A LTK ou Lei das Malhas estabelece que a soma algébrica das tensões das fontes em elevação (percorrendo do pólo negativo para o positivo) em uma malha é igual à soma algébrica das tensões em queda na mesma malha. Essa Lei, assim como a LCK, é baseada no princípio da conservação de energia em um circuito fechado. Essa Lei é expressa matematicamente na Eq. 2.20, onde $V_{elevação}$ e V_{queda} indicam as referidas tensões nos componentes presentes na malha, conforme o sentido que a percorre, podendo ser de elevação ou queda, respectivamente.

$$\sum V_{elevação} = \sum V_{queda} \quad (2.20)$$

A partir da Eq. 2.20 pode-se generalizar essa definição para n tensões em uma malha, pois a soma algébrica das tensões em uma malha é igual a zero, conforme definido na Eq. 2.21, com n sendo o número de tensões envolvidas. Essa generalização abarca qualquer arbitragem das tensões feitas na malha, sendo válidas de forma geral (sinais opostos entre a elevação e a queda de tensão nos elementos).

$$\sum_n V_n = 0 \quad (2.21)$$

Para utilizar a Eq. 2.21, é importante convencionar como indicar matematicamente uma queda ou elevação de tensão em uma malha. A malha deve sempre ser percorrida em um único sentido, horário ou anti-horário, e as elevações tem sinais opostos ao das quedas. Recomenda-se sempre usar um padrão para o sentido e o sinal, evitando erros em cálculos. Por exemplo o sentido horário e a elevação tem valor negativo (queda positivo). Caso se deseje ou inverter o sentido ou o sinal, não há violação matemática, pois significa multiplicar por menos um a equação obtida na primeira opção citada.

O Exemplo 4 será utilizado para solidificar o entendimento a respeito das Leis de Kirchoff. Pretende-se obter o número de nós e malhas no circuito mostrado na Figura 2.11, bem como as equações para todos os nós através do uso da LCK e de todas as malhas pela LTK.

Conforme definição, um nó é o ponto de conexão entre dois ou mais ramos ou componentes, podendo identificá-los no circuito fornecido. O primeiro nó, que será nomeado de ‘a’, conecta o polo negativo da fonte de tensão v_s a um dos terminais do resistor R4. O segundo, nó ‘b’, conecta o polo positivo da fonte de tensão v_s a um

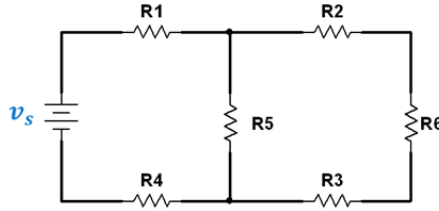


Figura 2.11: Circuito utilizado no Exemplo 4 – emprego da LCK e LTK

dos terminais do resistor R1. O terceiro, nó ‘c’, conecta um dos terminais do resistor R1 aos terminais dos resistores R5 e R2 (três elementos). O quarto, nó ‘d’, conecta um dos terminais do resistor R2 a um dos terminais do resistor R6. O quinto, nó ‘e’, conecta um dos terminais do resistor R6 a um dos terminais do resistor R3. O sexto, nó ‘f’, conecta um dos terminais do resistor R3 aos terminais dos resistores R4 e R5 (três ramos). A representação dos nós no circuito, incluindo a atribuição das correntes e tensões nos componentes, pode ser vista na Figura 2.12. O que se pretende com a arbitragem misturada das tensões, ao invés de usar as que seriam de imediato mais adequadas é mostrar que, independente dessas arbitragens, o resultado está sempre correto quando se aplicam as leis. Por exemplo, a arbitragem de polaridade da tensão v_{R6} é a mesma que a de v_{R5} , já que as correntes nos resistores estarão sempre em queda. Como as correntes foram arbitradas em queda, isso fez i_6 estar contrária a i_2 , sendo que necessariamente é a mesma pelo fato dos elementos estarem em série.

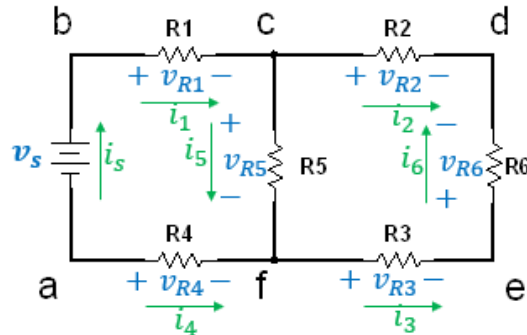


Figura 2.12: Circuito com atribuições de corrente e tensão realizadas

Equacionando a LCK para todos os nós no circuito, considerando que as correntes que saem do nó tem sinal positivo (+) e corrente que chegam em um nó possuem sinal negativo (-), tem-se:

Nó ‘a’: $i_s + i_4 = 0$	Nó ‘d’: $-i_2 - i_6 = 0$
Nó ‘b’: $-i_s + i_1 = 0$	Nó ‘e’: $-i_3 + i_6 = 0$
Nó ‘c’: $-i_1 + i_2 + i_5 = 0$	Nó ‘f’: $-i_4 - i_5 + i_3 = 0$

Conforme definição, a malha é qualquer caminho condutor fechado em um circuito elétrico, composta por dois ou mais ramos. A primeira malha, ‘m1’, é formada por $v_s - R1 - R5 - R4$. A segunda malha, ‘m2’, é definida por $R5 - R2 - R6 - R3$. A terceira malha, ‘m3’, é formada por $v_s - R1 - R2 - R6 - R3 - R4$ (a mais externa). A representação dessas malhas no circuito, com a atribuição das tensões nos componentes pode ser vista na Figura 2.13.

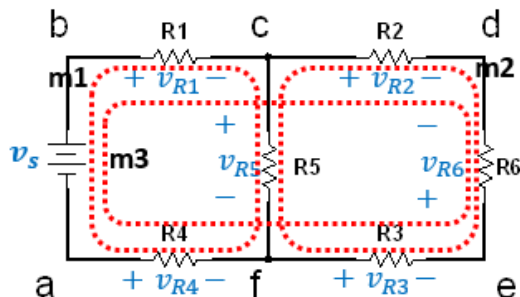


Figura 2.13: Circuito com a representação das malhas

Equacionando a LTK para todas as três malhas do circuito, considerando: a) as atribuições de tensão adotadas, b) o percurso das malhas no sentido horário e c) sinal positivo para queda de tensão e negativa em elevação no sentido percorrido. A seguir, chega-se as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \text{Malha 'm1': } & -v_s + v_{R1} + v_{R5} - v_{R4} = 0 \\ \text{Malha 'm2': } & -v_{R5} + v_{R2} - v_{R6} - v_{R3} = 0 \\ \text{Malha 'm3': } & -v_s + v_{R1} + v_{R2} - v_{R6} - v_{R3} - v_{R4} = 0 \end{aligned}$$

2.1.4 Métodos de simplificação e de análise de circuitos elétricos

As três leis básicas de circuitos elétricos vistas vão nortear todos os conceitos que serão apresentados deste ponto em diante. A partir dessas leis foram desenvolvidos métodos de minimização e análise, empregados na resolução de problemas envolvendo circuitos elétricos complexos. Mas afinal, para que servem esses métodos?

Os métodos de minimização são utilizados para diminuir a complexidade visual e matemática de um circuito elétrico, pois a partir deles é possível transformar um grupo complexo de componentes em um grupo equivalente mais simples que represente o seu funcionamento, onde são mantidos o mesmo comportamento da tensão e corrente em relação ao circuito original. Cada método de minimização apresenta uma vantagem particular. A associação em série ou paralelo de resistores possibilita reduzir um grupo de resistores em um único equivalente, que representa toda a rede simplificada e possibilita o cálculo simplificado de variáveis do circuito. As transformações de circuito entre as topologias Δ e Y e a de fontes possibilitam mudar a topologia de um circuito por uma equivalente, de modo a facilitar sua

resolução. Os circuitos equivalentes de Thévenin e Norton são úteis para observar o comportamento de um elemento em específico em relação ao resto do circuito, que é representado por um modelo equivalente simplificado.

Os métodos de análise são utilizados para determinar os valores das variáveis de um circuito elétrico, como tensão e corrente, em qualquer um de seus ramos ou nós. Tais métodos podem ser aplicados diretamente na topologia original do circuito ou de forma combinada, após o emprego de técnicas de minimização. A análise por divisor de tensão ou divisor de corrente possibilita a obtenção de variáveis em um componente específico do circuito, de forma rápida com uma única expressão. As análises Nodal e de Malhas possibilitam o cálculo de variáveis do circuito por meio de sistemas de equações lineares. Já a análise utilizando superposição permite calcular as variáveis de um circuito elétrico que possui diversas fontes independentes.

A Figura 2.14 apresenta a relação entre as três leis básicas da eletricidade e os métodos de simplificação e análise. Diante de um circuito complexo, existem duas vias principais para a sua resolução. A primeira consiste em aplicar métodos de minimização para reduzir a complexidade da rede antes de utilizar os métodos de análise para obter as grandezas desejadas. A segunda opção é empregar os métodos de análise diretamente na topologia original, uma vez que estas ferramentas são robustas o suficiente para processar circuitos de alta complexidade sem a necessidade de simplificações prévias.

DIAGRAMA DA RELAÇÕES ENTRE AS 3 LEIS E OS MÉTODOS DE MINIMIZAÇÃO E ANÁLISES

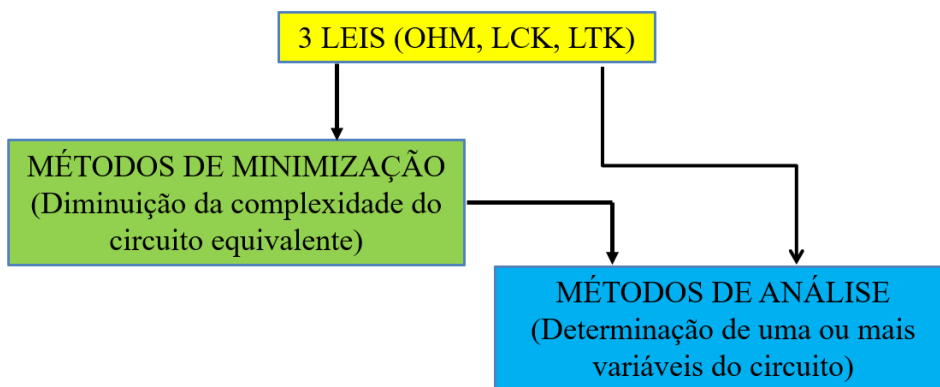


Figura 2.14: Diagrama da relação entre as três leis de circuitos elétricos e os métodos de minimização e análise.

Associação de Resistores

Os resistores podem ser associados de duas formas em um circuito elétrico: em série ou paralelo. Essas configurações possuem suas características próprias de

funcionamento, sendo que ambas têm o mesmo objetivo: encontrar uma resistência que representa a rede simplificada, denominada de equivalente.

Para a demonstração e equacionamento da associação em série de resistores, considere o circuito da Figura 2.15, que mostra uma malha com fonte de tensão V e n resistores ($R_1, R_2, \dots, R_n$) conectados em série.

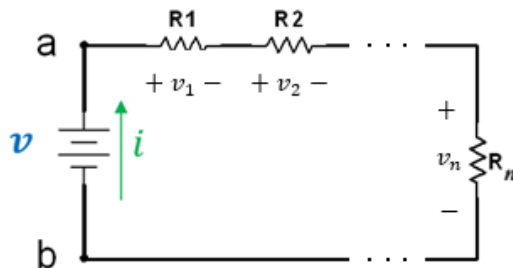


Figura 2.15: Circuito com n resistores em série

Pode-se encontrar a equação da malha aplicando a LTK no circuito, onde a soma das quedas de tensão nos resistores deve ser igual à tensão total da fonte, conforme observado em (1). Obtida a equação da malha, deve-se agora aplicar a Lei de Ohm, onde a tensão em cada resistor é o produto da sua resistência pela corrente que o atravessa ($v_n = R_n \times i$), enquanto a tensão da fonte pode ser representada em termos da resistência equivalente vista pelos terminais dessa fonte e da corrente que ela fornece ($v = R_{eq} \times i$). Substituindo na equação (1), obtêm-se a equação (2). Evidenciando a corrente i na equação (2), chega-se na equação (3), na qual a corrente pode ser cancelada em ambos os lados da igualdade, resultando na expressão da resistência equivalente (R_{eq}), conforme observado na equação (4).

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_n \quad (1)$$

$$R_{eq} \times i = R_1 \times i + R_2 \times i + \dots + R_n \times i \quad (2)$$

$$R_{eq} \times i = i \times (R_1 + R_2 + \dots + R_n) \quad (3)$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (4)$$

As resistências do circuito da Figura 2.15 podem ser representadas por um resistor equivalente (R_{eq}) visto pelos terminais da fonte, como pode observado na Figura 2.16, sendo possível visualizá-la com o valor obtido na formulação (4).

Fazendo a generalização da associação série de resistores, chega-se a Eq. 2.22. Com base nela, pode-se afirmar que a resistência equivalente em série é a soma das resistências individuais envolvidas na associação. Vale ressaltar que, na configuração

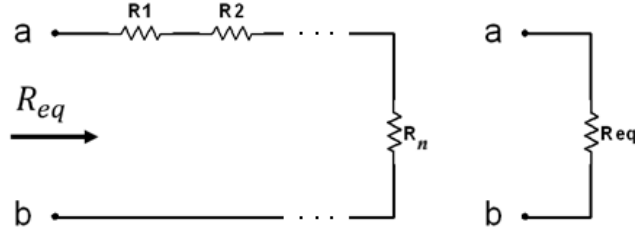


Figura 2.16: Representação da resistência equivalente (R_{eq}) entre os terminais <a, b>

em série, o valor da resistência equivalente será sempre maior do que o maior resistor envolvido na associação.

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i \quad (2.22)$$

Um exemplo pode ser visto na Figura 2.17, onde existem cinco resistores associados em série. O resistor equivalente pode ser obtido realizando a soma das resistências R_1 , R_2 , R_3 , R_4 e R_5 .

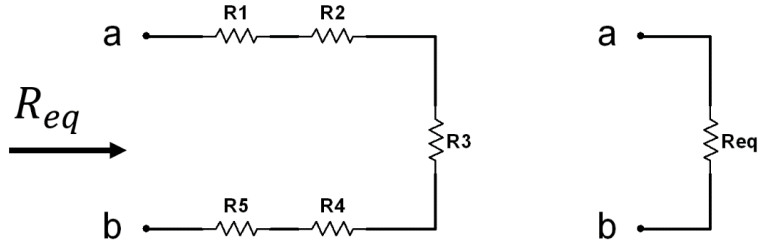


Figura 2.17: Exemplo de circuito envolvendo cinco resistores em série e seu equivalente.

Para o circuito da Figura 2.17, a expressão da resistência equivalente vista pelos terminais ‘a’ e ‘b’ é dada por:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^5 R_i = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5$$

Para a demonstração e equacionamento da associação em paralelo de resistores, considere o circuito da Figura 2.18, que mostra uma fonte de tensão v e ‘n’ resistores ($R_1, R_2, ..., R_n$) conectados em paralelo.

Pode-se aplicar a LCK no circuito ao nó ‘a’, onde a soma das correntes que saem dessa conexão em direção aos resistores deve ser igual a corrente que entra nele, a mesma fornecida pela fonte, conforme observado em (1). Em seguida, deve-se usar a Lei de Ohm, onde a corrente em cada resistor é a razão entre a tensão aplicada em seus terminais e o valor da resistência ($i_n = v/R_n$), enquanto a corrente fornecida pela

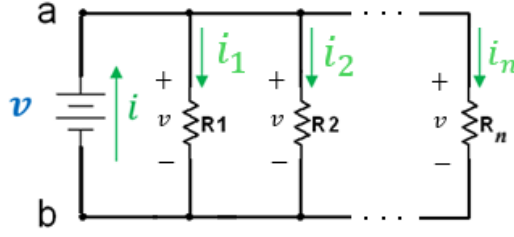


Figura 2.18: Circuito com n resistores em paralelo

fonte pode ser representada em termos da razão entre a tensão em seus terminais e a resistência equivalente vista pelos terminais da fonte ($i = v/R_{eq}$). Substituindo na equação (1), obtém-se a equação (2). Evidenciando a tensão v na equação (2), chega-se na equação (3). Na equação (3), onde a tensão pode ser cancelada em ambos os lados da igualdade, o que resultará na expressão da resistência equivalente (R_{eq}) inversa, conforme observado na equação (4). Para obter a expressão da resistência equivalente, deve-se elevar ambos os lados da equação (4) a potência de menos um, o que resulta na expressão da resistência equivalente presente em (5).

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n \quad (1)$$

$$\frac{v}{R_{eq}} = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} + \dots + \frac{v}{R_n} \quad (2)$$

$$v \cdot \left(\frac{1}{R_{eq}} \right) = v \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) \quad (3)$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (4)$$

$$R_{eq} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right)^{-1} \quad (5)$$

Dessa forma, pode-se generalizar a associação em paralelo de resistores conforme a Eq. 2.23. Com base nela, pode-se afirmar que a resistência equivalente em paralelo é o inverso da soma do inverso das resistências individuais envolvidas na associação. Vale ressaltar que, na configuração em paralelo, o valor da resistência equivalente será sempre menor do que o menor valor do resistor envolvido na associação.

$$R_{eq} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \right)^{-1} \quad (2.23)$$

Um exemplo pode ser visto na Figura 2.19, onde existem dois resistores associados em paralelo. O resistor equivalente pode ser obtido realizando a soma inversa dos inversos das resistências R_1 e R_2 .

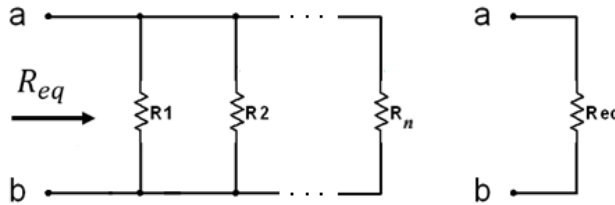


Figura 2.19: Exemplo envolvendo dois resistores em paralelo.

Para o circuito da Figura 2.19, a expressão da resistência equivalente vista pelos terminais ‘a’ e ‘b’ é dada pela formulação (1), cujo desenvolvimento conduz a expressão em (2). O resultado (Eq. 2.24) é a expressão usada para calcular a resistência equivalente em paralelo para dois resistores.

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{R_i} \right)^{-1} \quad (1)$$

$$R_{eq} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} = \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} \right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} \right)} \quad (2)$$

$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.24)$$

Transformação de circuito $\Delta - Y$

A transformação de circuito com topologias Δ em Y (Triângulo – Estrela) ou vice-versa, é uma técnica muito útil para a simplificação de circuitos elétricos. Ela permite converter associações entre resistores que não estão nem em série e/ou em paralelo, facilitando a obtenção da resistência equivalente. Na Figura 2.20 pode-se observar as duas topologias mencionadas, sendo a topologia Δ (Triângulo) destacada na cor vermelha enquanto a topologia Y (Estrela) na cor azul. Essa transformação é bidirecional, ou seja, pode-se realizar a conversão $\Delta - Y$ ou $Y - \Delta$, conforme a necessidade na solução que visa deixar as associações em série e/ou paralelo.

Nessa transformação, a equivalência elétrica entre os circuitos da Figura 2.20 só ocorre se o comportamento elétrico dos terminais ‘a’, ‘b’ e ‘c’ do circuito original for mantido na outra resultante do processo. Para garantir isso, existem equações utilizadas para obtenção dos valores de resistência em cada transformação.

As Eq. 2.25, 2.26 e 2.27 são utilizadas na transformação $\Delta - Y$, onde é necessário calcular os valores de R_1 , R_2 e R_3 com base nos valores de R_a , R_b e R_c . Já a Eq. 2.28

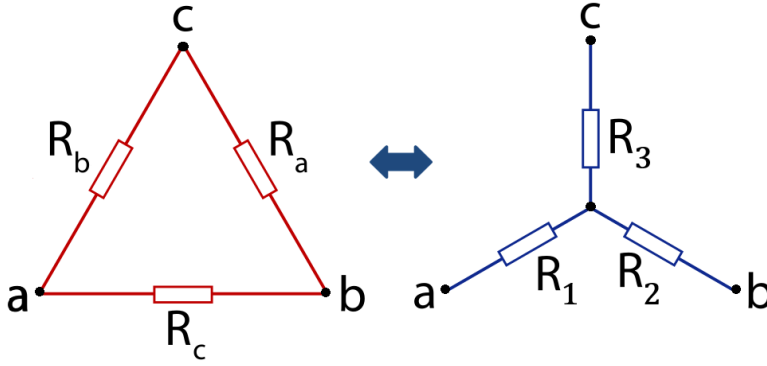


Figura 2.20: Ligações em configurações Δ e Y

é uma forma simplificada que pode ser utilizada caso os três resistores na topologia Δ possuam o mesmo valor ($R_a = R_b = R_c$), o que resultará em três resistores em configuração Y de igual valor ($R_1 = R_2 = R_3$).

$$R_1 = \frac{R_b \cdot R_c}{R_a + R_b + R_c} \quad (2.25)$$

$$R_2 = \frac{R_c \cdot R_a}{R_a + R_b + R_c} \quad (2.26)$$

$$R_3 = \frac{R_a \cdot R_b}{R_a + R_b + R_c} \quad (2.27)$$

$$R_Y = \frac{R_{\Delta}}{3} \quad (2.28)$$

As Eq. 2.29, 2.30 e 2.31 são utilizadas na transformação da topologia Y para Δ , onde é necessário calcular os valores de R_1 , R_2 e R_3 com base nos valores de R_a , R_b e R_c . Já a Eq. 2.32 é uma forma simplificada que pode ser utilizada caso os três resistores em Y possuam o mesmo valor ($R_1 = R_2 = R_3$), o que resultará em três resistores em Δ de igual valor ($R_a = R_b = R_c$).

$$R_a = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1}{R_1} \quad (2.29)$$

$$R_b = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1}{R_2} \quad (2.30)$$

$$R_c = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1}{R_3} \quad (2.31)$$

$$R_{\Delta} = 3 \cdot R_Y \quad (2.32)$$

O exemplo 5 exemplifica a aplicação técnica de transformação entre topologias Y e Δ . O circuito a ter a transformação Δ para Y é mostrado na Figura 2.21, definido pelos nós ‘a’, ‘b’ e ‘c’, onde se deseja obter o valor da corrente fornecida pela fonte de 6 V. Uma advertência quando se deseja saber qual a transformação empregar, no caso de não ser pedida de forma específica, é verificar visualmente o circuito transformado antes dos cálculos, para saber se ela possibilita apenas ter associações série e/ou paralelo. As vezes são necessárias duas ou mais transformações para se conseguir essa condição.

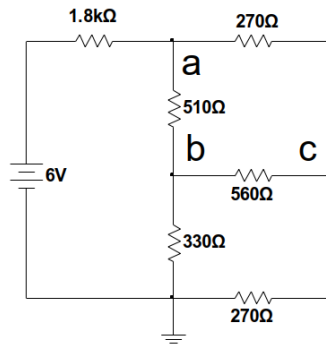


Figura 2.21: Circuito utilizado no exemplo 5, na transformação Δ - Y

Convertendo os resistores conectados em Δ , formado pelos nós ‘a’, ‘b’ e ‘c’ (270 Ω , 510 Ω e 560 Ω) em Y (R_1 , R_2 , R_3):

$$R_1 = \frac{R_b \cdot R_c}{R_a + R_b + R_c} = \frac{270 \cdot 510}{270 + 510 + 560} = \frac{137.700}{1.340} = 102,76 \Omega$$

$$R_2 = \frac{R_c \cdot R_a}{R_a + R_b + R_c} = \frac{560 \cdot 510}{270 + 510 + 560} = \frac{285.600}{1.340} = 213,13 \Omega$$

$$R_3 = \frac{R_a \cdot R_b}{R_a + R_b + R_c} = \frac{560 \cdot 270}{270 + 510 + 560} = \frac{151.200}{1.340} = 112,83 \Omega$$

Redesenhando o circuito da Figura 2.21 após a transformação, tem-se o circuito mostrado na Figura 2.22:

Agora, pode ser calculada a resistência equivalente vista pelos terminais da fonte (o símbolo ‘||’ indica associação em paralelo entre dois ou mais resistores, neste caso são dois):

$$R_{eq} = 1,8 \times 10^3 + 102,76 + ((213,13 + 330) \parallel (112,83 + 270))$$

$$R_{eq} = 1800 + 102,76 + \frac{(213,13 + 330) \times (112,83 + 270)}{(213,13 + 330) + (112,83 + 270)}$$

$$R_{eq} = 1800 + 102,76 + 224,55$$

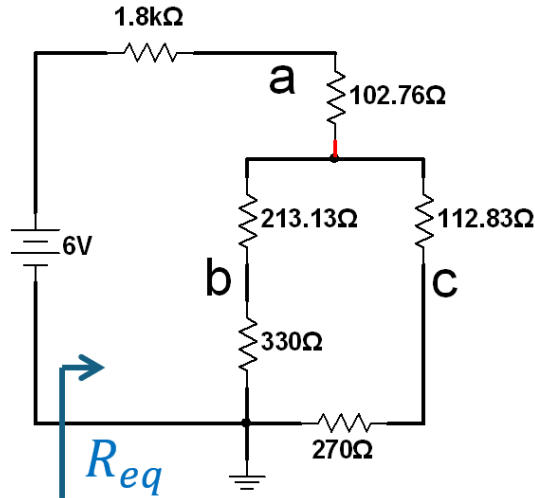


Figura 2.22: Circuito redesenhado

$$R_{eq} = 2127,31\,\Omega \quad \text{ou} \quad R_{eq} = 2,13\,k\Omega$$

A corrente I_f fornecida pela fonte de $6\,V$ é:

$$I_f = \frac{6}{2,13\,k} = 2,82\,mA$$

A comprovação que o circuito manteve as suas características elétricas após a transformação pode ser visualizada na Figura 2.23, com os dois circuitos (original e transformado), mostrando os resultados da simulação com o mesmo valor da corrente fornecida pela fonte ($2,82\,mA$). Isso significa que eles têm a mesma equivalência vista pelos terminais da fonte, comprovando a similaridade tensão-corrente.

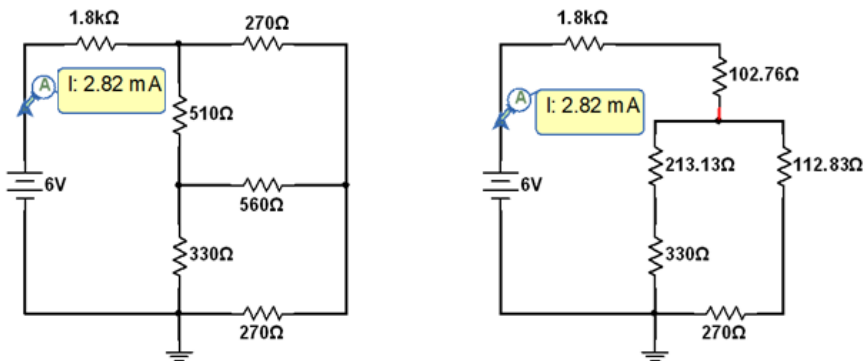


Figura 2.23: Comparação entre o circuito original e transformado

Transformação de fonte

A Transformação de Fontes é uma técnica utilizada para a simplificação de circuitos que permite converter fontes de tensão em fontes de corrente e vice-versa. Basicamente, ela estabelece que uma fonte de tensão em série com um resistor é eletricamente equivalente a uma fonte de corrente em paralelo com esse mesmo resistor, sendo os valores de conversão determinados pela Lei de Ohm.

Imagine um circuito como mostrado na Figura 2.24, onde uma fonte de tensão V_f está conectada em série a um resistor R_x . Podemos representar esse circuito por uma fonte de corrente I_f conectada em paralelo a um resistor R_y . Desse modo, o comportamento elétrico entre os terminais 'a' e 'b' é mantido.

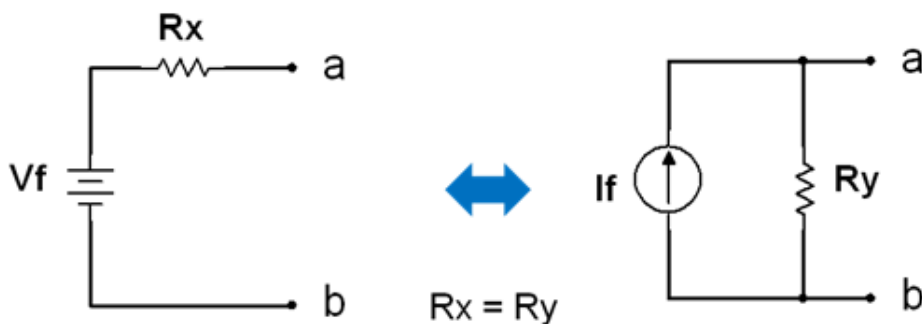


Figura 2.24: Transformação de fontes

É importante notar que a transformação de fontes só é válida para as topologias específicas apresentadas na Figura 2.24. Para transformar uma fonte de tensão em uma fonte de corrente, deve-se utilizar a Eq. 2.33, posicionando o resistor original em paralelo com os terminais da nova fonte. Já para transformar uma fonte de corrente em uma fonte de tensão, aplica-se a Eq. 2.34, conectando o resistor original em série com a nova fonte. A Eq. 2.35 mostra que o valor da resistência permanece inalterado após a transformação, mudando somente a forma de conexão ao circuito. A comprovação da equivalência entre essas topologias só é possível para terminais abertos, ou seja, retira-se uma topologia do circuito, transforme e volta a conectar aos mesmos nós.

$$I_f = \frac{V_f}{R_x} \quad (2.33)$$

$$V_f = I_f \cdot R_y \quad (2.34)$$

$$R_x = R_y \quad (2.35)$$

Existem dois casos especiais que ocorrem em um circuito, que podem ser vistos na Figura 2.25.

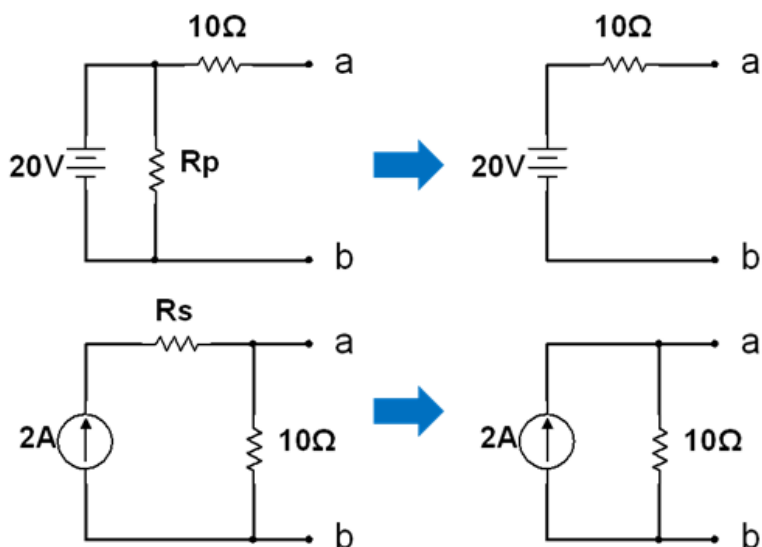


Figura 2.25: Casos especiais de transformação de fontes

Se houver um resistor R_p em paralelo com a fonte de tensão, ele pode ser removido para fins de análise, pois a fonte de tensão impõe seu valor ao nó, independentemente da carga. De forma análoga, caso exista um resistor R_s em série com a fonte de corrente, ele pode ser removido para fins de análise, pois a fonte de corrente impõe seu valor ao ramo, independentemente do valor de resistência. As resistências removidas não impactam nos cálculos de tensão e corrente em outros elementos do circuito, mas são relevantes para o cálculo de potência total dissipada pela fonte.

As regras para fontes independentes também são válidas para fontes dependentes. A transformação de fontes dependentes só não pode ser realizada se a variável de controle da fonte estiver no resistor que precisa ser movido na transformação.

Circuitos equivalentes de Thévenin e Norton

A seguir, serão apresentados os Teoremas de Thévenin e de Norton. Ambos são amplamente utilizados para simplificar circuitos de topologia complexa, representando-os por modelos equivalentes vistos a partir dos terminais 'a' e 'b', conforme ilustra a Figura 2.26.



Figura 2.26: Representação de um circuito com topologia complexa

O teorema de Thévenin, apresentado pelo engenheiro telegrafista francês Léon Charles Thévenin (1857 – 1926) em 1883, afirma que qualquer rede elétrica linear contendo apenas fontes de tensão, fontes de corrente e resistências pode ser substituída nos terminais $\langle a, b \rangle$ por uma combinação equivalente de uma fonte de tensão V_{th} em uma conexão em série com uma resistência R_{th} ¹. Isso implica dizer que circuito com topologia complexa como o mostrado na Figura 2.27 (esquerda) pode ser substituído por um circuito equivalente de Thévenin (direita).

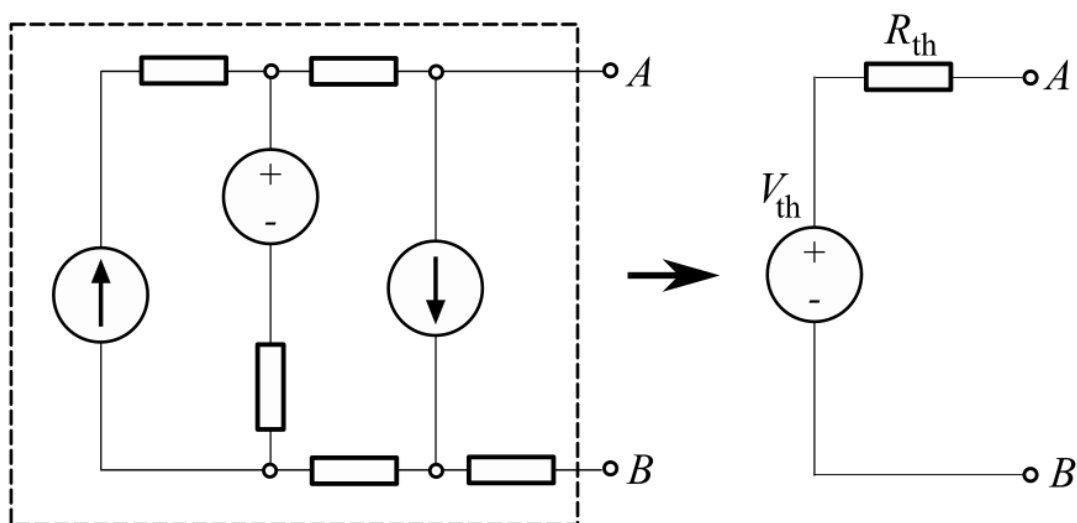


Figura 2.27: Circuito com topologia complexa e seu equivalente de Thévenin simplificado

Para obter o equivalente de Thévenin, é preciso realizar o cálculo de V_{th} e R_{th} . Porém deve-se seguir alguns passos para garantir a correta obtenção do circuito equivalente.

A primeira etapa é identificar e isolar a carga, isto é, demarcar os terminais ‘A’ e ‘B’ e remover o componente objeto de análise (não mostrado no circuito). O componente removido é a carga, que deixa os terminais ‘A’ e ‘B’ em aberto.

O segundo passo é calcular a tensão de Thévenin V_{th} , que é a tensão entre os terminais ‘a’ e ‘b’, quando pode-se utilizar diversas técnicas de análise como divisor de tensão, análise nodal e análise de malhas, revisada mais adiante nesta seção.

O terceiro passo é obter a resistência de Thévenin R_{th} vista pelos terminais ‘A’ e ‘B’. Para calculá-la, deve-se substituir as fontes de tensão independentes por curto-circuito e as fontes de corrente por um circuito aberto, removendo seus efeitos. Para fontes dependentes, não é possível removê-las do circuito, sendo preciso aplicar uma fonte de teste (V_T ou I_T) nos terminais ‘A’ e ‘B’, que possibilita encontrar a resistência vista aplicando a Lei de Ohm. Se uma fonte de tensão de teste for utilizada, a resistência de Thévenin é a tensão de teste dividida pela corrente circulando pela fonte. Se uma fonte de corrente for utilizada, a resistência de Thévenin é a tensão nos terminais da

¹Site: [https://w.wiki/KR\\$C](https://w.wiki/KR$C) (Thévenin's Theorem)

fonte de corrente de teste dividida pela corrente de teste utilizada. Em ambos os casos citados, sempre se busca pela relação algébrica entre tensão e corrente, dispensando o uso de valores para a fonte de teste. Entretanto, existem situações em circuitos que é necessário definir valores para essas fontes, por exemplo $V_T = 1\text{ V}$ ou $I_T = 1\text{ A}$.

No quarto passo, é montado o circuito equivalente de Thévenin, visto na Figura 2.27, que possui uma fonte de tensão V_{th} em série com a resistência de Thévenin R_{th} e com a reconexão não mostrada da carga retirada no primeiro passo entre os terminais 'A' e 'B'.

O teorema de Norton, apresentado pelo engenheiro Edward Lawry Norton (1898 – 1983) em 1926, afirma que qualquer rede elétrica linear contendo apenas fontes de tensão, fontes de corrente e resistências pode ser substituída nos terminais <a, b> por uma combinação equivalente de uma fonte de corrente I_N em uma conexão em paralelo com uma resistência R_N ². Isso implica dizer que circuitos com topologia complexa como o mostrado na Figura 2.26 podem ser substituídos por um circuito equivalente de Norton, mostrado na Figura 2.28.

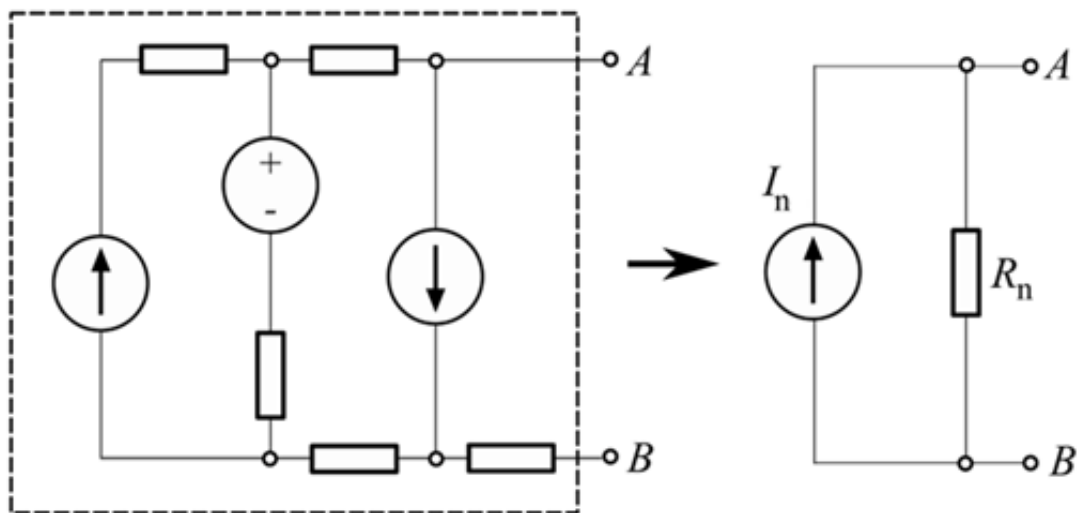


Figura 2.28: Topologia complexa e equivalente de Norton

Para obter o equivalente de Norton, é preciso realizar o cálculo de I_N e R_N . Porém deve-se seguir alguns passos para garantir a correta obtenção do circuito equivalente. Os passos 1, 3 e 4 são análogos aos utilizados para obtenção do equivalente de Thévenin.

O primeiro passo é identificar e isolar a carga, isto é, demarcar os terminais 'A' e 'B' e remover o componente objeto de análise (não mostrado), deixando o circuito original com os terminais 'A' e 'B' em aberto.

O segundo passo é calcular a corrente de Norton I_N , que é a corrente que circula entre os terminais 'A' e 'B' quando estes são colocados em curto-circuito. Para calcular

²<https://w.wiki/KS3L> (Norton's Theorem)

essa corrente, pode-se utilizar diversas técnicas de análise, mencionados para o teorema de Thévenin.

O terceiro passo é obter a resistência de Norton R_N , que é a resistência vista pelos terminais 'A' e 'B' em aberto, sendo idêntico ao mencionado para o teorema de Thévenin para se calcular a resistência R_{th} , incluindo o caso de o circuito conter fontes dependentes.

No quarto passo, é montado o circuito equivalente de Norton, visto na Figura 2.28, que possui uma fonte de corrente I_N em paralelo com a resistência de Norton R_N e com a reconexão da carga (não mostrada) retirada no primeiro passo entre os terminais 'A' e 'B'.

Um ponto interessante é que os equivalentes de Thévenin e Norton são duais, isto é, um pode ser obtido a partir do outro, bastando aplicar a técnica de transformação de fonte, conforme mostrado na Figura 2.29. As Eq. 2.36, 2.37 e 2.38 podem ser utilizadas para realizar essa transformação.

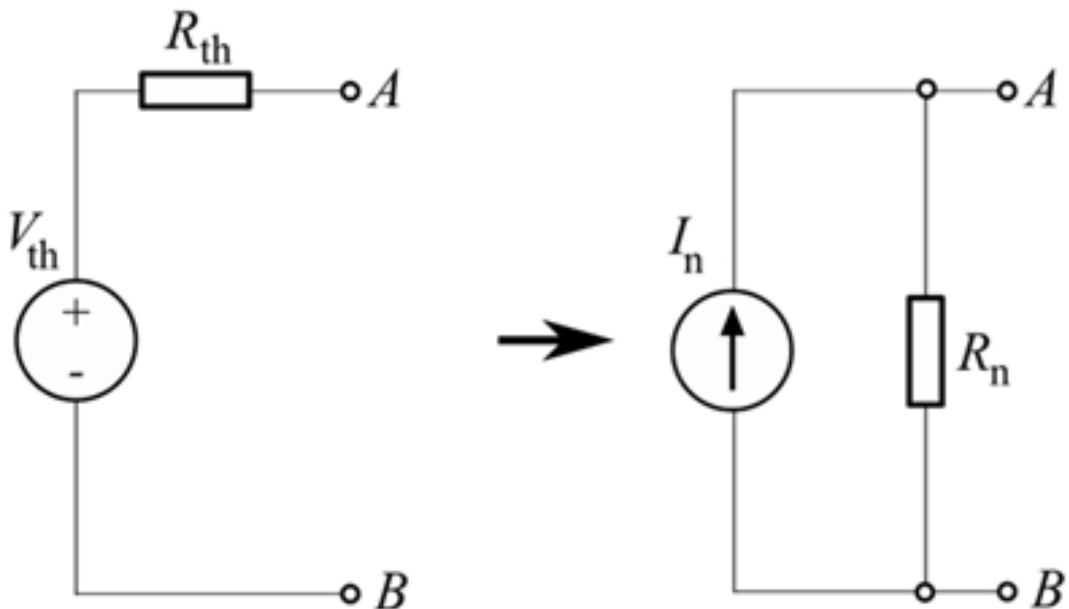


Figura 2.29: Transformação de fontes e os equivalentes de Thévenin e Norton

$$I_N = \frac{V_{th}}{R_{th}} \quad (2.36)$$

$$V_{th} = I_N \cdot R_N \quad (2.37)$$

$$R_N = R_{th} \quad (2.38)$$

O exemplo 6 mostra como se dá a obtenção do equivalente de Norton, considerando o circuito mostrado da Figura 2.30, com relação aos terminais do resistor de $10\text{ k}\Omega$.

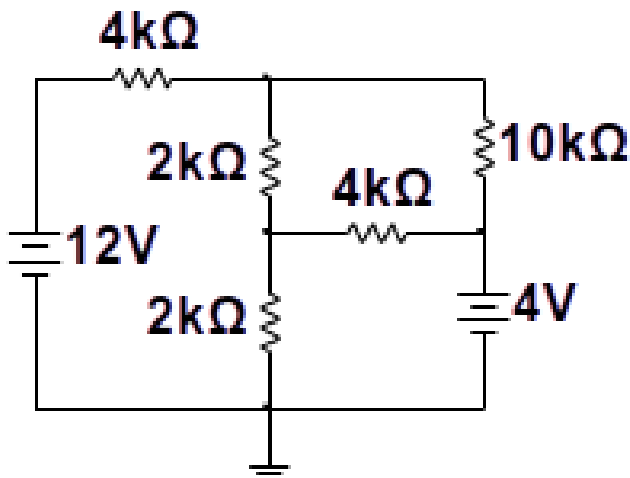


Figura 2.30: Circuito utilizado na obtenção do equivalente de Norton

Para encontrar o circuito equivalente de Norton, é preciso seguir as etapas. O primeiro passo é definir os pontos ‘a’ e ‘b’ no circuito e retirar o resistor de $10\text{ k}\Omega$ do circuito, já que a minimização é pedida pelos seus terminais (ele é a carga que deve ser retirada). No circuito da Figura 2.31 é possível observar o circuito após essa etapa.

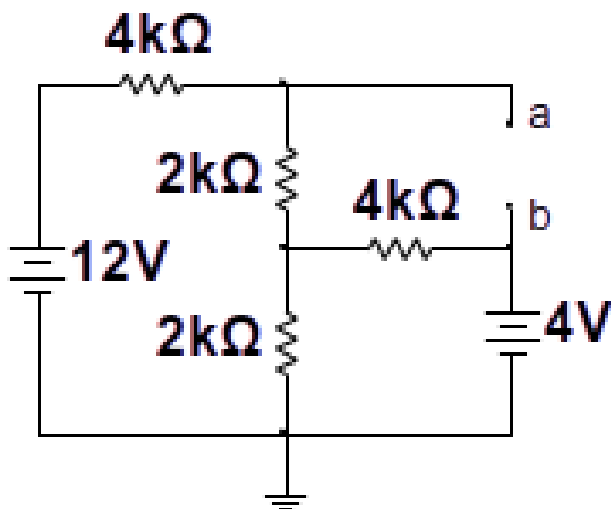


Figura 2.31: Circuito após a realização do Passo 1

Agora, pode-se calcular primeiramente a resistência de Norton R_N , vista pelos terminais ‘a’ e ‘b’. É necessário remover os efeitos das fontes no circuito, no caso a de

tensão de 12 V , que é substituída por um curto em seus terminais, o que resulta no circuito da Figura 2.32.

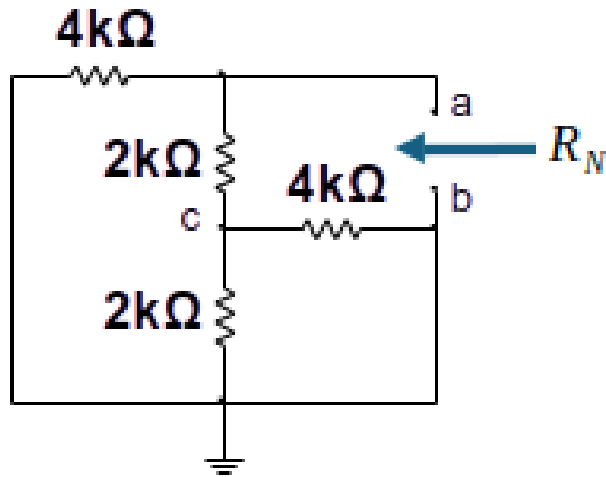


Figura 2.32: Circuito utilizado para o cálculo de R_N

O circuito obtido na etapa anterior teve sua topologia rearranjada, identificando um terceiro nó ('c') para facilitar a obtenção de R_N , conforme circuito da Figura 2.33.

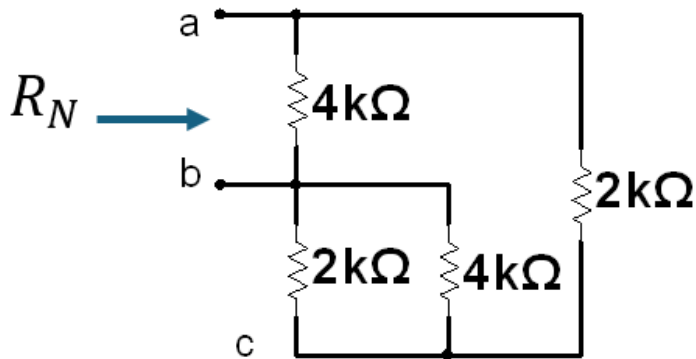


Figura 2.33: Circuito redesenhado para o cálculo de R_N

A resistência vista pelos terminais 'a' e 'b', que é a resistência de Norton R_N , é igual a:

$$R_N = R_{ab} = ((2k\Omega \parallel 4k\Omega) + 2k\Omega) \parallel 4k\Omega = \left(\frac{2k \cdot 4k}{2k + 4k} + 2k \right) \parallel 4k\Omega$$

$$R_N = (1,5k + 2k) \parallel 4k\Omega = \frac{3,5k \cdot 4k}{3,5k + 4k} \Rightarrow R_N = 1,82\text{ k}\Omega$$

Agora é preciso calcular a corrente de Norton e, para isso, os terminais ‘a’ e ‘b’ foram curto-circuitados, como pode ser observado no circuito da Figura 2.34.

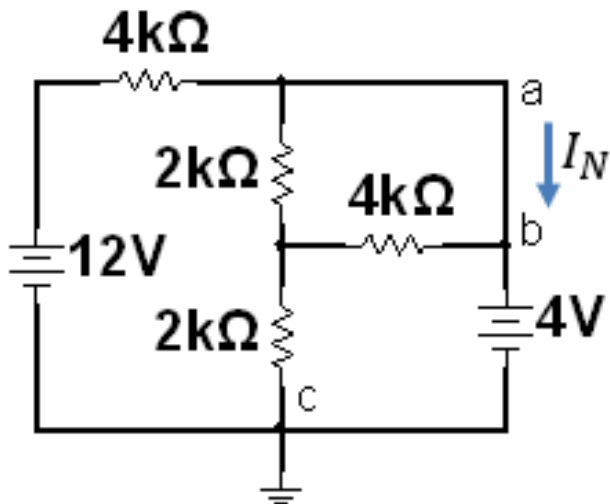


Figura 2.34: Circuito para o cálculo de I_N

O circuito obtido para o cálculo da corrente de Norton possui uma topologia Y entre os terminais ‘a’, ‘b’ e ‘c’ nomeados. Desse modo, é necessário fazer a transformação de Y para Δ para possibilitar os cálculos. No circuito da Figura 2.35 são inseridos os resistores R_a , R_b e R_c , em substituição aos da topologia original Y ($2\text{ k}\Omega$, $4\text{ k}\Omega$ e $2\text{ k}\Omega$) sinalizados como retirados, cujos valores são obtidos pelas Eq. 2.29, 2.30 e 2.31.

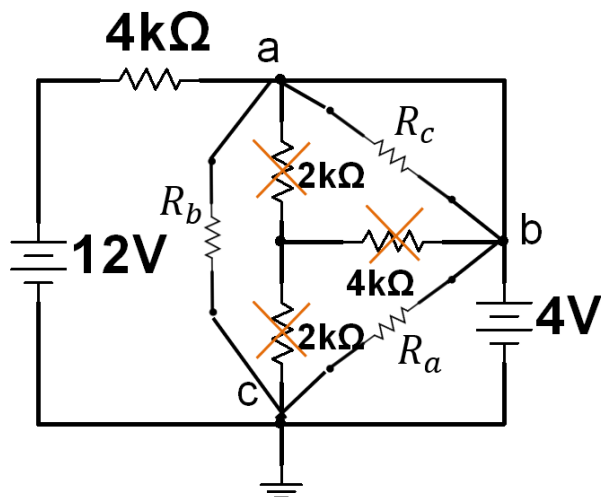


Figura 2.35: Circuito para o cálculo de I_N após transformação Y - Δ

$$R_a = \frac{4k \cdot 2k + 4k \cdot 2k + 2k \cdot 2k}{2k} = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_b = \frac{4k \cdot 2k + 4k \cdot 2k + 2k \cdot 2k}{4k} = 5 \text{ k}\Omega$$

$$R_c = \frac{4k \cdot 2k + 4k \cdot 2k + 2k \cdot 2k}{2k} = 10 \text{ k}\Omega$$

No circuito da transformação (Figura 2.35), é possível observar que o resistor R_c está em paralelo com um curto-circuito. A corrente sempre percorrerá o curto e não haverá circulação de corrente nesse resistor, dessa forma ele pode ser retirado do circuito. O circuito resultante é mostrado na Figura 2.36.

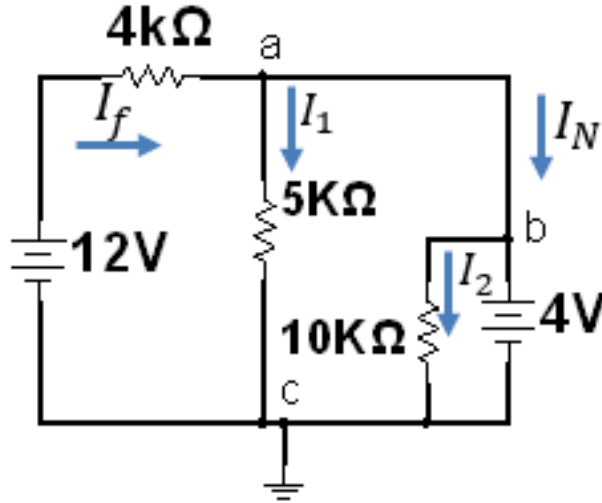


Figura 2.36: Circuito para o cálculo de I_N após transformação Y - Δ e simplificação

Aplicando a LCK ao nó 'a', tem-se:

$$I_f = I_1 + I_N$$

Dessa forma, para encontrar a corrente de Norton, é preciso obter as correntes I_f e I_1 . Pode-se obter a corrente da fonte (I_f) aplicando a Lei de Ohm no resistor em série com a fonte, enquanto a corrente I_1 pode ser obtida aplicando a Lei de Ohm no resistor entre os terminais 'a' e 'c'. Dessa forma, tem-se:

$$I_f = \frac{V_{R_{4k\Omega}}}{R_{4k\Omega}} = \frac{V_f - V_a}{R_{4k\Omega}} = \frac{12 - 4}{4 \text{ k}\Omega} = 2 \text{ mA}$$

$$I_1 = \frac{V_a}{R_{5k\Omega}} = \frac{4}{5 \text{ k}\Omega} = 800 \mu\text{A}$$

De posse dos valores de I_f e I_1 é possível obter a corrente de Norton:

$$I_f = I_1 + I_N \Rightarrow I_N = 2 - 0,4$$

$$I_N = 1,2 \text{ mA}$$

Dessa forma, foi obtido o circuito equivalente de Norton, que pode ser visto na Figura 2.37.

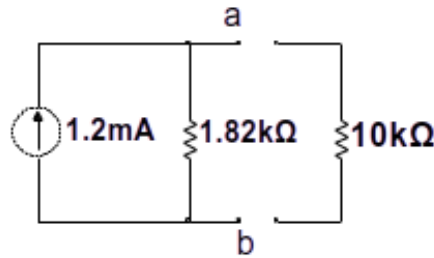


Figura 2.37: Circuito equivalente de Norton obtido

Após a realização dos cálculos foi realizada a simulação no MULTISIM, que pode ser vista nos circuitos e valores dos instrumentos da Figura 2.38, de modo a validar o procedimento realizado. Os resultados obtidos mostram que o circuito equivalente de Norton causa na carga o mesmo efeito que o circuito original, validando a aplicação do circuito equivalente. Além disso, é possível observar os valores da corrente de Norton e da resistência de Norton, que coincidem com os respectivos obtidos nos cálculos.

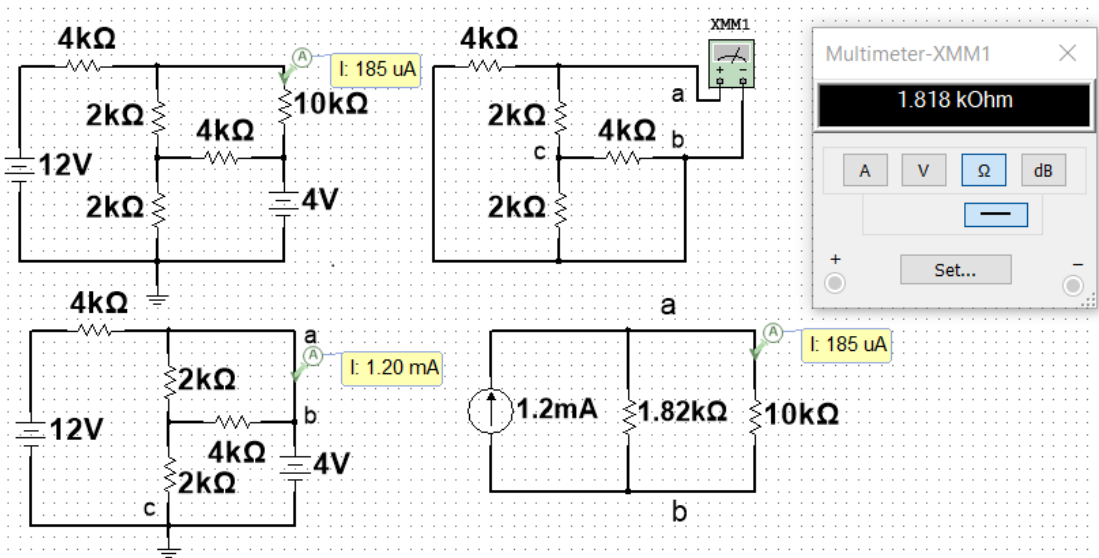


Figura 2.38: Resultado da simulação para o exemplo 6

Divisor de tensão e Divisor de corrente

Os divisores de tensão e de corrente são técnicas de análise muito úteis quando se deseja obter o valor de uma ou mais variáveis de circuito. O divisor de tensão é uma técnica de projeto que a partir de uma tensão de entrada de alimentação do circuito obtém-se o valor de tensão em um componente do divisor que, necessariamente, estão em série. A tensão de entrada pode ser a mesma fornecida por uma fonte ou a calculada em um elemento qualquer do circuito e que alimenta o divisor de tensão. Pode-se observar na Figura 2.39, onde uma tensão de alimentação v_s é utilizada para gerar dois novos níveis de tensão, v_1 e v_2 no circuito simples. Esses novos níveis de tensão dependem do valor das resistências utilizadas. Perceba que todos os elementos do divisor estão em série.

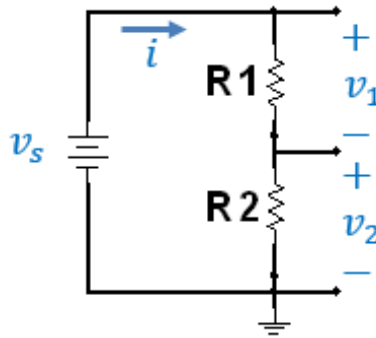


Figura 2.39: Circuito divisor de tensão

Para o circuito da Figura 2.39, podem ser aplicadas as Eq. 2.39 e 2.40. É possível observar que a tensão desejada pode ser calculada, utilizando o valor da tensão da fonte (v_s) e a razão entre a resistência de interesse e a resistência equivalente do circuito. São utilizados nesse processo a LTK e a lei de Ohm, que nesta revisão dispensa demonstração.

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot v_s \quad (2.39)$$

$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot v_s \quad (2.40)$$

Já o divisor de corrente é uma técnica de projeto que divide uma corrente por tantas partes quantas as resistências, sendo que elas estão necessariamente associadas em paralelo. Pode-se visualizar isso na Figura 2.40, onde a corrente da fonte i_s é utilizada para fornecer as correntes i_a e i_b para os resistores. O nível de corrente em cada resistor depende do valor das resistências utilizadas. Ao invés de uma fonte de corrente, o método poderia ser empregado no circuito em casos onde uma corrente que entra em um circuito divisor de corrente deve ser dividida pelos elementos que compõe esse divisor. É bom lembrar que a corrente que entra pelo divisor de corrente deve sair dele com o mesmo valor, considerando o princípio de conservação de energia.

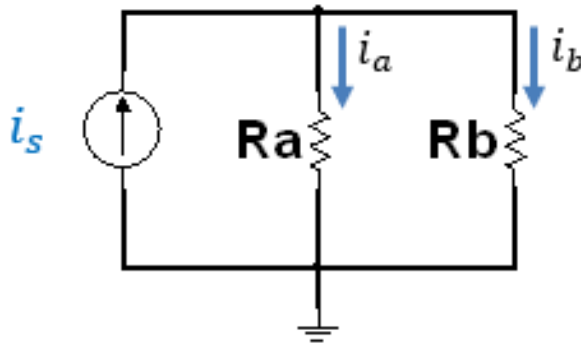


Figura 2.40: Circuito divisor de corrente

Para o circuito da Figura 2.40, podem ser aplicadas as Eq. 2.41 e 2.42. É possível observar que a corrente em um resistor pode ser calculada utilizando o valor da corrente da fonte de entrada do divisor (i_s) e a razão entre a resistência oposta à de interesse e a soma das resistências do circuito. Aqui é dispensada a comprovação, porém foram usadas a LCK e a lei de Ohm para chegar às Eq. 2.41 e 2.42.

$$i_a = \frac{R_b}{R_a + R_b} \cdot i_s \quad (2.41)$$

$$i_b = \frac{R_a}{R_a + R_b} \cdot i_s \quad (2.42)$$

O exemplo 7 mostra o uso das técnicas de divisor de tensão e de corrente no circuito elétrico mostrado na Figura 2.41, onde é pedido para determinar o valor da tensão v no resistor de 500Ω , usando o método do divisor de tensão. Na sequência, é requisitado determinar a corrente i que circula no resistor de $2k\Omega$ mais à direita do circuito, agora empregando o método do divisor de corrente.

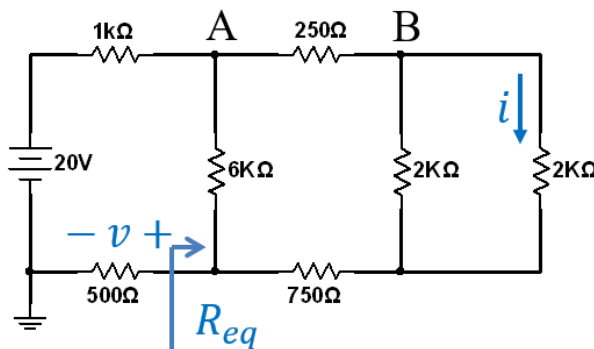


Figura 2.41: Circuito utilizado no exemplo 7

Inicialmente é preciso encontrar a tensão v no resistor de $500\ \Omega$. Essa tensão pode ser obtida aplicando a técnica do divisor de tensão entre o resistor de $500\ \Omega$, o resistor de $1\ \text{k}\Omega$ e a resistência equivalente resultante em série com os resistores mencionados, que é composta pela associação de $6\ \text{k}\Omega$, $250\ \Omega$, $750\ \Omega$, e os dois de $2\ \text{k}\Omega$.

Calcular a resistência equivalente (R_{eq}) indicada no circuito, tem-se:

$$\begin{aligned} R_{eq} &= (0,25\ k + (2\ k \parallel 2\ k) + 0,75\ k) \parallel 6\ k \\ R_{eq} &= \left(0,25\ k + \frac{2\ k \cdot 2\ k}{2\ k + 2\ k} + 0,75\ k \right) \parallel 6\ k \\ R_{eq} &= (0,25\ k + 1\ k + 0,75\ k) \parallel 6\ k \\ R_{eq} &= \frac{2\ k \cdot 6\ k}{2\ k + 6\ k} = 1,5\ k\ \Omega \end{aligned}$$

Com o valor de R_{eq} , é possível aplicar a técnica do divisor de tensão da fonte de $20\ \text{V}$ em série com os resistores $1\ \text{k}\Omega$, R_{eq} , $500\ \Omega$, como pedido, para encontrar a tensão v na polaridade arbitrada.

$$v = \frac{0,5\ k}{0,5\ k + 1,5\ k + 1\ k} \cdot 20 = 3,33\ \text{V}$$

Na sequência é necessário encontrar a corrente i no resistor de $2\ \text{k}\Omega$ indicado na Figura 2.41. Para isso, é necessário primeiramente obter a corrente que chega ao nó ‘A’, que é a mesma que circula no ramo formado pela fonte de tensão de $20\ \text{V}$ e pelos resistores de $500\ \Omega$ e $1\ \text{k}\Omega$, devido a conexão em série entre eles. Aplicando a Lei de Ohm no resistor de $500\ \Omega$, onde a corrente desses ramos é a mesma e a fornecida pela fonte de tensão:

$$i_{500\ \Omega} = i_{1\ \text{k}\Omega} = \frac{v}{500} = \frac{3,33}{500\ \Omega} = 6,67\ \text{mA}$$

Agora pode-se empregar a técnica do divisor de corrente ao nó ‘A’, para obter a corrente no resistor de $250\ \Omega$. Note que o resistor de $6\ \text{k}\Omega$ está em paralelo com a associação série entre os resistores de $250\ \Omega$, $750\ \Omega$ e o equivalente do paralelo dos dois resistores de $2\ \text{k}\Omega$. Dessa forma, tem-se:

$$i_{250\ \Omega} = \frac{6\ k}{6\ k + (0,25\ k + (2\ k \parallel 2\ k) + 0,75\ k)} \cdot 6,67 = 5\ \text{mA}$$

A corrente no resistor de $250\ \Omega$ é a corrente que chega ao nó ‘B’. Calculando a corrente i com o uso da técnica do divisor de corrente, tem-se:

$$i_{2\ k} = i = \frac{2\ k}{2\ k + 2\ k} \cdot 5 = 2,5\ \text{mA}$$

Utilizou-se o MULTISIM para simular o circuito da Figura 2.41 e comparar os resultados das medidas pelos instrumentos com os obtidos nos cálculos para validar as técnicas utilizadas. Na Figura 2.42 é possível observar todas as medidas apresentadas na simulação, tanto com a tensão v no resistor de $500\ \Omega$ e das correntes utilizadas

na obtenção da corrente i nos resistores de $250\ \Omega$ e $2\ k\Omega$. Além disso, é mostrada a medição da resistência equivalente utilizada para o cálculo da tensão v , com o resultado da simulação corroborando o valor obtido no cálculo da mesma.

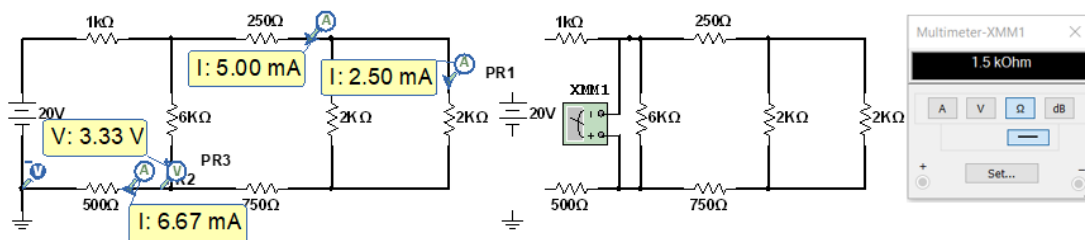


Figura 2.42: Resultado da simulação para o exemplo 7

Análise nodal e Análise de malhas

Análise nodal e Análise de malhas são duas ferramentas poderosas para obter valores de uma ou mais variáveis em um circuito elétrico, pois geralmente não é necessário mudar a topologia do circuito para aplicá-las. Antes de apresentar o conceito dos métodos, é importante definir alguns termos como nós, ramos comuns e essenciais, laços e malhas, com base no circuito da Figura 2.43.

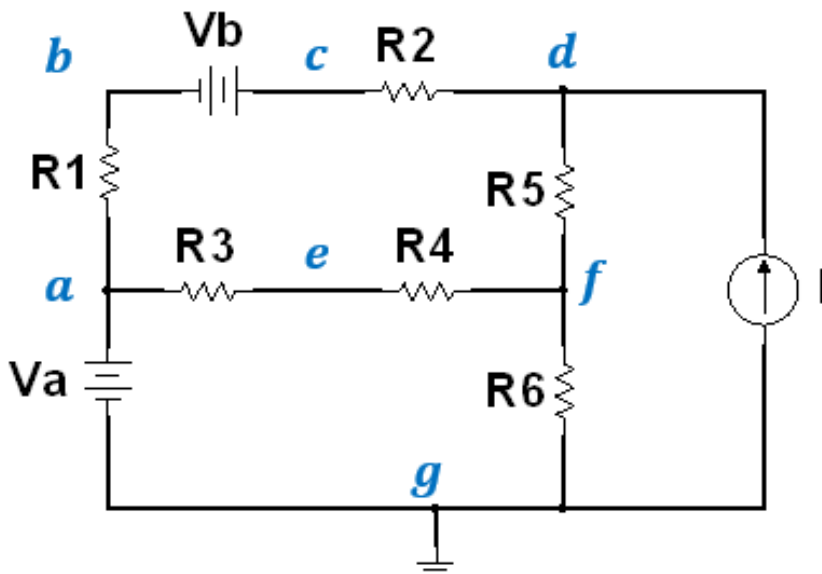


Figura 2.43: Circuito suporte para definição dos termos que compõem a terminologia

Um nó comum n é aquele que conecta dois componentes enquanto o essencial n_e conecta três ou mais. No circuito da Figura 2.43, os nós 'b', 'c' e 'e' são comuns enquanto os nós 'a', 'd', 'f' e 'g' são essenciais. De forma análoga, os ramos comuns b

são os componentes do circuito, como as três fontes (duas de tensão e uma de corrente) e os seis resistores, enquanto os ramos essenciais b_e são aqueles que partem e chegam a um nó essencial sem passar por um nó que seja essencial. No circuito da Figura 2.43, são cinco os ramos essenciais: $R1 - Vb - R2$, $R3 - R4$, Va , $R5$ e $R6$. A fonte I não é computada no valor de b_e como um ramo essencial devido a sua corrente ser conhecida.

A análise nodal, também conhecida como método das tensões de nó, utiliza tensões nos nós como variáveis de circuito. Com este método obtém-se $n_e - 1$ equações, aplicando a LCK a cada nó essencial n_e , exceto o usado como referência para os demais. A análise nodal é essencialmente uma aplicação sistemática da LCK com lei de Ohm para análise de circuitos.

A análise de malhas, também conhecida como método das correntes de malha, utiliza correntes de malha como variáveis de circuito. Com este método obtém-se $b_c - (n_c - 1)$ equações, aplicando LTK a cada malha mínima do circuito, que é laço mínimo que não pode ser quebrado em sublaços. A análise de malhas é essencialmente uma aplicação sistemática da LTK com a lei de Ohm para análise de circuitos.

No exemplo 8 pede-se a utilização do método de tensão de nós para obter as tensões em 'a' e 'b' para o circuito mostrado na Figura 2.44. Esse método de análise, junto ao de correntes de malha e superposição vistos na sequência, são poderosos métodos sistematizados de solução de variáveis de circuitos. Lembrando que nesse método, os nós que necessitam ter os valores de tensão obtidos, devem ser referenciados a um único nó de referência e, dessa forma, as tensões em 'a' e 'b' (arbitragem positiva) devem ser resultado da elevação em relação ao nó de referência ('c'), arbitrado como negativo. Além disso, a escolha da referência normalmente é o nó com maior número de componentes conectados, um ponto de terra (GND) do circuito, ainda que qualquer um deles possam ser empregados nessa escolha.

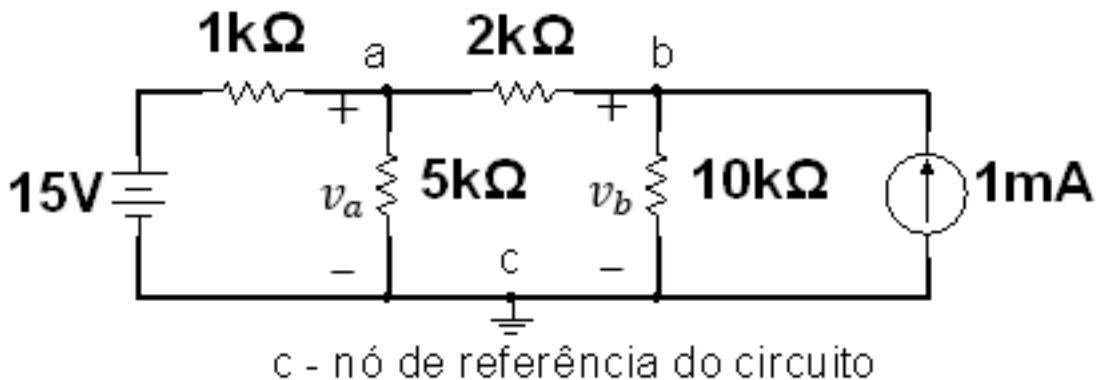


Figura 2.44: Circuito utilizado no exemplo 8

O circuito da Figura 2.44 possui três nós essenciais ('a', 'b', 'c'), devendo-se obter duas equações, uma para o nó 'a' e outra para o nó 'b', já que o nó 'c' é utilizado como nó de referência do circuito, claramente o ponto de terra, sendo seu valor de 0 V.

Para encontrar a equação do nó 'a', emprega-se a LCK. A escolha no sentido da corrente em relação ao nós, se chegando ou saindo, deve ser feita para o adequado equacionamento. Uma sugestão para evitar erros é sempre padronizar os sentidos na solução usando esse método, como considerar todas as correntes saindo do nó como positiva e as chegando como negativa. Além disso, quando deve-se arbitrar as correntes no equacionamento, sugere-se usar saindo e, caso seja uma fonte de corrente (e não resistência), manter seu sentido no circuito original. Dessa forma, no equacionamento para o nó 'a' tem-se:

$$I_{1k\Omega} + I_{5k\Omega} + I_{2k\Omega} = 0 \quad (\text{LCK em 'a'})$$

$$\frac{v_a - 15}{1k} + \frac{v_a}{5k} + \frac{v_a - v_b}{2k} = 0 \quad (\text{Equacionamento para o nó 'a'})$$

Para encontrar a equação do nó 'b', faz-se o procedimento análogo ao anterior, somente que preservando o sentido da fonte de corrente que chega a ele:

$$I_{2k\Omega} + I_{10k\Omega} - 0,001 = 0$$

$$\frac{v_b - v_a}{2k} + \frac{v_b}{10k} - 0,001 = 0 \quad (\text{Nó 'b'})$$

Perceba que em ambos os equacionamentos foi aplicado sistematicamente a LCK e, posteriormente, cada corrente foi substituída pela tensão no elemento dividido pelo seu valor, neste caso resistências, usando a lei de Ohm. Quando o circuito está no regime AC (Unidade 3), o elemento é uma impedância, sendo válidos todos os métodos revisados nesta unidade.

A partir desse ponto, deve-se colocar o sistema de equações na forma matricial para encontrar os valores de v_a e v_b , tendo sido obtido como resultados $v_a = 12,34 \text{ V}$ e $v_b = 11,95 \text{ V}$, conforme cálculo abaixo:

$$\frac{v_a - 15}{1k} + \frac{v_a}{5k} + \frac{v_a - v_b}{2k} = 0 \rightarrow v_a \cdot \left(\frac{1}{1k} + \frac{1}{5k} + \frac{1}{2k} \right) - v_b \cdot \left(\frac{1}{2k} \right) = \frac{15}{1k} \quad (\text{Nó 'a'})$$

$$\frac{v_b - v_a}{2k} + \frac{v_b}{10k} - 0,001 = 0 \rightarrow -v_a \cdot \left(\frac{1}{2k} \right) + v_b \cdot \left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{10k} \right) = 0,001 \quad (\text{Nó 'b'})$$

As equações nodais são:

$$\begin{cases} v_a \left(\frac{1}{1k} + \frac{1}{5k} + \frac{1}{2k} \right) - v_b \left(\frac{1}{2k} \right) = \frac{15}{1k} \\ -v_a \left(\frac{1}{2k} \right) + v_b \left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{10k} \right) = 0,001 \end{cases}$$

Substituindo os valores numéricos ($1k = 1000$, $5k = 5000$, $2k = 2000$, $10k = 10000$):

$$\frac{1}{1k} = 0,001, \quad \frac{1}{5k} = 0,0002, \quad \frac{1}{2k} = 0,0005, \quad \frac{1}{10k} = 0,0001$$

A primeira equação fica:

$$v_a(0,001 + 0,0002 + 0,0005) - v_b(0,0005) = 15 \times 0,001$$

$$v_a(0,0017) - v_b(0,0005) = 0,015$$

A segunda equação fica:

$$-v_a(0,0005) + v_b(0,0005 + 0,0001) = 0,001$$

$$-0,0005v_a + v_b(0,0006) = 0,001$$

Escrevendo na forma matricial $\mathbf{G}\mathbf{v} = \mathbf{i}$:

$$\begin{bmatrix} 0,0017 & -0,0005 \\ -0,0005 & 0,0006 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,015 \\ 0,001 \end{bmatrix}$$

Para resolver, podemos usar, por exemplo, a regra de Cramer.
Determinante da matriz G:

$$\Delta = (0,0017)(0,0006) - (-0,0005)(-0,0005)$$

$$\Delta = 1,02 \times 10^{-6} - 2,5 \times 10^{-7}$$

$$\Delta = 7,7 \times 10^{-7}$$

Cálculo de v_a :

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 0,015 & -0,0005 \\ 0,001 & 0,0006 \end{vmatrix} = (0,015)(0,0006) - (-0,0005)(0,001)$$

$$\Delta_a = 9 \times 10^{-6} + 5 \times 10^{-7}$$

$$\Delta_a = 9,5 \times 10^{-6}$$

$$v_a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{9,5 \times 10^{-6}}{7,7 \times 10^{-7}} = 12,34 \text{ V}$$

Cálculo de v_b :

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 0,0017 & 0,015 \\ -0,0005 & 0,001 \end{vmatrix} = (0,0017)(0,001) - (0,015)(-0,0005)$$

$$\Delta_b = 1,7 \times 10^{-6} + 7,5 \times 10^{-6}$$

$$\Delta_b = 9,2 \times 10^{-6}$$

$$v_b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{9,2 \times 10^{-6}}{7,7 \times 10^{-7}} = 11,95 \text{ V}$$

O circuito foi simulado no programa MULTISIM, onde os resultados obtidos corroboram com os calculados para as tensões dos nós, conforme mostrado na Figura 2.45.

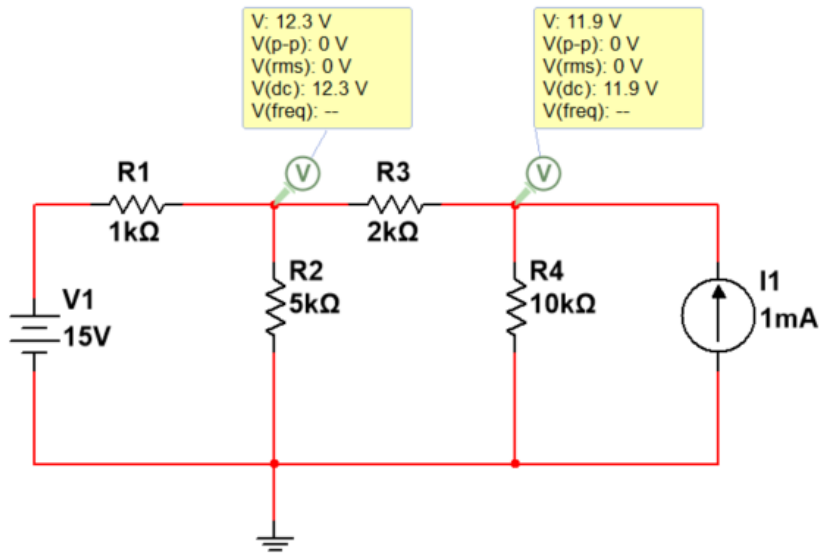


Figura 2.45: Resultado da simulação para o exemplo 8

No exemplo 9 pede-se a utilização do método de correntes de malha para obter os valores de i_1 , i_2 e i_3 nas três malhas do circuito mostrado na Figura 2.46. Lembrando que nesse poderoso método, utiliza-se de laços mínimos (não pode ser quebrado em sublaços, sendo considerado malhas). O número delas pode ser obtido pela equação envolvendo ramos (b_c) e nós (n_c) essenciais, mencionado como $b_c - (n_c - 1)$ ou por visualização do número de malhas. Além disso, esse método não é aplicável a circuitos com cruzamentos de ramos (não planares).

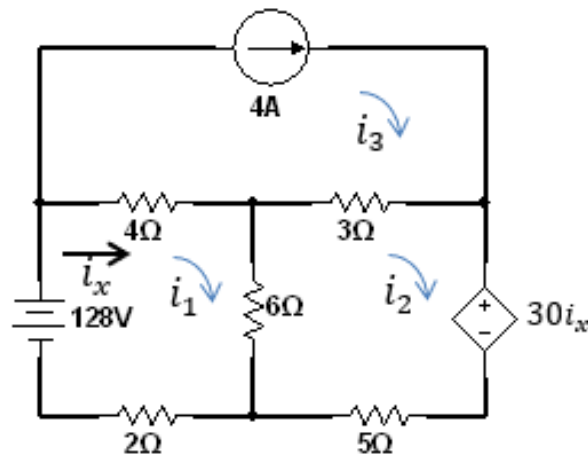


Figura 2.46: Circuito utilizado no exemplo 9

Outro ponto importante é quanto ao sentido das correntes de malhas, que não existem na prática, porém são empregadas para facilitar as reais que são de ramos. Elas ficam restritas à sua malha, facilitando a aplicação sistemática da LTK, como será mostrado na solução. Pode ser arbitrado qualquer sentido de percurso da corrente na malha (horário ou anti-horário) e ser atribuído sinais opostos para elevação e queda de tensão. De forma análoga ao método das tensões de nó, a solução é feita em um sistema de equações lineares.

O circuito possui seis ramos essenciais e quatro nós essenciais, desse modo devem ser obtidas três equações, $(6 - (4 - 1) = 3)$ ou o mesmo número das visualmente percebidas) uma para cada malha presente no circuito. Na questão, foram arbitrados os sentidos horários para i_1 , i_2 e i_3 , e, na solução, será adotada a elevação e queda da tensão com sinal negativo e positivo, respectivamente, quando percorrida pela respectiva corrente na malha.

De início, a corrente de malha i_3 já está definida diretamente pelo valor da fonte de corrente (4 A), a única que passa nessa fonte, situação em que corrente de malha e ramo tem o mesmo valor, ou seja, $i_3 = 4\text{ A}$. Contudo, devido a existência da fonte de tensão $30i_x$, dependente da corrente i_x arbitrada no circuito com de ramo no resistor de 4Ω , é necessário obter a equação que relaciona a variável de controle i_x com as correntes de malha, no caso i_1 e i_3 . Dessa maneira, tem-se:

$$i_x = i_1 - i_3 \quad \Rightarrow \quad i_x = i_1 - 4 \quad (\text{equação da dependência})$$

Perceba que os sinais das correntes de malha na equação acima consideram a resultante arbitrada na corrente i_x , sendo que i_1 tem o mesmo sentido dela e i_3 sentido contrário nas adotadas na solução (horário). Na sequência, deve-se encontrar os valores das correntes de malha i_1 e i_2 . Será atribuído valor positivo a queda de tensão e negativo à elevação, considerando o sentido de percurso da corrente na respectiva malha. Esses sinais também podem ser invertidos, sem invalidação matemática nos equacionamentos, já que significa multiplicar as expressões obtidas por menos 1. As equações dessas malhas são dadas por:

$$-128 + 4(i_1 - 4) + 6(i_1 - i_2) + 2i_1 = 0 \quad (\text{Malha 1})$$

$$30i_x + 5i_2 + 6(i_2 - i_1) + 3(i_2 - 4) = 0 \quad (\text{Malha 2})$$

Perceba que as tensões nas resistências é a aplicação da lei de Ohm, onde a tensão no elemento é o seu valor vezes a resultante da corrente nele. Por exemplo, no resistor de 4Ω , essa resultante no sentido arbitrado de queda (corrente i_x a ser obtida) é $i_1 - 4$ quando equacionando a malha 1, da mesma forma que a resultante no resistor de 6Ω (margeia as malhas 1 e 2) é $6(i_1 - i_2)$ e $6(i_2 - i_1)$ nos equacionamentos das malhas 1 e 2, respectivamente.

Determinadas as equações, é necessário resolver o sistema formado por elas, que pode ser feito substituindo i_x na equação da malha 2 pela equação que relaciona i_x com as correntes de malha, possibilitando um sistema de duas equações que permitem encontrar i_1 e i_2 , conforme cálculo abaixo:

As equações do circuito são:

$$\begin{cases} -128 + 4(i_1 - 4) + 6(i_1 - i_2) + 2i_1 = 0 \\ 30i_x + 5i_2 + 6(i_2 - i_1) + 3(i_2 - 4) = 0 \\ i_x = i_1 - 4 \end{cases}$$

Malha 1:

$$\begin{aligned} -128 + 4i_1 - 16 + 6i_1 - 6i_2 + 2i_1 &= 0 \\ -144 + 12i_1 - 6i_2 &= 0 \\ 12i_1 - 6i_2 &= 144 \quad \Rightarrow \quad 2i_1 - i_2 = 24 \quad (1) \end{aligned}$$

Malha 2 (substituindo i_x):

$$\begin{aligned} 30(i_1 - 4) + 5i_2 + 6(i_2 - i_1) + 3(i_2 - 4) &= 0 \\ 30i_1 - 120 + 5i_2 + 6i_2 - 6i_1 + 3i_2 - 12 &= 0 \\ 24i_1 + 14i_2 - 132 &= 0 \\ 24i_1 + 14i_2 &= 132 \quad \Rightarrow \quad 12i_1 + 7i_2 = 66 \quad (2) \end{aligned}$$

Sistema:

$$\begin{cases} 2i_1 - i_2 = 24 \\ 12i_1 + 7i_2 = 66 \end{cases}$$

Forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 66 \end{bmatrix}$$

Determinante:

$$\Delta = (2)(7) - (-1)(12) = 14 + 12 = 26$$

Cálculo de i_1 :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 24 & -1 \\ 66 & 7 \end{vmatrix} = 168 + 66 = 234 \quad \Rightarrow \quad i_1 = \frac{234}{26} = 9 \text{ A}$$

Cálculo de i_2 :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 24 \\ 12 & 66 \end{vmatrix} = 132 - 288 = -156 \quad \Rightarrow \quad i_2 = \frac{-156}{26} = -6 \text{ A}$$

O resultado obtido do sistema de equações é $i_1 = 9 \text{ A}$ e $i_2 = -6 \text{ A}$. Perceba que o valor de i_2 é negativo, o que não significa que o sentido arbitrado no início da solução foi equivocado. A solução está correta e pode-se afirmar que a corrente de ramo em cada elemento do circuito depende das correntes e sentidos que passam por ele, como mencionado para i_x , da mesma forma que para o resistor de 6Ω é $i_1 - i_2 = 9 - (-6) =$

15 A. Finalizando, o valor da corrente de malha i_1 pode-se substituir na equação utilizada para calcular i_x :

$$i_x = i_1 - 4 = 9 - 4$$

$$i_x = 5 \text{ A}$$

O circuito foi simulado no MULTISIM, onde os resultados obtidos corroboram os cálculos realizados para as correntes de malha e para a corrente i_x , como mostrado na Figura 2.47.

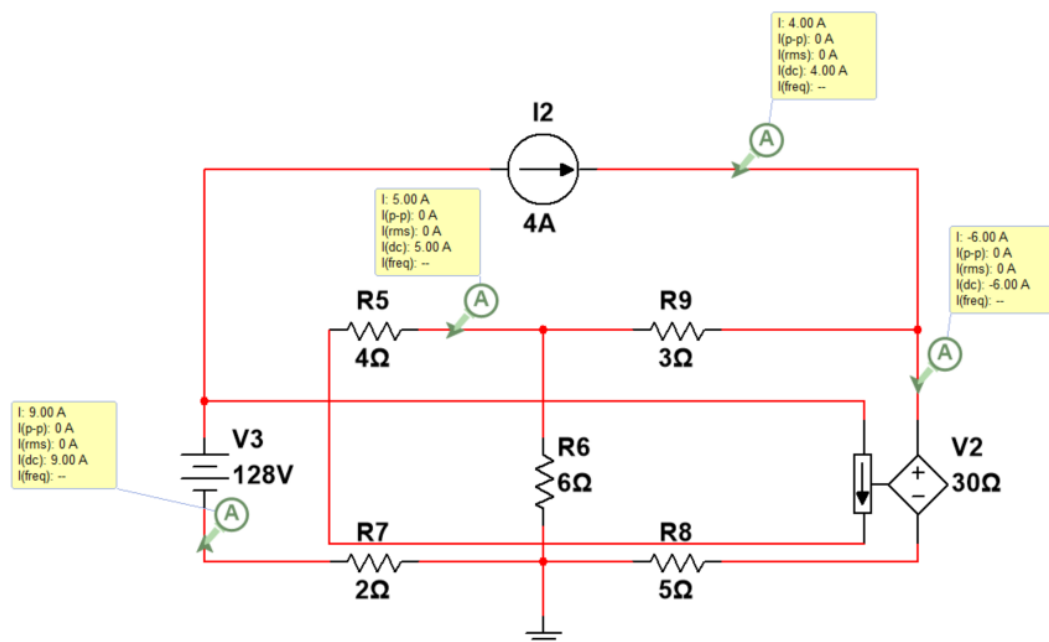


Figura 2.47: Resultado da simulação para o exemplo 9

Princípio da superposição

Princípio da Superposição é um método para analisar circuitos lineares que possuem duas ou mais fontes independentes (sejam elas de tensão ou de corrente). Corresponde à característica de linearidade na contribuição de cada fonte independente no valor final da variável a ser calculada, considerando sempre a atribuição de polaridade no circuito original para a tensão ou sentido para a corrente.

Para calcular a corrente ou tensão em um componente específico, deve-se escolher uma das fontes independentes para manter ativa e remover os efeitos das outras fontes independentes presentes no circuito, substituindo as de tensão por curto-circuito e as de corrente por circuito aberto. Em seguida, deve-se calcular a grandeza desejada

considerando os efeitos da fonte que ficou ativa, repetindo o processo até que as contribuições de todas as fontes tenham sido obtidas. Após isso, deve-se realizar a soma algébrica de todas as contribuições para obter a grandeza de interesse.

É importante destacar que o princípio da superposição não se aplica diretamente à potência elétrica, pois ela é uma relação não linear. O cálculo de potência só pode ser realizado com os valores totais de tensão ou corrente no resistor, nunca somente com as contribuições individuais de cada fonte.

O exemplo 10 é utilizado para mostrar a obtenção de uma corrente em um circuito elétrico, conforme mostrado na Figura 2.48, utilizando o princípio da superposição. A corrente i_o em questão foi arbitrada conforme sentido mostrado pelo resistor de $100\ \Omega$.

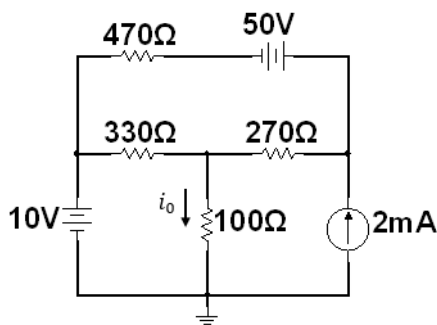


Figura 2.48: Circuito utilizado no exemplo 10

Deve-se calcular essa corrente como a soma das contribuições das fontes de tensão de 10 V (i'_o) e 50 V (i''_o), além da fonte de corrente de 2 mA (i'''_o). No final, as contribuições serão somadas conforme equação a seguir:

$$i_o = i'_o + i''_o + i'''_o$$

Calculando i'_o , que é a contribuição da fonte de 10 V (eliminação das contribuições de 50 V e 2 mA), conforme circuito da Figura 2.49.

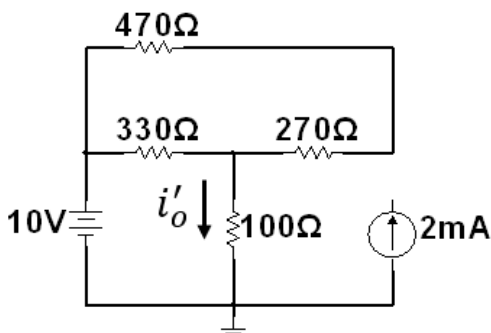


Figura 2.49: Circuito utilizado no cálculo de i'_o

$$i'_o = \frac{10}{R_{eq1}} = \frac{10}{(470 + 270) \parallel 330 + 100} = \frac{10}{328,22} \rightarrow i'_o = 30,46 \text{ mA}$$

Calculando i''_o , que é a contribuição da fonte de 50 V (eliminação das contribuições de 10 V e 2 mA), tem-se o circuito da Figura 2.50.

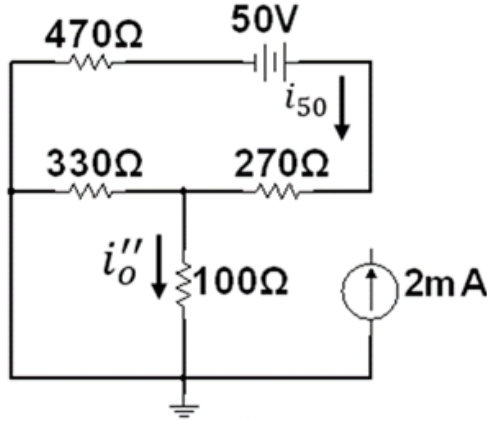


Figura 2.50: Circuito utilizado no cálculo de i''_o

$$i_{50} = \frac{50}{R_{eq2}} = \frac{50}{(330 \parallel 100 + 470 + 270)} = \frac{50}{816,74} \rightarrow i_{50} = 61,22 \text{ mA}$$

$$i''_o = \frac{330}{(330 + 100)} \cdot i_{50} = 0,767 \cdot 61,22 \rightarrow i''_o = 46,98 \text{ mA}$$

Calculando i'''_o , que é a contribuição da fonte de 2 mA (eliminação das contribuições de 10 V e 50 V), obtendo o circuito da Figura 2.51.

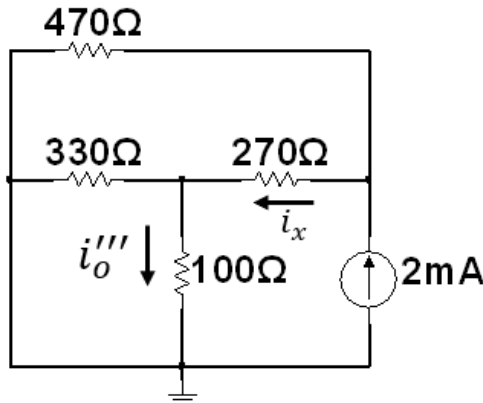


Figura 2.51: Circuito utilizado no cálculo de i'''_o

$$i_x = \frac{470}{(470 + 270 + (330 \parallel 100))} \cdot 2 \text{ mA} \rightarrow i_x = 1,15 \text{ mA}$$

$$i_o''' = \frac{330}{(330 + 100)} i_x = 0,767 \cdot 1,15 \text{ mA} \rightarrow i_o''' = 882,05 \mu\text{A}$$

Finalizados os cálculos para a contribuição de cada fonte, basta somá-las para obter a corrente:

$$i_o = i_o' + i_o'' + i_o''' = (30,46 + 46,98 + 0,88) \text{ mA}$$

$$i_o = 78,32 \text{ mA}$$

Foi realizada a simulação no MULTISIM para visualização dos efeitos de cada fonte e da corrente total com todas elas no circuito original, onde se pode verificar que os valores lidos pelos instrumentos comprovam os calculados, o que pode-se verificar na Figura 2.52.

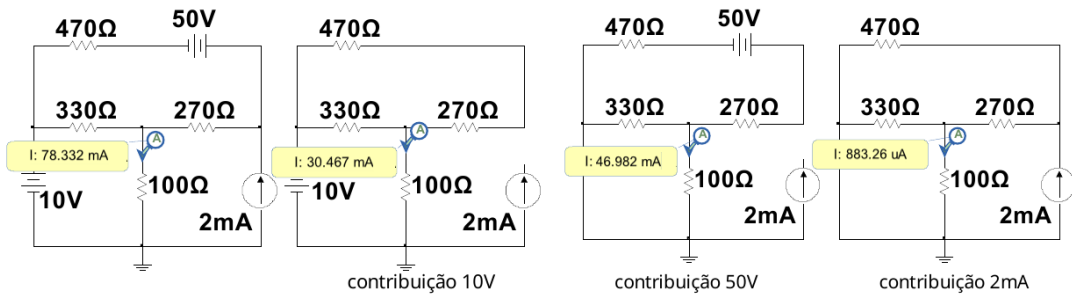


Figura 2.52: Resultado da simulação para o exemplo 10

2.2 REVISÃO TEXTUAL DA UNIDADE 2

A ampliação dos tipos de componentes de circuitos, além das fontes de alimentação de tensão e corrente e dos resistores, abordados na Seção 2.1, compreende a inserção de elementos de armazenadores de energia, que são o indutor na forma magnética e o capacitor na forma elétrica.

2.2.1 Expressões de tensão, corrente, potência e energia nos indutores e capacitores

Como se trata de armazenamentos de energias, diferente do resistor, que dissipa potência na forma de calor, as relações entre as variáveis tensão e corrente em cada elemento (indutor e capacitor) são proporcionais entre si pela variação no tempo em uma das variáveis. Por exemplo, no caso do indutor, que armazena a energia na forma

magnética, a tensão induzida nos terminais deste componente se relaciona a variação do fluxo magnético total no tempo (Lei de Faraday). A Figura 2.53a mostra o fluxo magnético que envolve o enrolamento quando armazena energia juntamente com o seu símbolo elétrico, enquanto a Figura 2.53b apresenta, de forma simplificada, as placas de um capacitor separadas por um dielétrico e carregadas por cargas opostas, proporcionando o armazenamento de energia na forma elétrica.

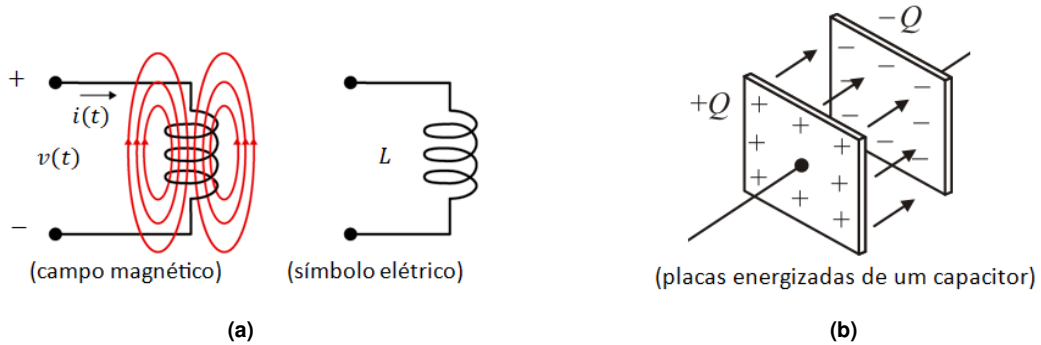


Figura 2.53: (a) Indutor (energia magnética) e (b) Capacitor (energia elétrica)

A Lei de Faraday postula que a tensão induzida nos terminais do componente $v(t)$ (Figura 2.53a) é igual a variação total do fluxo no tempo ($d\lambda/dt$):

$$v(t) = \frac{d\lambda}{dt} \quad (2.43)$$

Desenvolvendo a Eq. 2.43, onde a variação do fluxo total λ é igual à magnitude (ϕ) multiplicada pelo número de espiras N com que é feito o indutor, chega-se a Eq. 2.44. Como a variação da magnitude do fluxo é igual ao Número de espiras vezes a permeância (P) do material envolvido pelo enrolamento vezes a variação da corrente no tempo (di/dt), obtém-se a Eq. 2.45. Após essa demonstração, chega-se à conclusão de que a tensão induzida no tempo é igual ao quadrado do número de espira vezes a permeância do material do núcleo do indutor vezes a variação da corrente no tempo, conforme indicado na Eq. 2.46. A forma de relacionar a tensão induzida à variação de corrente no tempo é através do valor da indutância (L), indicado na Eq. 2.47, onde é demonstrado que esse valor é igual ao quadrado do número de espira vezes a permeância, como mostra a Eq. 2.48.

$$\lambda(t) = \frac{d(N \cdot \phi)}{dt} \quad (2.44)$$

$$\phi(t) = \frac{d(N \cdot P \cdot i(t))}{dt} \quad (2.45)$$

$$v(t) = N^2 \cdot P \cdot \frac{di}{dt} \quad (2.46)$$

$$v(t) = L \cdot \frac{di}{dt} \quad (2.47)$$

$$L = N^2 \cdot P \quad (2.48)$$

A Eq. 2.48 informa como construir um componente para alcançar um determinado valor de indutância que se deseja. Nos cálculos envolvendo circuitos elétricos, como veremos na revisão de transientes de sinais (corrente e/ou tensão) de primeira e segunda ordem, é empregada a Eq. 2.47 que relaciona a tensão induzida nos terminais do indutor com a variação da corrente que circula por ele, mediada pelo valor da indutância. Esse fato baseia-se nas relações envolvendo as duas variáveis de interesse e o desenvolvimento feito das Eq. 2.43 a 2.48, com o propósito de lembrar que a Eq. 2.47 é obtida a partir da lei de Faraday.

O componente capacitor é construído basicamente com duas ou mais placas paralelas, tendo entre cada uma das duas placas um material dielétrico, o qual pode variar tanto relativo ao estado físico da matéria quanto ao tipo de material empregado, apresentando distintas constantes dielétricas. Os detalhes relativos à construção do capacitor não fazem parte dos estudos de Circuitos Elétricos, da mesma forma que os indutores, na medida em que se interessa apenas pelas relações entre tensões e correntes desses elementos, conforme observado para o indutor anteriormente (Eq. 2.43 a 2.48).

De forma análoga ao indutor, o capacitor mantém a relação dessas duas variáveis, onde a corrente de deslocamento no tempo $i(t)$ que carrega ou descarrega o capacitor na forma de campo elétrico é proporcional à variação da tensão em seus terminais no tempo (dv/dt) vezes o valor da capacitância (C), conforme Eq. 2.49.

$$i(t) = C \cdot \frac{dv}{dt} \quad (2.49)$$

Por serem componentes com capacidade de armazenar tipos distintos de energia (magnética e elétrica), as Eq. 2.47 e 2.49 mostram a complementaridade desses elementos de circuito, alternando energia magnética em elétrica e vice-versa. Essa dinâmica determina, inclusive, a possibilidade de ressonância de circuitos contendo indutores e capacitores, chamados de circuitos tanques, que oscilam ininterruptamente no formato senoidal e que foram usados como geradores de sinais de frequência nos primeiros processadores no início da década de 70, sendo logo substituídos por osciladores de cristal de quartzo. Outra aplicação da frequência de ressonância são os circuitos de comunicação. Dessa maneira, a oscilação só é possível na conversão de campo elétrico em magnético e vice-versa. Nas equações de potência e energia vista mais adiante, observa-se também essa complementaridade. No caso do indutor, a potência instantânea armazenada (carregando) ou fornecida (descarregando) no tempo $p(t)$ pode ser dada por até três tipos de equações (Eq. 2.50, 2.51 e 2.52). Para o capacitor, apenas a equação 2.50 é válida e as outras duas (Eqs. 2.53 e 2.54) são complementares.

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \quad (2.50)$$

$$p(t) = L \cdot i(t) \cdot \frac{di}{dt} \quad (2.51)$$

$$p(t) = v(t) \cdot \left[\frac{1}{L} \cdot \int_0^t dv(t) + i(0) \right] \quad (2.52)$$

$$p(t) = C \cdot v(t) \cdot \frac{dv}{dt} \quad (2.53)$$

$$p(t) = i(t) \cdot \left[\frac{1}{C} \cdot \int_0^t di(t) + v(0) \right] \quad (2.54)$$

Alguns esclarecimentos necessitam ser feitos em relação às Eq. 2.51, 2.52, 2.53 e 2.54:

- a) Reforçar a complementaridade das relações das variáveis no cálculo da potência, no indutor usando o valor da indutância (L), da função da corrente $i(t)$ e de sua derivada primeira no tempo (di/dt), enquanto no capacitor é substituído pelo valor da capacitância (C), da função da tensão $v(t)$ e sua derivada primeira (dv/dt). A complementaridade do indutor e capacitor refere-se às Eq. 2.51 e 2.53 ou Eqs. 2.52 e 2.54;
- b) Os termos $i(0)$ e $v(0)$ nas Eq. 2.52 e 2.54 correspondem aos valores iniciais armazenados na forma de corrente no indutor e de tensão no capacitor no início do transiente, respectivamente. O mesmo valor define o limite inferior (tempo zero) da integral contida nessas duas equações. O valor em qualquer tempo t indica que a integral é semi definida, já que a equação da potência é expressa em função do tempo; e
- c) Qualquer uma das três equações citadas pode ser empregada para obter a potência, a depender da grandeza ($v(t)$ ou $i(t)$) disponível.

Para o cálculo das expressões da energia no tempo ($\omega(t)$) armazenada nos indutores (magnética) e capacitores (elétrica)), ambos partem do conceito de que essa grandeza é a quantidade de potência instantânea em um determinado intervalo de tempo, como acontece com qualquer dispositivo elétrico, conforme Eq. 2.55:

$$\omega(t) = \frac{dp}{dt} \quad (2.55)$$

Como exemplo simples, pode-se citar que a energia gasta por um ferro de passar ou um chuveiro elétrico depende de quanto tempo esses aparelhos ficam ligados, sendo diretamente proporcional ao intervalo de tempo para uma mesma potência instantânea.

Dessa forma, pode-se obter a energia armazenada em um determinado instante t , tanto para o indutor (Eq. 2.56) quanto para o capacitor (Eq. 2.57), observando-se novamente a complementaridade, devido aos tipos distintos de energia com que operam.

$$\omega(t) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i(t)^2 \quad (2.56)$$

$$\omega(t) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot v(t)^2 \quad (2.57)$$

Após as definições das variáveis associadas a indutores e capacitores, é necessário falar de uma característica importante desses componentes elétricos, que é relativa ao tipo de campo que estão associados. No caso do indutor que armazena energia na forma magnética, ele é um elemento que se opõe à variação instantânea da corrente, na medida em que o campo magnético deve variar para promover uma alteração no valor da corrente. Esse fenômeno é contínuo. De maneira análoga, o capacitor se opõe à variação instantânea da tensão em seus terminais, pois seu campo elétrico deve variar para alterar a carga armazenada. Essas características estão descritas nas Eq. 2.47 e 2.49 que relacionam as variáveis tensão e corrente nesses componentes. Observe que na Eq. 2.47 a tensão induzida nos terminais do indutor depende da variação da corrente no tempo e na Eq. 2.49 a corrente de deslocamento que circula pelo capacitor depende da variação da tensão no tempo. Essas características manifestadas pelo indutor e capacitor serão fundamentais na avaliação dos transientes de primeira e segunda ordem tratados na sequência.

2.2.2 Transientes de primeira ordem

Como mencionado no parágrafo final da seção anterior, o indutor é um componente elétrico que se opõe a variação instantânea de corrente elétrica que circula por ele e o capacitor à variação instantânea da tensão em seus terminais.

De outra forma, ao iniciar a carga ou a descarga no indutor, a corrente é segurada em seu valor no instante de uma mudança da topologia do circuito por ação de uma ou mais chaves, normalmente transistorizadas. Se não houver a mudança da topologia do circuito, pelo fato dele ser alimentado por fontes DC, os valores estabilizados de tensão e corrente no circuito não variam no tempo. Dessa maneira, não havendo variação de corrente no indutor, a sua derivada no tempo é nula, o que implica na tensão induzida também ser zero, como pode ser obtido pela Eq. 2.47. Como conclusão, o indutor no regime DC é sempre um elemento que pode ser substituído por um curto no circuito em que se encontra.

De forma análoga, pode-se concluir que no regime DC o capacitor por não ter variação de tensão em seus terminais, dado que tem valor fixo e invariante, a corrente de deslocamento é nula como resultado na Eq. 2.49 e, portanto, nessa condição ele é considerado um circuito aberto.

Essas condições que definem, no regime DC, o indutor como um curto e o capacitor como circuito aberto, são fundamentais para a compreensão dos transientes de sinais. No caso de ser de primeira ordem, o circuito é formado com apenas um tipo

de armazenador de energia com um resistor equivalente, proveniente da rede com um ou mais desses componentes em seus terminais, permitindo fazer a carga ou a descarga da energia nessa resistência. Assim, surgem dois tipos de circuitos, o RL (resistor-indutor) e o RC (resistor-capacitor) para produzir esses tipos de transientes de sinais.

Outra condição importante a considerar na análise desses sinais é se ele é de resposta natural ou ao degrau, cuja teoria é revista na sequência.

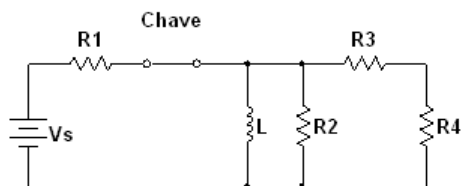
Transientes de primeira ordem para resposta natural

Para a resposta natural, após o transitório do circuito realizado por ação de uma ou mais chaves, a topologia é alterada, fazendo o sinal no tempo seguir do regime DC inicial (regime #1) para o regime final (regime #2), passando pelo período propriamente do transiente, que é sempre exponencial. A Figura 2.54 mostra as possibilidades de circuitos, após a ação de a chave mudar a topologia do circuito e os respectivos gráficos com os transientes de sinais para a resposta natural, no circuito RL (Figura 2.54a) ou RC (Figura 2.54b). Nesse momento será feita a análise dos comportamentos desses transientes, sem mencionar valores mostrados nos gráficos, o que será detalhado mais a frente em exemplos de cálculos das expressões dos mesmos. Além disso, ainda que mencionada a ação da chave em $t = 0$, nos gráficos, esse tempo foi ligeiramente adiantado para demonstrar os valores do regime #1 e a condição da continuidade ou não dos sinais.

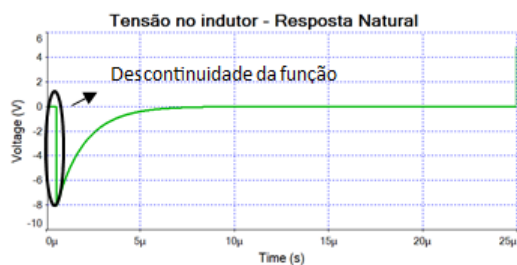
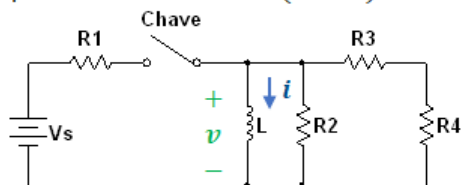
Na Figura 2.54a com o circuito RL, pode-se afirmar que:

- O circuito antes do acionamento da chave, em um tempo arbitrário designado por simplificação em 0, tem todos os elementos presentes, já que a chave se encontra fechada;
- O circuito após a abertura da chave, ou seja, quando o tempo é maior que zero, ficam apenas esse componente com os três resistores conectados aos seus terminais (R_2 , R_3 e R_4), na medida em que a abertura da chave desconecta a fonte de tensão V_s e o resistor R_1 ;
- O regime #1 é definido com a topologia antes da ação da chave no circuito, enquanto o do regime #2 após esse evento, sendo que o período entre sair do regime inicial e alcançar o final definido com o transiente de formato exponencial;
- Nos dois gráficos à direita da Figura 2.54a são plotados os sinais de corrente (azul) e tensão (verde). Percebe-se que o valor da corrente no regime #1 pode ser obtida como a aplicação apenas da lei de Ohm, V_s/R_1 , na medida em que o indutor é substituído por um curto, eliminando a presença dos resistores R_2 , R_3 e R_4 . Após o transiente exponencial, o valor da corrente chega nula ao regime #2, situação que sempre ocorre em respostas naturais (sem elementos forçantes como fontes de tensão e/ou corrente, após a ação da chave).

Antes da abertura da chave em $t = 0$

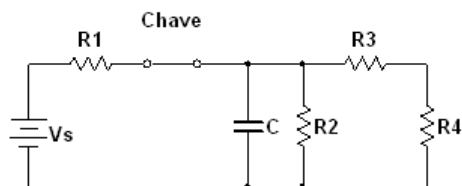


Após a abertura da chave ($t > 0$)

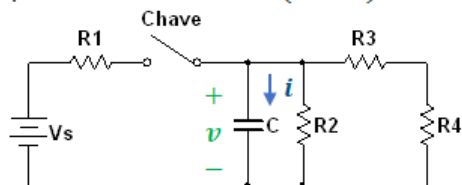


(a)

Antes da abertura da chave em $t = 0$



Após a abertura da chave ($t > 0$)



(b)

Figura 2.54: Transientes de sinais em circuitos de primeira ordem na resposta natural: (a) RL e (b) RC

- e) Como o indutor é um elemento de circuito que segura a variação abrupta da corrente, em outras palavras, ele se opõe a variação da corrente em tempo infinitesimal, essa variável define-se como função contínua no tempo do chaveamento, matematicamente expresso como i , cujo valor é V_s/R_1 , conforme mencionado;
- f) De forma análoga, a tensão nos terminais do indutor no regime #1 é nula, pois esse componente está em curto no regime DC. No instante após o chaveamento t_0 o valor “surta” para $R_{eq} \cdot V_s/R_1$, onde R_{eq} é a resistência equivalente vista pelos terminais do indutor com a chave aberta. Novamente o produto acima é a aplicação da lei de Ohm. Assim, diferente do sinal de corrente no circuito, no instante do chaveamento $t(0)$, pode-se afirmar que existe uma descontinuidade no valor da tensão, que matematicamente informa que $v(0)$ não é definido. Com isso, sempre a tensão nos terminais do indutor no instante do chaveamento é uma função descontínua. Esse fenômeno acarreta importantes considerações sobre dispositivos para evitar problemas de centelhamento, como é o caso dos disjuntores usados para acionar cargas indutivas; e
- g) Ainda com relação à variável tensão, perceba que após ocorrer o transiente e chegar ao regime #2, seu valor torna-se zero pelo mesmo motivo citado para a corrente. Outra maneira de explicar os valores de corrente e tensão no regime #2 serem nulos é que após dissipar toda a energia inicialmente armazenada no indutor (regime #1), ela é dissipada nos resistores R_2, R_3 e R_4 , retirando toda a energia do circuito. A energia inicial no indutor (início do transiente) pode ser obtida pela Eq. 2.56, que no circuito equivale $\frac{1}{2} \cdot L \cdot (V_s/R_1)^2$.

A análise para o circuito RC na Figura 2.54b é análoga ao feito para o RL, apenas lembrando que o indutor e o capacitor são complementares em função do tipo de energia que armazenam. Dessa forma, basta interpretar os transientes de tensão e corrente trocados do circuito RL feito anteriormente.

Entretanto, os valores desses sinais nos tempos de interesse merecem um detalhamento:

- a) Nos regimes DC, tanto o inicial (regime #1) quanto o final (regime #2), o capacitor se comporta como um ramo em aberto, ainda estando presente no circuito, porém não tendo corrente circulando por ele, pois já está carregado ou descarregado. Assim a tensão em $v(0^-) = v(0) = v(0^+)$, que pode ser calculada pelo método de divisor de tensão como $R_{eq} \cdot V_s/(R_{eq} + R_1)$. O valor de R_{eq} é o mesmo obtido no item ‘e’ (aqui as resistências conectadas em paralelo com o capacitor) da interpretação do circuito RL. No regime #2, após passado o período do transiente de formato exponencial, o valor da tensão é nulo, como mencionado.
- b) Com relação ao sinal de corrente, o comportamento é complementar ao da tensão no circuito RL, da mesma forma como ocorreu com a tensão nos

terminais do indutor. Assim, no tempo de chaveamento $t = 0$, devido à descontinuidade do sinal de corrente que “surta”, saindo do valor 0 (circuito aberto) para $V_s/(R_{eq} + R_1)$. Com isso, $i(0^-) = 0$, $i(0)$ não é definida (descontinuidade) e $i(0^+) = v(0^+)/R_{eq}$, sendo esse último valor no tempo após o chaveamento, obtido com o circuito na topologia que envolve o capacitor e os resistores R_2, R_3 e R_4 , que ficaram remanescentes após a abertura da chave. Como a tensão é uma função contínua no capacitor ($v(0^-) = v(0) = v(0^+)$), tem-se que $i(0^+) = V_s/(R_{eq} + R_1)$; e

- c) Devido à complementaridade, a energia armazenada no regime #1 é calculada pela Eq. 2.57, ou seja, $\frac{1}{2} * C * [R_{eq} * V_s/(R_{eq} + R_1)]^2$ no instante do chaveamento e zero no regime #2.

Antes de mencionar matematicamente as expressões no tempo dos sinais de tensão e corrente para ambos os circuitos com resposta natural, é necessário relembrar o conceito da ‘constante de tempo’, simbolizada como τ , que é de mesmo valor para tensão e corrente em uma mesma topologia elétrica. Esse parâmetro informa o quão rápido é o período do transiente, ou seja, sair do regime #1 e alcançar o regime #2. No caso de circuitos RL, sempre é obtido pela Eq. 2.58 e no RC pela Eq. 2.59. Percebe-se que em ambos os circuitos, essa constante só depende dos valores dos componentes.

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (2.58)$$

$$\tau = R \cdot C \quad (2.59)$$

As interpretações feitas para os circuitos RL e RC antes e após a ação da chave e os respectivos comportamentos dos sinais de corrente e tensão, são obtidas matematicamente com as LCK e lei de Ohm para o circuito RL e LTK e lei de Ohm para o RC. A partir do uso dessas leis, que aqui não tem necessidade de comprovação por tratar-se de uma revisão, chega-se às seguintes expressões no tempo para o circuito RL (Eqs. 2.60 a 2.63):

$$i(t) = i(0) \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{para } t \geq 0 \quad (2.60)$$

$$v(t) = v(0^+) \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{para } t > 0 \quad (2.61)$$

$$p(t) = i(t) \cdot v(t) = R_{eq} \cdot (i(0) \cdot e^{-t/\tau})^2 \quad \text{para } t > 0 \quad (2.62)$$

$$\omega(t) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot (i(0) \cdot e^{-t/\tau})^2 \quad \text{para } t \geq 0 \quad (2.63)$$

A validade das expressões acima é sempre para o indutor, a qual pode ou não incluir o tempo do chaveamento, no caso arbitrado como zero. Perceba que a corrente e a energia incluem ($t \geq 0$), ao contrário da tensão e potência ($t > 0$). Esse fato pode

ser explicado em virtude da corrente no indutor ser uma função contínua e a energia depende apenas do quadrado da corrente. Já a tensão é uma função descontínua e, portanto, não é definida no instante do tempo de chaveamento. Como o cálculo da potência envolve o produto com a tensão, ela também não inclui esse tempo, restrição imposta, matematicamente, por essa variável.

Ao resolver as expressões de corrente e tensão em dois instantes extremos, no chaveamento e para um tempo tendendo a infinito, chega-se aos valores mostrados nos gráficos da Figura 2.54a. Lembre-se, ainda que a tensão não é definida para o instante de chaveamento, essa condição idealmente (chaveamento instantâneo) pode empregar o valor em $t = 0^+$ como sendo zero na Eq. 2.61, onde o termo $e^{-t/\tau} = e^0 = 1$. No outro extremo, quando se considera o tempo tendendo ao infinito por simplificação, esse termo pode ser considerado nulo ($e^{-\infty}$), ainda que matematicamente não se anule, tendendo para zero na prática que envolvem os cálculos. Para efeitos de cálculos em circuitos, pode-se dizer que o regime #2 é alcançado em período acima de $5 \cdot \tau$ após o chaveamento, já que $e^{-5} \approx 0$, dispensando o extremo do tempo tendendo ao infinito.

Perceba que entre esses dois testes em valores extremos existe um tempo igual a t_1 , após o acionamento da chave, onde a reta tangente ao sinal a partir do início exponencial do transiente corta o eixo dos tempos, como mostrado em dois gráficos na Figura 2.55, ambos com a mesma constante de tempo nos sinais de corrente (esquerda) e de tensão (direita) em resposta natural. Os referentes ao circuito RC dispensam comentar já que empregam o mesmo conceito. Outra referência importante nos gráficos da Figura 2.55 são as menções explícitas aos regimes #1 e #2, o primeiro citado como R #1 nos gráficos que antecede o tempo de chaveamento e o outro considerado para $t > 5 \cdot \tau$, além do período do transiente entre eles, sempre de formato exponencial.

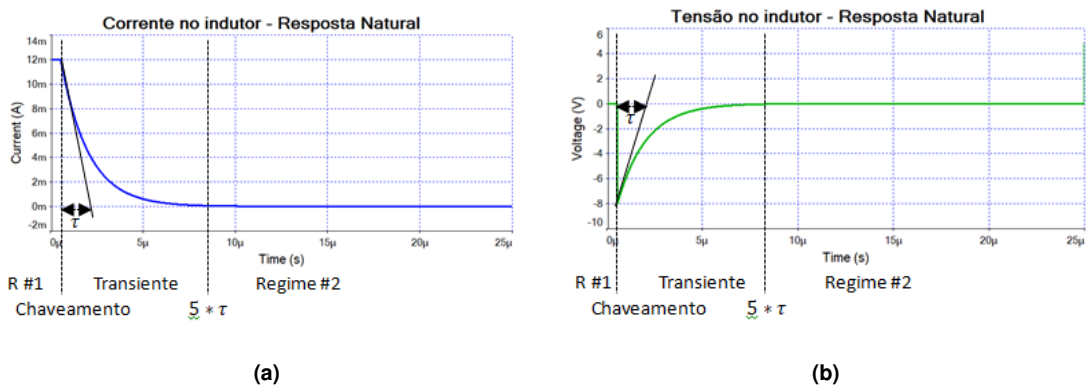


Figura 2.55: Obtenção gráfica da constante de tempo τ no circuito RL: (a) corrente e (b) tensão

Da mesma forma, para o circuito RC as expressões para tensão (Eq. 2.64), corrente (Eq. 2.65), potência (Eq. 2.66) e energia (Eq. 2.67) mostram de forma clara a complementaridade entre os circuitos RL e RC, quando os sinais de tensão e corrente são trocados na definição das expressões:

$$v(t) = v(0) \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{para } t \geq 0 \quad (2.64)$$

$$i(t) = i(0^+) \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{para } t > 0 \quad (2.65)$$

$$p(t) = i(t) \cdot v(t) = \frac{(v(0) \cdot e^{-t/\tau})^2}{R_{eq}} \quad \text{para } t > 0 \quad (2.66)$$

$$\omega(t) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot (v(0) \cdot e^{-t/\tau})^2 \quad \text{para } t \geq 0 \quad (2.67)$$

Para exemplificar e interpretar os cálculos desses transientes de primeira ordem serão apresentados dois circuitos, um RL e outro RC. Suponha o circuito RL mostrado na Figura 2.56a, onde se deseja obter os transientes das correntes nos indutores L1 e L2, no caso arbitrados como i_1 e i_2 , respectivamente. O fato de o circuito possuir dois indutores não influencia na ordem do transiente, já que ambos armazenam energia na forma magnética. Percebe-se que a chave está aberta (regime #1) e, em $t = 500 \text{ ns}$ ($0,5 \mu\text{s}$) ela é acionada, fechando os seus contatos instantaneamente e fazendo ocorrer os transientes até que ambas as correntes alcancem o regime #2 com valores nulos, por ser uma resposta natural (circuito remanescente após a abertura da chave não tem elemento forçante). O tempo de chaveamento arbitrado foi diferente de 0 para melhor visualizar o valor das correntes no Regime #1, tempo anterior a 500 ns , que no caso são $i_1 = 2,90 \text{ mA}$ e $i_2 = 783,65 \mu\text{A}$. Esses e outros valores de interesse que ocorrem, podem ser consultados na tabulação dos dados medidos pelos cursores, contidos em cada gráfico gerado pelo simulador Multisim e mostrados nas Figuras 2.56b e 2.56c nas colunas I(L1) para i_1 e I(L2) para i_2 .

Os valores medidos pelos cursores são obtidos na condição da chave aberta no circuito e com os indutores em curto (regime #1). Assim, antes do acionamento da chave, os cálculos dessas correntes obedecem a sequência abaixo:

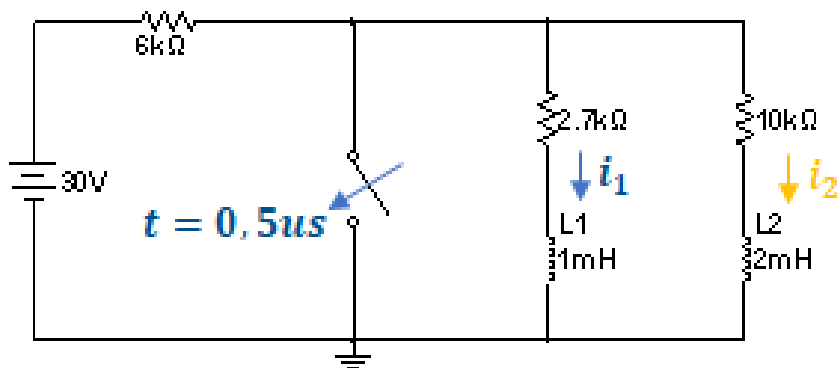
a) O valor da resistência equivalente (R_{eq}) vista pelos terminais da fonte é obtida para se calcular a corrente fornecida (I_f), usando a lei de Ohm:

$$R_{eq} = 6k + (2,7k \parallel 10k) = 8,13k\Omega$$

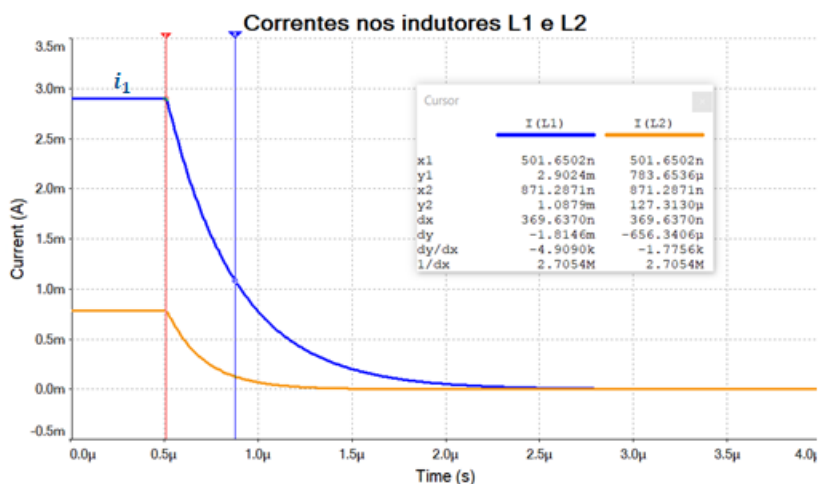
$$I_f = \frac{30V}{8,13k} = 3,69 \text{ mA}$$

b) As correntes $i_1(500 \text{ ns}^-)$ e $i_2(500 \text{ ns}^-)$ são calculadas pelo divisor de corrente no nó onde chega à corrente I_f :

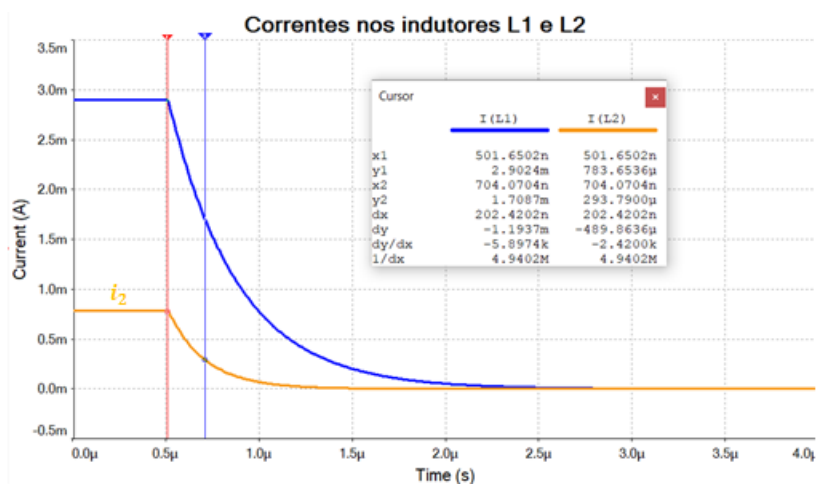
$$i_1(500 \text{ ns}^-) = \frac{10k}{2,7k + 10k} \cdot I_f = \frac{10k}{12,7k} \cdot 3,69 = 0,787 \cdot 3,69 = 2,90 \text{ mA}$$



(a)



(b)



(c)

Figura 2.56: Exemplo de transientes de corrente em circuito RL, contendo dois indutores.

$$i_2(500\text{ns}^-) = \frac{2,7k}{2,7k + 10k} \cdot I_f = \frac{2,7k}{12,7k} \cdot 3,69 = 0,213 \cdot 3,69 = 784,49 \mu\text{A}$$

Após o fechamento da chave em $t = 500 \text{ ns}$, percebe-se nos gráficos os transientes exponenciais das duas correntes, onde devem ser definidos alguns parâmetros para se obter a expressão no tempo dessas variáveis:

- a) Existem dois valores de constantes de tempo τ , em virtude de haver dois circuitos distintos RL, quando o fechamento da chave produz um curto entre os nós superior (ligado a um dos terminais dos resistores de $2,7 \text{ k}\Omega$ e $10 \text{ k}\Omega$) e o inferior (conectado a um dos terminais dos indutores $L1$ e $L2$). Logo, aplicando a Eq. 2.58, tem-se:

$$\tau_1 = \frac{L_1}{2,7 \text{ k}\Omega} = \frac{1 \cdot 10^{-6}}{2,7 \cdot 10^3} = 370,37 \text{ ns}$$

$$\tau_2 = \frac{L_2}{10 \text{ k}\Omega} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 10^3} = 200 \text{ ns}$$

- b) Os valores de τ_1 e τ_2 podem ser consultados nos gráficos das Figuras 2.56b e 2.56c, respectivamente, com os posicionamentos dos dois cursores, um no início do transiente e o segundo após decorrido o tempo de τ de cada circuito. Esses valores podem ser consultados nas medidas da tabela dos cursores de cada gráfico, fazendo a diferença entre os valores do eixo x (tempo), cujo resultado é mostrado no dado dx de cada gráfico na corrente de interesse. Como para ambos os circuitos, o cursor de início (1) está no tempo de chaveamento (500 ns) e o do segundo está na posição de τ , tendo tempos distintos de aproximadamente $870,37 \text{ ns}$ ($500 + \tau_1 = 500 + 370,37$) para a corrente i_1 e 700 ns ($500 + \tau_2 = 500 + 200$) para i_2 .
- c) Após a obtenção dos valores das condições iniciais no regime #1 ($i_1(500 \text{ ns}^-)$ e $i_2(500 \text{ ns}^-)$) e das constantes de tempo de cada circuito, é possível expressar o transiente desses sinais:

$$i_1(t) = i_1(500 \text{ ns}) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} = 2,90 \cdot e^{-\frac{t}{370,37 \text{ ns}}} = 2,90 \cdot e^{-2.700.002t} \text{ mA para } t \geq 500 \text{ ns}$$

$$i_2(t) = i_2(500 \text{ ns}) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}} = 784,49 \cdot e^{-\frac{t}{200 \text{ ns}}} = 784,49 \cdot e^{-5.000.000t} \mu\text{A para } t \geq 500 \text{ ns}$$

- d) Observe que as expressões acima incluem o tempo de chaveamento, na medida em que a corrente é uma variável contínua no indutor, ou seja, $i(500^+) = i(500^-)$. Por simplificação, o valor do expoente no transiente não considera o tempo de 500 ns , pelo motivo já comentado, ficando como $-\frac{t}{\tau}$ e não $-\left(\frac{t-500 \text{ ns}}{\tau}\right)$.

- e) Para testar a validade das expressões dos transientes das correntes, basta aplicar em dois tempos extremos e conhecidos, no início do transiente e quando o tempo tende a infinito. Será feito apenas para a expressão de $i_1(t)$. Uma observação importante é que mesmo com o tempo de chaveamento tendo sido arbitrado para 500 ns no Multisim, para efeitos do teste do transiente utiliza-se o valor 0, na medida em que 500 ns foi empregado no simulador com o objetivo de verificar graficamente os valores das correntes no regime #1. Para $t = 0$, tem-se $i_1(0) = 2,90 \cdot e^{-2.700.002 \cdot 0} = 2,90 \text{ mA}$, o mesmo obtido em $i_1(500 \text{ ns})$. Para $t \rightarrow \infty$, $i_1(t \rightarrow \infty) = 2,90 \cdot e^{-\infty} = 0 \text{ A}$, o valor do regime #2 mostrado nos gráficos.

Transientes de primeira ordem para resposta ao degrau

A resposta ao degrau indica que, após a ação da chave, a parte envolvida com o elemento indutor ou capacitor terá um ou mais elementos forçantes (fontes de tensão e/ou corrente DC), o que faz com que o valor da variável contínua nesses componentes não se anule no regime #2, enquanto a que é descontínua tem o mesmo comportamento da resposta natural.

Essas condições podem ser entendidas pelo comportamento dos componentes no regime DC, no caso, o indutor substituído por um curto e o capacitor por circuito aberto. No caso do indutor, sendo um curto no regime #2, o elemento forçante fará circular uma corrente (função contínua) por ele, ao passo que a tensão (descontínua) é nula devido ao curto. Já para o capacitor, um circuito aberto no regime #2, a tensão (contínua) em seus terminais é mantida pelo elemento forçante, enquanto a corrente (descontínua) é nula, na medida em que ela não mais circula por ser um circuito aberto.

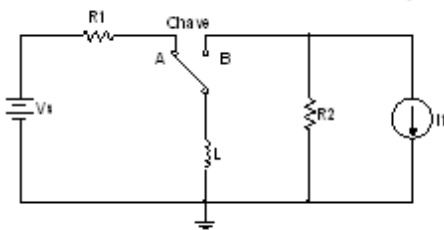
Muitas das considerações feitas para os circuitos RL e RC para resposta natural são válidas para a resposta ao degrau, por não terem relação ao tipo de resposta:

- a) As variáveis corrente e tensão mantém a consideração de serem funções contínuas ou descontínuas, já que estão relacionadas ao tipo de energia que armazenam.
- b) A forma de transientes exponencial também é mantida, na medida em que as equações das variáveis corrente e tensão, além de potência e energia dependem apenas de possível valor forçante em suas expressões. Isso não acarreta modificação na forma do transiente.
- c) As constantes de tempo τ não se alteram, considerando que seus cálculos dependem apenas dos valores dos componentes armazenadores de energia: indutor (Eq. 2.58) e capacitor (Eq. 2.59), além da rede resistiva acoplada nos terminais desses componentes.

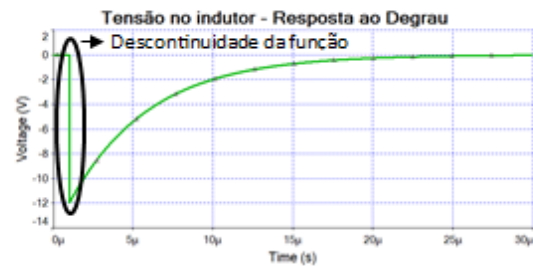
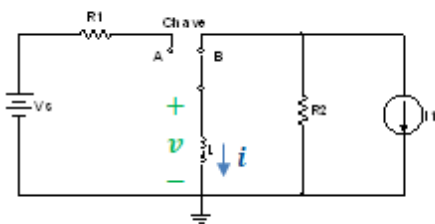
A Figura 2.57 mostra os circuitos RL 2.57a e RC 2.57b para a resposta ao degrau, com os respectivos gráficos para a corrente e tensão gerados em simulação. Duas das considerações que se mantêm inalteradas e foram citadas acima, podem ser observadas nesses gráficos.

A principal diferença entre as respostas natural e ao degrau tem relação com o valor das variáveis contínuas no regime #2, ou seja, são afetados pelos componentes forçantes

Antes da abertura da chave (t em 'A')

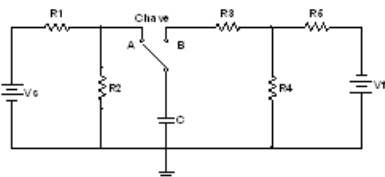


Após a abertura da chave (t em 'B')

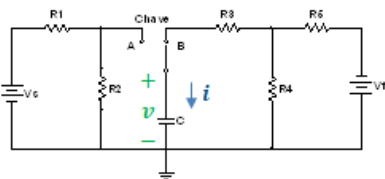


(a)

Antes da abertura da chave (t em 'A')



Após a abertura da chave (t em 'B')



(b)

Figura 2.57: Transientes de sinais em circuitos de primeira ordem na resposta natural: (a) RL e (b) RC

que, no caso do circuito RL (Figura 2.57a) é a fonte de corrente $I1$ e do circuito RC é a fonte de tensão Vf (Figura 2.57b) presentes nos circuitos, após a ação das chaves (movendo da posição ‘A’ para a ‘B’).

Nesse momento não é de interesse falar em valores, apenas focar na interpretação dos transientes no regime #2. Os cálculos de valores e expressões no tempo serão feitos em um exemplo mais adiante.

No circuito RL a variável corrente no regime #2 tem um valor não nulo, enquanto a tensão nos terminais do indutor se anula (curto do indutor). Outro caso importante de ser mencionado é que no gráfico da corrente na Figura 2.57a o seu valor no regime #1, no início do transiente, é positivo e chega ao regime #2 com valor negativo, o que implica:

- a) Que a corrente no indutor, conforme sentido arbitrado no circuito mudar seu sentido de circulação pelo componente, de valor positivo para negativo, indicando que o indutor irá descarregar sua energia no resistor $R2$ e depois se carregar com o sentido da fonte $I1$. Devido a circulação da corrente dessa fonte passar totalmente no indutor no regime #2 no sentido contrário ao arbitrado, quando esse elemento se torna um curto, seu valor será $-I1$. O tempo que separa carga de descarga é onde a corrente é zero, resultando energia zero pela Eq. 2.56.
- b) Nem sempre essa situação de descarga e posterior carga acontecem, sendo específica do layout que permanece após a ação da chave, com é o caso do circuito RL da Figura 2.57a. Podem ocorrer além dessa situação, outras duas, em que a corrente decai para um valor menor (descarga) ou vai para um valor maior (carga), ambas com valores no regime #2 não nulos. Isso implica que a energia no indutor para os três casos mencionados, nesse regime, não é zero. Nesse caso será $\frac{1}{2} * L * (-I1)^2$, onde percebe-se que o quadrado da corrente informa sobre o módulo de seu valor e não se é positivo ou negativo. A energia é sempre positiva.

Essas observações também são válidas para o circuito RC, apenas trocando a variável corrente pela tensão, que nesse outro circuito é uma função contínua. Perceba no gráfico da tensão do circuito RC (Figura 2.57b) que o capacitor, após estar carregado no regime #1, indica um valor positivo pela arbitragem da tensão em seus terminais. No início do transiente descarrega sua energia nos resistores $R3$, $R4$ e $R5$ e depois se carrega através deles até alcançar o regime #2, apresentando valor negativo, devido a polaridade do elemento forçante ser inverso ao do arbitrado para a tensão no capacitor. Novamente, existem três situações de valor de se alcançar no regime #2: descarga e carga no sentido contrário, decaimento para um valor de energia menor (descarga) ou aumento para um valor maior (carga).

Da mesma maneira que as expressões da corrente, tensão, potência e energia no componente feita para a resposta natural, ocorrem na resposta ao degrau, envolvendo a aplicação da LTK e lei de Ohm no caso da corrente no indutor e LCK e Ohm quando for tensão no capacitor. A diferença está na aplicação da LCK e LTK que agora consideram uma ou mais fontes independentes na mudança do layout pelo acionamento

da chave. Aqui também não é de interesse mostrar o desenvolvimento, mas apenas as expressões das variáveis de interesse que são a corrente para o circuito RL (Eq. 2.68) e a tensão para o RC (Eq. 2.69).

$$i(t) = I_f + [i(0) - I_f] \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{para } t \geq 0 \quad (2.68)$$

$$v(t) = V_f + [v(0) - V_f] \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{para } t \geq 0 \quad (2.69)$$

Algumas considerações nas expressões de corrente e tensão para resposta ao degrau:

- a) As variáveis designadas como I_f para corrente e V_f para tensão são os valores finais que cada sinal chega ao regime #2.
- b) A escolha da variável de interesse para obter a expressão vem do fato de ela incorporar o valor final no regime #2 (I_f ou V_f), na medida em que se pode comprovar que é válida nos dois valores de testes de tempo extremos (chaveamento e tendendo a infinito)

$i(0)$ no (regime #1) e $i(t \rightarrow \infty) = I_f$ (regime #2, valor não nulo) – circuito RL

$v(0)$ no (regime #1) e $v(t \rightarrow \infty) = V_f$ (regime #2, valor não nulo) – circuito RC
- c) Para obter a expressão da variável descontínua em cada um dos dois circuitos, basta derivar no tempo a variável contínua, como expresso pelas Eq. 2.47 (indutor) e 2.49 (capacitor).
- d) As expressões no tempo das variáveis contínuas (Eq. 2.68 e 2.69) são consideradas gerais e podem ser usadas para obter qualquer tipo de resposta, natural ou ao degrau. No caso natural os valores no regime #2, I_f e V_f , são nulos, conforme visto anteriormente, reduzindo as Eq. 2.68 e 2.69 para Eq. 2.60 e 2.64, respectivamente.
- e) As constantes de tempo τ de cada circuito independem do tipo de resposta, uma vez que estão em função dos valores da rede resistiva conectada aos terminais do indutor e capacitor, conforme indicado nas Eq. 2.58 e 2.59, respectivamente. É importante lembrar que o valor de τ ocorre quando a reta que tangencia a queda exponencial do transiente corta o regime #2, sendo o valor zero na resposta natural e diferente de zero na resposta ao degrau para as variáveis contínuas.
- f) Como pode haver mais de um resistor e indutor em circuitos RL e de resistor e capacitor em circuitos RC, os termos R , L e C nas Eq. 2.58 e 2.59 são os equivalentes desses componentes no circuito após a ação da chave.
- g) As expressões de potência e energia são obtidas pelo emprego das equações que envolvem corrente e tensão.

Para exemplificar numericamente as expressões dos sinais da corrente e tensão, será usado o um exemplo de circuito RC apresentado na Figura 2.58, que mostra os respectivos gráficos de tensão (variável contínua) e corrente (descontínua), apresentando visualmente o valor de τ , que será comprovado nos cálculos, junto a outras variáveis empregadas nas expressões dos transientes.

A ação da chave na simulação mostrada na Figura 2.58a ocorre em $t = 5\text{ ms}$, quando ela muda instantaneamente da posição ‘A’ para a ‘B’. Dessa forma, o circuito RC no regime #1 (chave na posição ‘A’) permite obter a tensão no capacitor que, por se encontrar carregado, não passa mais corrente (circuito aberto) e equivale a tensão nos terminais do resistor R2. Dessa forma, usando o método do divisor de tensão, tem-se:

$$v(5m^-) = \frac{R2}{R1 + R2} \cdot V1 \Rightarrow v(5m^-) = \frac{20k}{10k + 20k} \cdot 60 = 40\text{ V}$$

Esse valor pode ser observado no gráfico da tensão (Figura 2.58b) no capacitor antes da chave ser acionada. Por ser uma variável contínua, tem-se que $v(5m^-) = v(5m^+) = v(5m)$.

Após o chaveamento, quando a chave S1 é conectada ao terminal B (circuito à direita), o layout que permanece exclui a fonte V1 e os resistores R1 e R2, permanecendo conectados nos terminais do capacitor os resistores R3, R4 e R5, além da fonte de tensão V2. Faz-se necessário obter nessa condição os valores de τ e do valor final (regime #2) da tensão no capacitor para poder expressar seu transiente no tempo. Com o circuito original não fica tão imediato a obtenção dos elementos para os cálculos dessas duas variáveis, o que pode ser resolvido calculando-se o circuito equivalente de Thévenin nos terminais do capacitor, como mostrado e identificado na Figura 2.58a mais abaixo à esquerda.

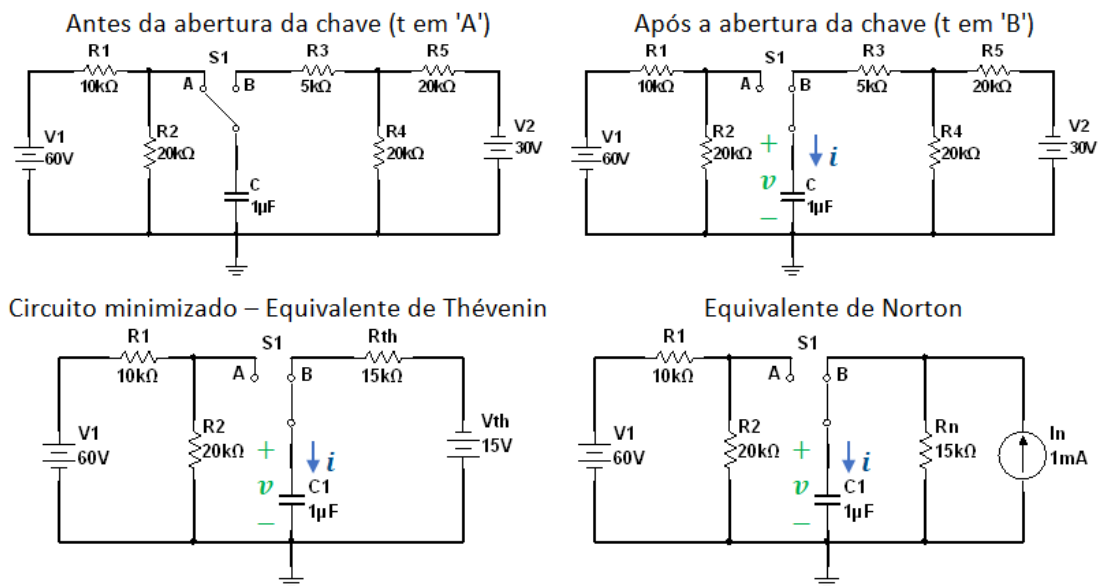
Para se conseguir calcular os valores de V_{th} e R_{th} , retira-se o capacitor e permanece apenas em terminais abertos os valores de R3, R4 e R5, além da fonte de tensão V2. A tensão nos terminais abertos, de onde foi retirado o capacitor, tem seu valor calculado pelo divisor envolvendo R4, R5 e V2:

$$V_{th} = \frac{R4}{R4 + R5} \cdot V2 = \frac{20k}{20k + 20k} \cdot (-30) \Rightarrow V_{th} = -15\text{ V}$$

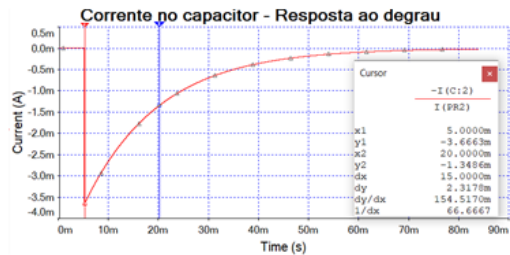
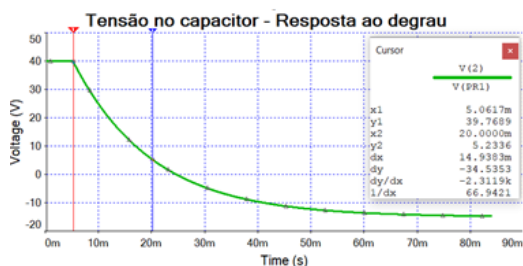
Perceba que o resistor R3 não se encontra na expressão, uma vez que estando os terminais abertos, ele se encontra desconectado do circuito na obtenção da tensão de Thévenin, o que faz com que esse valor nos terminais do capacitor seja o mesmo que o do resistor R4 no divisor de tensão. O valor da tensão da fonte V2 é -30 V , pois o nó superior está em queda em relação à referência (terra), considerando a polaridade de V2 no circuito. No regime #2 a tensão é igual a V_{th} .

Para o cálculo da resistência de Thévenin (R_{th}) com terminais em aberto, deve-se retirar o efeito da fonte de tensão V2, que equivale a trocá-la por um curto. Nessa condição, a resistência equivalente vista a partir dos terminais abertos é a associação paralela entre R4 e R5 que fica em série com R3.

$$R_{th} = R3 + \frac{R4 \cdot R5}{R4 + R5} = 5k + \frac{20k \cdot 20k}{20k + 20k} \Rightarrow R_{th} = 15\text{ k}\Omega$$



(a)



(b)

Figura 2.58: Transientes de sinais em circuitos de primeira ordem na resposta ao degrau: (a) circuitos RC antes e após o chaveamento e (b) gráficos tensão e corrente no capacitor

Nesse ponto dos cálculos ficou fácil definir a tensão final V_f (regime #2), na medida em que nessa condição o capacitor se encontra carregado e abre o circuito, ficando com toda a tensão V_{th} . No gráfico da tensão se pode comprovar esse valor, quando o transiente praticamente está finalizado.

A definição do valor da constante τ pode ser obtida a partir do circuito minimizado com o equivalente de Thévenin.

$$\tau = R_{th} \cdot C = 15k \cdot 1\mu F \Rightarrow \tau = 15 \text{ ms}$$

Por fim, chega-se à expressão do transiente do sinal da tensão.

$$v(t) = V_f + [v(0) - V_f] \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$v(t) = -15 + [40 - (-15)] \cdot e^{-\frac{t}{15 \times 10^{-3}}}$$

$$v(t) = -15 + 55 \cdot e^{-66,67t} \text{ V para } t \geq 5 \text{ ms}$$

Outra informação que pode ser confirmada no gráfico da tensão é que o regime #2 é alcançado aproximadamente em 80 ms ($5 \text{ ms} + 5 \cdot \tau = 5 \text{ ms} + 5 \cdot 15 \text{ ms} = 5 \text{ ms} + 75 \text{ ms}$).

Para a definição da expressão do transiente da corrente no capacitor para o sentido arbitrado, basta usar a Eq. 2.49 que relaciona a corrente de deslocamento no capacitor com a variação da tensão no tempo.

$$i(t) = C \cdot \frac{dv}{dt} = 1 \times 10^{-6} \cdot \frac{d(-15 + 55 \cdot e^{-66,67t})}{dt} = 1 \times 10^{-6} \cdot 55 \cdot (-66,67) \cdot e^{-66,67t}$$

$$i(t) = -3,66e^{-66,67t} \text{ mA para } t \geq 5 \text{ ms}$$

Para comprovar a validade da expressão do transiente da corrente, faz-se os testes nos extremos do tempo igual a 0 e tendendo a infinito. Lembre-se da advertência que foi usado o tempo de chaveamento no simulador de 5 ms por questões didáticas, para poder ser observado o valor do regime #1, antes da ação da chave, como nos demais casos já apresentados. Para a correta expressões desses transientes o valor do expoente da função exponencial deveria ser $(t - t_{ch})/\tau$, onde t_{ch} é o tempo de chaveamento e a validade do transiente para $t \geq t_{ch}$.

Nessa seção sempre foram usados o valor 0, ou seja $-0/\tau$ e não os tempos simulados e apresentados nos gráficos. Para efeitos práticos, pode-se usar o tempo de chaveamento arbitrado em 0, de forma que no primeiro teste, o termo $e^{-\frac{t}{\tau}} = e^0$, tem como resultado o valor 1. Assim tem-se:

$$i(0^+) = -3,66 \cdot e^0 = -3,66 \cdot 1 = -3,66 \text{ mA}$$

Esse valor pode ser comprovado no cursor mais à esquerda, posicionado no tempo de chaveamento e que registrou na tabela dos cursores o valor de $-3,6663 \text{ mA}$, mostrando a descontinuidade indo de 0 para esse valor. Para o tempo tendendo ao infinito a função

exponencial vai para 0 de forma assintótica, ainda que matematicamente, nunca seja zero.

Os mesmos testes podem ser feitos com o transiente da tensão, e os valores encontrados podem ser observados no respectivo gráfico.

$$\text{Para } t = 0, v(0) = -15 + 55 \cdot e^0 = -15 + 55 = 40 \text{ V}$$

$$\text{Para } t \rightarrow \infty, v(t \rightarrow \infty) = -15 + 55 \cdot e^{-\infty} = -15 \text{ V}$$

Com relação às expressões da energia armazenadas em ambos os regimes, pode-se dizer que são diferentes de zero neste circuito, diferente da resposta natural quando ela é nula sempre no regime #2, seja para indutor quanto para capacitor, já que não existe elemento forçante e toda a energia inicial é dissipada na carga resistiva conectada a esses componentes. Na resposta ao degrau, tem-se as energias armazenadas no capacitor para $t = 0$ e $t \rightarrow \infty$.

$$\text{Para } t = 0, \omega(0) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot (v(0))^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot (40)^2 = 800 \mu\text{J}$$

$$\text{Para } t \rightarrow \infty, \omega(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot (v(t \rightarrow \infty))^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot (-15)^2 = 112,50 \mu\text{J}$$

Por fim, perceba que na Figura 2.58 no circuito em que o equivalente de Thévenin foi substituído pelo de Norton, é possível definir o valor inicial da corrente (contrária ao sentido arbitrado), logo após o chaveamento. Pela LTK no nó superior (polaridade positiva da tensão no capacitor) ela é a soma da corrente que desce pelo resistor R_n mais a corrente de Norton de 1 mA, confirmando o valor calculado:

$$i(0^+) = - \left(\frac{v}{R_n} + 1 \right) = - \left(\frac{40}{15k} + 1 \right) = -3,66 \text{ mA}$$

Interpretação de transiente de primeira ordem sem acesso ao circuito

Para transientes de primeira e segunda ordem é possível inferir algumas informações apenas observando os formatos na forma gráfica. Isso será feito aqui, utilizando-se de alguns gráficos. Na Figura 2.59 tem-se dois gráficos de transientes, onde não foi mencionada a variável (tensão ou corrente).

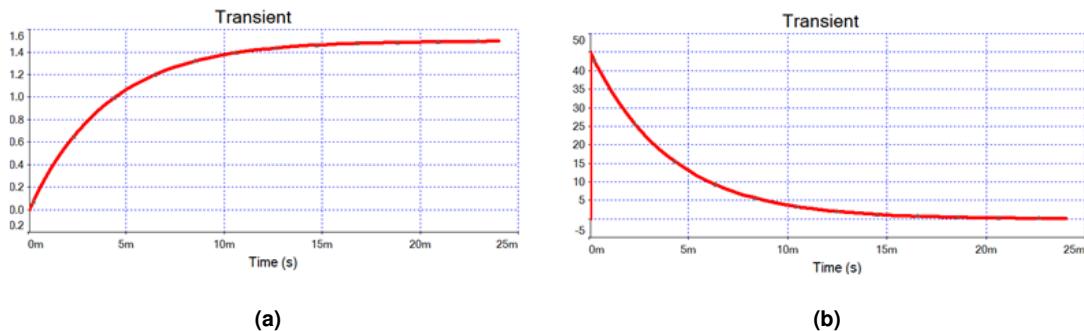


Figura 2.59: Inferência de informações sobre circuitos de primeira ordem usando apenas gráficos (caso 1)

Podemos afirmar no gráfico da Figura 2.59a que:

- a) A função é contínua, pois o valor de regime #2 é diferente de zero (resposta ao degrau), além de ter no chaveamento a condição $x(0^-) = x(0) = x(0^+)$, onde a variável x pode ser corrente no circuito RL (circulando por L) ou tensão no circuito RC (terminais do capacitor).
- b) O valor inicial é zero e, portanto, pode ser:

- O valor da corrente no indutor inicialmente descarregado ($\omega(0) = 0$) e que vai para o regime #2 com uma corrente forçante de valor 1,5, carregando-o com uma energia

$$\omega(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot 1,5^2$$

ou

- O valor da tensão no capacitor inicialmente descarregado e que vai para o regime #2 com uma tensão forçante 1,5, carregando-o com uma energia

$$\omega(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot 1,5^2$$

Com relação ao gráfico da Figura 2.59b, pode-se inferir que:

- a) A função é descontínua (valor de regime #2 nulo) no tempo de chaveamento zero. No regime #1, antes da ação da chave, o valor da variável é 0 e no tempo após o chaveamento ele chega a aproximadamente 45, onde se percebe uma reta quase vertical em vermelho (“surto” do sinal). O transiente, logo que transcorrido, chega ao regime #2 com valor 0, descarregado totalmente o componente $\omega(t \rightarrow \infty) = 0$, podendo ser o valor da corrente no capacitor ou valor da tensão no indutor.
- b) Nada se pode afirmar sobre o tipo de resposta do transiente, uma vez que se for ao degrau, será a tensão no indutor ou a corrente no capacitor (função descontínua). Para a resposta natural, pode ser tanto circuito com indutor quanto com capacitor.

A Figura 2.60 mostra os dois próximos gráficos (caso 2) para fazer inferências, sendo que na imagem (a):

- a) A função é contínua no tempo de chaveamento de 500 ms ou 0,5 s, tendo valor inicial de 20. A resposta no transiente é necessariamente ao degrau (valor de regime #2 não nulo, aproximadamente 8). Na condição de variável contínua, pode ser:
- O valor da corrente no indutor (circuito RL) inicialmente carregado ($\omega(0) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot 20^2$) e que vai para o regime #2 com uma corrente forçante de 8, não alterando o sentido arbitrado, apenas descarregando um pouco da condição inicial para um valor de energia $\omega(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot (8)^2$; ou

- O valor da tensão no capacitor (circuito RC) inicialmente carregado ($\omega(0) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot 20^2$) e que vai para o regime #2 com uma tensão forçante de 8, não alterando a polaridade arbitrada, ficando com uma carga menor que a inicial de $\omega(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot (8)^2$.

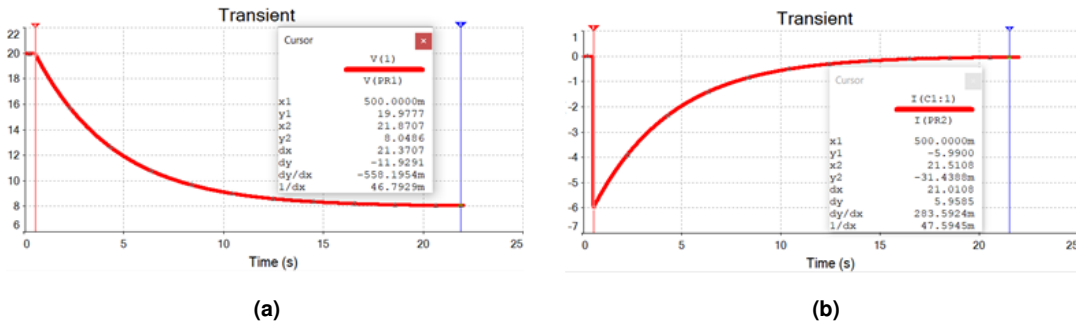


Figura 2.60: Inferência de informações sobre circuitos de primeira ordem usando apenas gráficos (caso 2)

Com relação ao gráfico da Figura 2.60b, pode-se afirmar que:

- a) A função é descontínua (valor de regime #2 nulo) no tempo de chaveamento 0 s.
- b) No regime #1, antes da ação da chave, o valor da variável é 0 e no tempo após o chaveamento ele chega a aproximadamente -6 , onde se percebe uma reta quase vertical em vermelho. Logo que transcorrido, o transiente chega ao regime #2 com valor 0, descarregado totalmente o componente ($\omega(t \rightarrow \infty) = 0$), podendo ser:

- O valor da corrente no capacitor (circuito aberto); ou
 - O valor da tensão no indutor (curto).
- c) Nada se pode afirmar sobre o tipo de resposta do transiente, pelos mesmos motivos citados no gráfico correspondente do caso 1 (Figura 2.59b).

Os valores mencionados nas inferências, mostrando alguns cálculos de energia, se baseiam nos dados fornecidos pela tabela do cursor presente nos gráficos (Figura 2.60) ou observando diretamente no transiente (Figura 2.59).

2.2.3 Transientes de segunda ordem

Viu-se que nos transientes de sinais de primeira ordem os formatos são necessariamente exponenciais e que existe uma constante de tempo que informa o quão rápido a carga ou descarga do elemento armazenador de energia vai finalizar ao chegar ao regime #2, além do fato desses sinais no tempo aparecem pela ação de uma

ou mais chaves, em circuito contendo ou indutores e resistores (RL) ou capacitores e resistores (RC).

Os transientes de segunda ordem possuem como principais características:

- a) Surgirem também após a ação de uma ou mais chaves, em circuitos com os dois tipos de componentes armazenadores de energia, configurando layouts de circuitos RLC com os componentes Resistor (R), indutor (L) e capacitor (C) conectados em paralelo ou série.
- b) Serem definidos por três possíveis formatos: superamortecido, criticamente amortecido e subamortecido, definidos pela comparação entre duas frequências que aparecem: a de amortecimento e a de ressonância angular. Não existe mais o conceito de constante de tempo.
- c) As frequências citadas no item 'b' são obtidas a partir apenas dos valores dos componentes R , L e C , sendo que as de amortecimento são obtidas por equações distintas nos layouts paralelo e série. Essa frequência que amortece é conhecida como frequência de Neper.
- d) As frequências de ressonância e amortecimento são usadas na obtenção das duas raízes em cada um dos formatos citados. Essas raízes são obtidas a partir da equação característica que define cada topologia (série ou paralela).
- e) As condições iniciais são usadas para se definir as duas constantes presentes na expressão dos transientes em cada um dos formatos, aplicando no tempo inicial do transiente (chaveamento), tanto para a função quanto para a sua derivada primeira no tempo.

Os aspectos comuns aos transientes de primeira e segunda ordem são:

- a) Caracterizados por dois regimes DC (#1 e #2) separados pelo transiente, cujo início se dá pela ação de uma ou mais chaves.
- b) Pelo fato de os circuitos serem alimentados por fontes DC e, portanto, nos regimes o indutor pode ser substituído por um curto e o capacitor por um circuito aberto.
- c) Os transientes dependem do tipo de resposta que o circuito proporciona, podendo ser natural ou ao degrau.

As informações que caracterizam os transientes de segunda ordem citados serão mais bem revisadas com a apresentação detalhada em cada um dos três possíveis formatos na topologia paralela e série.

Transiente de segunda ordem na topologia paralela

A obtenção dos transientes ocorre por cálculos feitos sempre na mesma sequência, como no caso dos de primeira ordem, ainda que não tenham sido mencionados em sua revisão. Para os circuitos de segunda ordem esses procedimentos em etapas serão explicitamente citados.

- **Circuito RLC com resposta natural na topologia paralela**

Suponha o circuito simples RLC na topologia paralela apresentado na Figura 2.61. Percebe-se a presença das chaves S1 e S2 operando de forma sincronizadas (no mesmo tempo ocorrem o chaveamento, neste caso, ambas fechando seus terminais) que, ao serem acionadas (Figura 2.61b), proporcionam o aparecimento de um sinal transiente na tensão $v = V_o$ (tensão inicial no capacitor) do paralelo entre os componentes R , L e C .

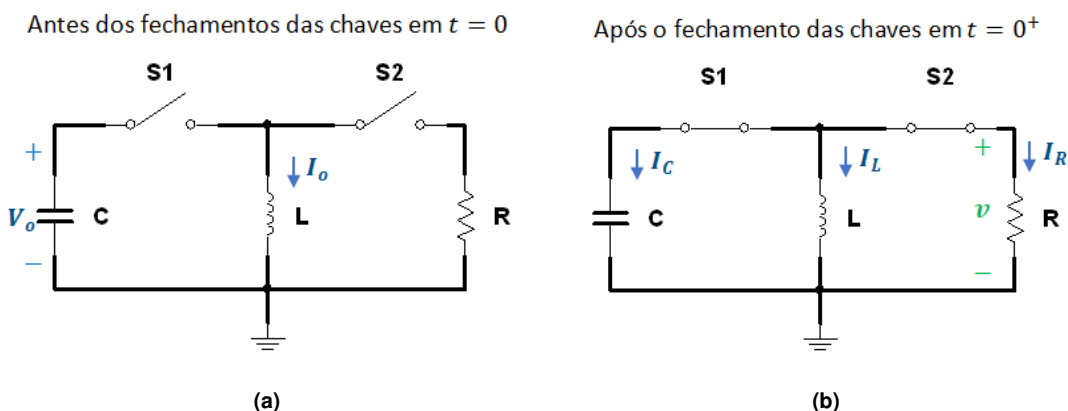


Figura 2.61: Circuito RLC paralelo com transiente em resposta natural

Podem-se destacar as seguintes informações sobre o circuito RLC na topologia em paralelo com resposta natural mostrado:

- Após a ação das chaves, a tensão v no paralelo na polaridade arbitrada no circuito (Figura 2.61b) é de resposta natural, já que não existe elemento forçante. Assim, a oscilação desse transiente só é possível caso haja uma tensão nos terminais do capacitor V_0 e/ou uma corrente inicial no indutor I_0 , como condições iniciais (Figura 2.61a). Caso não exista nenhuma dessas condições, o indutor e o capacitor encontram-se descarregados e o circuito não promove o transiente após a ação das chaves.
- Duas frequências aparecem no transiente do sinal da tensão no paralelo, uma que diz respeito à oscilação natural do circuito, denominada de frequência de ressonância natural ω_0 e a outra associada à capacidade do circuito amortecer o sinal através da resistência R , referida como frequência de amortecimento α .

Ambas as frequências são obtidas apenas com os valores de R , L e C através das Eq. 2.70 e 2.71.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad (2.70)$$

$$\alpha = \frac{1}{2 \cdot R \cdot C} \quad (2.71)$$

- c) Na comparação entre essas frequências, surgem os três possíveis formatos para o transiente da tensão no paralelo, as quais produzem, a partir da equação característica (Eq. 2.72) dessa topologia, duas raízes, s_1 (Eq. 2.73) e s_2 (Eq. 2.74), sempre negativas.

$$s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} = 0 \quad (2.72)$$

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (2.73)$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (2.74)$$

- $\alpha^2 > \omega_0^2$ – Formato superamortecido (mais amortece que oscila), produzindo duas raízes reais e distintas pelo fato do radicando $\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ ser positivo.
 - $\alpha^2 < \omega_0^2$ – Formato subamortecido (mais oscila que amortece), produzindo duas raízes complexas conjugadas (radicando $\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ negativo), o qual gera uma terceira frequência, denominada de frequência angular de amortecimento (ω_d).
 - $\alpha^2 = \omega_0^2$ – Formato criticamente amortecido (limite entre amortecimento e oscilação), produzindo duas raízes reais e iguais.
- d) As expressões no tempo para os três formatos de transientes da tensão são dadas pelas Eq. 2.75, 2.76 e 2.77, onde as constantes que aparecem em cada um deles (A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , D_1 e D_2) compatibilizam essas expressões com as condições iniciais no capacitor (V_0) e indutor (I_0). Essas expressões $v(t)$ incluem o tempo de chaveamento ($t = 0$).

- **Superamortecido** ($\alpha^2 > \omega_0^2$):

$$v(t) = A_1 \cdot e^{s_1 t} + A_2 \cdot e^{s_2 t} \quad (2.75)$$

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad \text{e} \quad s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

- **Subamortecido** ($\alpha^2 < \omega_0^2$):

$$v(t) = B_1 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega_d t) + B_2 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sen(\omega_d t) \quad (2.76)$$

Onde: $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ é a frequência angular de amortecimento

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d \quad \text{e} \quad s_2 = -\alpha - j\omega_d \quad (j \text{ é número imaginário})$$

- **Criticamente amortecido** ($\alpha^2 = \omega_0^2$):

$$v(t) = D_1 \cdot t \cdot e^{-\alpha t} + D_2 \cdot e^{-\alpha t} \quad (2.77)$$

$$s_1 = s_2 = -\alpha$$

- e) Os valores iniciais V_0 e/ou I_0 possibilitam determinar as constantes mencionadas aplicando-se a condição do valor da expressão tensão e de sua derivada primeira no tempo, imediatamente após o chaveamento ($t = 0^+$), conforme Eq. 2.78 até 2.83. O valor da expressão no tempo de chaveamento é a própria tensão inicial do capacitor V_0 e da sua derivada primeira é a relação entre tensão e corrente no capacitor (Eq. 2.47). A condição da aplicação em $t = 0^+$ é imposta pela derivada primeira da função ($dv(0^+)/dt$) que depende da corrente no capacitor, uma função descontínua no chaveamento, devendo também ser aplicado na própria função $v(0^+)$.

- **Superamortecido** ($\alpha^2 > \omega_0^2$):

$$v(t) = A_1 \cdot e^{s_1 t} + A_2 \cdot e^{s_2 t}$$

$$v(0^+) = A_1 \cdot e^0 + A_2 \cdot e^0 \Rightarrow V_0 = A_1 + A_2 \quad (2.78)$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = A_1 \cdot s_1 \cdot e^0 + A_2 \cdot s_2 \cdot e^0, \quad \frac{dv(0^+)}{dt} = A_1 \cdot s_1 + A_2 \cdot s_2 \quad (2.79)$$

- **Subamortecido** ($\alpha^2 < \omega_0^2$):

$$v(t) = B_1 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega_d t) + B_2 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sen(\omega_d t)$$

$$v(0^+) = B_1 \cdot e^0 \cdot \cos(0) + B_2 \cdot e^0 \cdot \sen(0) \Rightarrow V_0 = B_1 \quad (2.80)$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = -\alpha \cdot B_1 + \omega_d \cdot B_2 \quad (2.81)$$

- **Criticamente amortecido** ($\alpha^2 = \omega_0^2$):

$$v(t) = D_1 \cdot t \cdot e^{-\alpha t} + D_2 \cdot e^{-\alpha t}$$

$$v(0^+) = D_1 \cdot 0 \cdot e^0 + D_2 \cdot e^0 \Rightarrow V_0 = D_2 \quad (2.82)$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = D_1 - \alpha \cdot D_2 \quad (2.83)$$

- f) A necessidade das equações obtidas no tempo do chaveamento mostradas acima é para desenvolver um sistema linear de duas equações, possibilitando calcular as duas constantes de cada formato do transitório.
- g) Caso seja interesse obter as correntes nos componentes R , L e C , deve-se usar a relação entre a tensão e a corrente no elemento, uma vez determinada a equação do transiente da tensão $v(t)$ no paralelo, conforme Eq. 2.84, 2.85 e 2.86, respectivamente.

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{R} \quad (2.84)$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \cdot \int_0^t v(t) dt + I_0 \quad (2.85)$$

$$i_C(t) = C \cdot \frac{dv}{dt} \quad (2.86)$$

- h) As Eqs. 2.79, 2.81 e 2.83 foram empregadas na obtenção de uma segunda equação linear (Eq. 2.87), onde:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{i_C(t)}{C} \Rightarrow \frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} \quad (2.87)$$

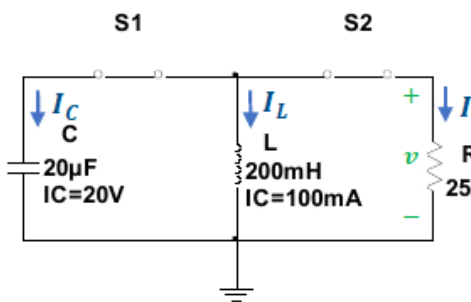
- i) Para obter a derivada da tensão no ponto $t = 0^+$, é necessário apenas encontrar o valor da corrente no capacitor $i_C(0^+)$, a partir da LCK no nó superior da Figura 2.61b, na medida em que a corrente no indutor $i_L(0^+) = i_L(0) = i_L(0^-)$ é fornecida como corrente inicial I_0 e a corrente no resistor é calculada como $i_R(0^+) = v(0^+)/R$:

$$i_C(t) + i_L(t) + i_R(t) = 0 \quad (\text{LCK}) \Rightarrow i_C(0^+) = -[i_L(0^+) + i_R(0^+)]$$

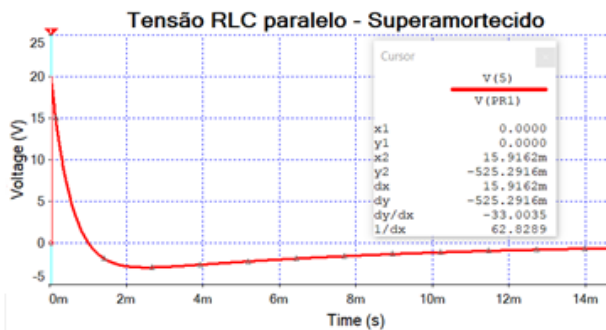
$$i_C(0^+) = -\left(I_0 + \frac{v(0^+)}{R}\right) \Rightarrow i_C(0^+) = -\left(I_0 + \frac{V_0}{R}\right) \quad (2.88)$$

- j) Por fim, é só substituir as duas constantes calculadas e os parâmetros, raízes ou frequências, a depender do formato do transiente da tensão no paralelo, conforme indicado nas Eqs. 2.75, 2.76 e 2.77.

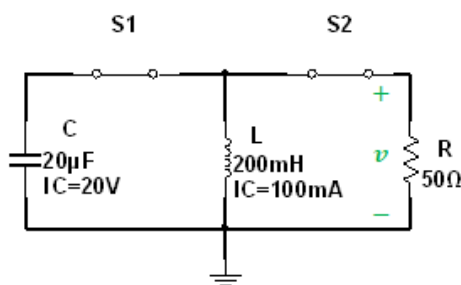
Para mostrar os três possíveis formatos de transiente de segunda ordem, é utilizado o mesmo circuito simples da Figura 2.61. Na Figura 2.62 são mostrados o circuito RLC paralelo com os valores dos componentes e das condições iniciais (IC) da tensão no capacitor (20 V) e corrente no indutor (100 mA), juntamente com os gráficos dos respectivos transientes.



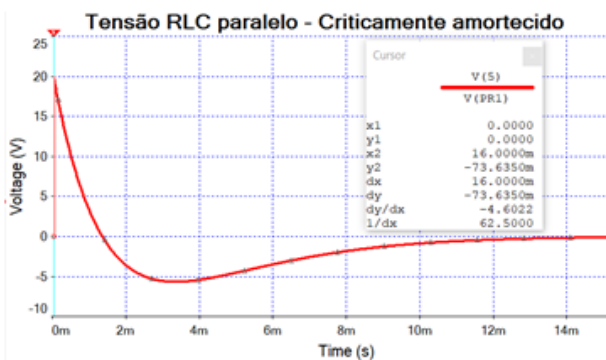
(a1)



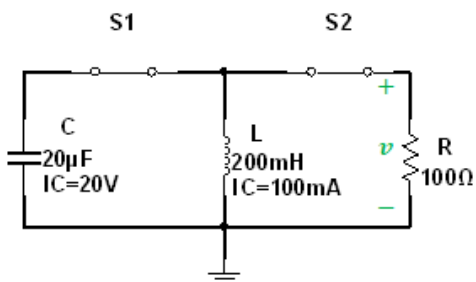
(a2)



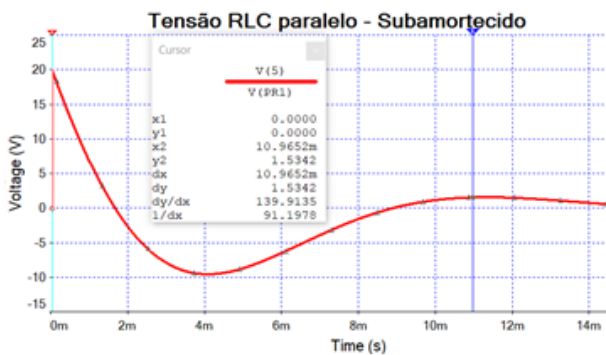
(b1)



(b2)



(c1)



(c2)

Figura 2.62: Exemplo de circuito RLC na topologia paralela com resposta natural.

Para ser possível no circuito obter os formatos superamortecido, criticamente amortecido e subamortecido, o valor da resistência no paralelo é alterado, para os valores de 25Ω , 50Ω e 100Ω , respectivamente. No layout paralelo, quanto maior for o valor da resistência R , mantendo-se inalterados os valores do capacitor C e indutor L , mais a frequência de amortecimento diminui, em virtude de R estar no denominador da Eq. 2.71. A seguir serão feitos todos os passos para a obtenção final da expressão do transiente da tensão $v(t)$ no paralelo.

Para o valor $R = 50 \Omega$, tem-se:

- **Passo 1:** Cálculo de α e ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{200 \times 10^{-3} \cdot 20 \times 10^{-6}}} = 500 \text{ rad/s}, \quad \omega_0^2 = 250.000 \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

$$\alpha = \frac{1}{2 \cdot R \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot 50 \cdot 20 \times 10^{-6}} = 500 \text{ rad/s}, \quad \alpha^2 = 250.000 \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

- **Passo 2:** Cálculo das raízes s_1 e s_2 :

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -500 + \sqrt{0} = -500 \text{ rad/s}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -500 - \sqrt{0} = -500 \text{ rad/s}$$

- **Passo 3:** Definição da expressão do transiente na comparação entre α^2 e ω_0^2 . Como $\alpha^2 = \omega_0^2 = 250.000 \text{ rad}^2/\text{s}^2$, o formato é criticamente amortecido, produzindo duas raízes reais e iguais, conforme encontrado no passo 2. Logo:

$$v(t) = D_1 \cdot t \cdot e^{-\alpha t} + D_2 \cdot e^{-\alpha t}$$

$$v(t) = D_1 \cdot t \cdot e^{-500t} + D_2 \cdot e^{-500t} \text{ V para } t \geq 0$$

A expressão do transiente $v(t)$ é válida para o tempo de chaveamento ($t \geq 0$), na medida em que no capacitor essa variável é contínua, segurando o “surto” que teria no indutor, caso não estivesse em paralelo.

- **Passo 4:** Obtenção das constantes em função do formato do transiente, sabendo-se que a tensão inicial no capacitor é 20 V na mesma polaridade de $v(t)$ e corrente no indutor é 100 mA no sentido arbitrado I_L , conforme informado no circuito como IC nos componentes.

$$v(0^+) = D_1 \cdot 0 \cdot e^0 + D_2 \cdot e^0 \Rightarrow V_0 = D_2 \Rightarrow D_2 = 20 \text{ V}$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = D_1 - \alpha \cdot D_2 \Rightarrow \frac{i_C(0^+)}{C} = D_1 - 500 \cdot 20$$

$$i_C(0^+) = -[i_L(0^+) + i_R(0^+)] \Rightarrow i_C(0^+) = -\left(0, 1 + \frac{20}{25}\right) = -0,9 \text{ A}$$

O valor negativo da corrente no capacitor no início do transiente significa que, nesse momento, ele está fornecendo energia (saindo pelo polo positivo).

$$\frac{-0,9}{20 \times 10^{-6}} = -45.000 = D_1 - 500 \cdot 20 \Rightarrow D_1 = -35.000 \text{ V/s}$$

O valor alto da constante D_1 informa que a taxa de decaimento (valor negativo) do sinal do transiente é alta, o que indica que a duração dele é na faixa de milissegundos, como pode ser observado nos gráficos da Figura 2.62, na medida em que:

$$-35 \text{ kV/s} = -35 \text{ V/ms} = -0,035 \text{ V}/\mu\text{s}$$

- **Passo 5:** Expressão completa da variável pedida para o transiente.

$$v(t) = D_1 \cdot t \cdot e^{-500t} + D_2 \cdot e^{-500t}$$

$$v(t) = -35.000 \cdot t \cdot e^{-500t} + 20 \cdot e^{-500t} \quad \text{V para } t \geq 0$$

- **Passo 6:** Teste da validade da expressão final para o transiente. Para $t = 0$:

$$v(0) = -35.000 \cdot 0 \cdot e^0 + 20 \cdot e^0 = 0 + 20 = 20 \text{ V}$$

Para $t \rightarrow \infty$:

$$v(t \rightarrow \infty) = -35.000 \cdot \infty \cdot e^{-\infty} + 20 \cdot e^{-\infty} = 0 \text{ V}$$

Ambos os valores testados para o tempo podem ser consultados nos gráficos da Figura 2.62, independente do formato. Nada se pode concluir sobre o tipo de resposta (natural ou ao degrau) para o transiente de $v(t)$, já que ele sempre irá para zero no regime #2 devido ao indutor ser substituído por um curto. A definição da resposta em termos de equação poderia ser comprovada pela corrente no indutor que, na resposta ao degrau, vai para um valor não nulo, como será visto mais adiante nesse tipo de circuito.

Para o valor $R = 25 \Omega$, tem-se:

- **Passo 1:** Cálculo de α e ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{200 \times 10^{-3} \cdot 20 \times 10^{-6}}} = 500 \text{ rad/s}, \quad \omega_0^2 = 0,25 \times 10^6 \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

$$\alpha = \frac{1}{2 \cdot R \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot 25 \cdot 20 \times 10^{-6}} = 1.000 \text{ rad/s}, \quad \alpha^2 = 1 \times 10^6 \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

O resultado de ω_0^2 é mantido por não se variar os valores de C e L , enquanto o de α^2 é alterado por modificar o valor de R na obtenção dos formatos.

- **Passo 2:** Cálculo das raízes s_1 e s_2 :

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -1.000 + \sqrt{1 \times 10^6 - 0,25 \times 10^6} = -133,97 \text{ rad/s}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -1.000 - \sqrt{1 \times 10^6 - 0,25 \times 10^6} = -1.866,00 \text{ rad/s}$$

- **Passo 3:** Definição da expressão do transiente na comparação entre α^2 e ω_0^2 , que resultou em $\alpha^2 > \omega_0^2$, indicando o formato superamortecido. Logo:

$$v(t) = A_1 \cdot e^{s_1 t} + A_2 \cdot e^{s_2 t}$$

$$v(t) = A_1 \cdot e^{-133,97t} + A_2 \cdot e^{-1.866t} \quad \text{V para } t \geq 0$$

- **Passo 4:** Obtenção das constantes em função do formato do transiente, sabendo-se que a tensão inicial no capacitor é 20 V na mesma polaridade de $v(t)$ e corrente de 100 mA no sentido arbitrado I_L , conforme informado no circuito como IC nos componentes.

$$v(0^+) = A_1 \cdot e^0 + A_2 \cdot e^0 \Rightarrow V_0 = A_1 + A_2 \Rightarrow A_1 + A_2 = 20 \text{ V} \quad (\text{e1})$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = A_1 s_1 + A_2 s_2 \Rightarrow \frac{i_C(0^+)}{C} = -133,97A_1 - 1.866A_2$$

$$i_C(0^+) = -[i_L(0^+) + i_R(0^+)] \Rightarrow i_C(0^+) = -\left(0,1 + \frac{20}{25}\right) = -0,9 \text{ A}$$

$$\frac{-0,9}{20 \times 10^{-6}} = -45.000 = -133,97A_1 - 1.866A_2 \quad (\text{e2})$$

Solucionando o sistema (e1) e (e2):

$$A_1 + A_2 = 20 \text{ V} \quad (\text{e1})$$

$$-133,97A_1 - 1.866A_2 = -45.000 \quad (\text{e2})$$

Obtém-se:

$$A_1 = -4,4 \text{ V} \quad \text{e} \quad A_2 = 24,40 \text{ V}$$

- **Passo 5:** Expressão completa da variável pedida para o transiente.

$$v(t) = A_1 \cdot e^{-133,97t} + A_2 \cdot e^{-1.866t}$$

$$v(t) = -4,4 \cdot e^{-133,97t} + 24,40 \cdot e^{-1.866t} \quad \text{V para } t \geq 0$$

- **Passo 6:** Teste da validade da expressão final para o transiente. Para $t = 0$:

$$v(0^+) = -4,4 \cdot e^0 + 24,40 \cdot e^0 = 20 \text{ V}$$

Para $t \rightarrow \infty$:

$$v(t \rightarrow \infty) = -4,4 \cdot e^{-\infty} + 24,40 \cdot e^{-\infty} = 0 \text{ V}$$

Para o valor $R = 100 \Omega$, tem-se:

- **Passo 1:** Cálculo de α e ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{200 \times 10^{-3} \cdot 20 \times 10^{-6}}} = 500 \text{ rad/s}, \quad \omega_0^2 = 0,25 \times 10^6 \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

$$\alpha = \frac{1}{2 \cdot R \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot 100 \cdot 20 \times 10^{-6}} = 250 \text{ rad/s}, \quad \alpha^2 = 0,0625 \times 10^6 \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

O resultado de ω_0^2 é mantido por não se variar os valores de C e L , enquanto o de α^2 é alterado por modificar o valor de R na obtenção dos formatos.

- **Passo 2:** Cálculo das raízes s_1 e s_2 :

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -250 + \sqrt{0,0625 \times 10^6 - 0,25 \times 10^6}$$

$$s_1 = -250 + j \cdot \sqrt{0,25 \times 10^6 - 0,0625 \times 10^6} = -250 + j433,01 \text{ rad/s}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -250 - \sqrt{0,0625 \times 10^6 - 0,25 \times 10^6}$$

$$s_2 = -250 - j \cdot \sqrt{0,25 \times 10^6 - 0,0625 \times 10^6} = -250 - j433,01 \text{ rad/s}$$

Onde: $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 433,01 \text{ rad/s}$ (frequência angular de amortecimento)

- **Passo 3:** Definição da expressão do transiente na comparação entre α^2 e ω_0^2 que resultou em $\alpha^2 < \omega_0^2$, indicando o formato subamortecido. Logo:

$$v(t) = B_1 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega_d t) + B_2 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \text{sen}(\omega_d t) \quad \text{V para } t \geq 0$$

$$v(t) = B_1 \cdot e^{-250t} \cdot \cos(433,01t) + B_2 \cdot e^{-250t} \cdot \text{sen}(433,01t)$$

- **Passo 4:** Obtenção das constantes em função do formato do transiente, sabendo-se que a tensão inicial no capacitor é 20 V na mesma polaridade de $v(t)$ e corrente no indutor é de 100 mA no sentido arbitrado I_L , conforme informado no circuito como IC nos componentes.

$$v(0^+) = B_1 \cdot e^0 \cdot \cos(0) + B_2 \cdot e^0 \cdot \text{sen}(0) \Rightarrow V_0 = B_1 \Rightarrow B_1 = 20 \text{ V} \quad (\text{e1})$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = -\alpha \cdot B_1 + \omega_d \cdot B_2 \Rightarrow \frac{i_C(0^+)}{C} = -250 \cdot B_1 + 433,01 \cdot B_2$$

$$i_C(0^+) = -[i_L(0^+) + i_R(0^+)] \Rightarrow i_C(0^+) = -\left(0,1 + \frac{20}{25}\right) = -0,9 \text{ A}$$

$$\frac{-0,9}{20 \times 10^{-6}} = -45.000 = -250 \cdot B_1 + 433,01 \cdot B_2 \quad (\text{e2})$$

Substituindo B_1 da (e1) na (e2), obtém-se:

$$B_2 = -92,38 \text{ V}$$

- **Passo 5:** Expressão completa da variável pedida para o transiente.

$$v(t) = B_1 \cdot e^{-250t} \cdot \cos(433,01t) + B_2 \cdot e^{-250t} \cdot \sin(433,01t)$$

$$v(t) = 20 \cdot e^{-250t} \cdot \cos(433,01t) - 92,38 \cdot e^{-250t} \cdot \sin(433,01t) \quad \text{V}, t \geq 0$$

- **Passo 6:** Teste da validade da expressão final para o transiente. Para $t = 0$:

$$v(0^+) = 20 \cdot e^0 \cdot \cos(0) - 92,38 \cdot e^0 \cdot \sin(0) = 20 \text{ V}$$

Para $t \rightarrow \infty$:

$$v(t \rightarrow \infty) = 20 \cdot e^{-\infty} \cdot \cos(\infty) - 92,38 \cdot e^{-\infty} \cdot \sin(\infty) = 0 \text{ V}$$

Como comprovado, os resultados dos cálculos obtidos dependerão do valor da resistência no paralelo que definirá o tipo de formato, na condição de que quanto menor for (neste caso 25Ω) se torna mais superamortecido e quanto maior (100Ω) subamortecido, passando por um valor intermediário (50Ω), podendo ser observado o comportamento nos respectivos gráficos. Isso ocorre porque o valor da resistência está no denominador que se calcula a frequência de amortecimento $\alpha = 1/(2 \cdot R \cdot C)$.

Para $R = 25 \Omega$, gera-se o transiente da tensão $v(t)$ com formato superamortecido, que pode ser percebido no gráfico (Figura 2.62), quando o sinal sai do regime #1 de 20 V no momento do chaveamento e decai cortando o eixo do tempo, indo pela parte negativa do gráfico assintoticamente para o valor do regime #2, ou seja 0 V. Essa transição do quadrante positivo para o negativo do gráfico pode ser confirmada na expressão encontrada, onde o valor da constante de $-4,4 \text{ V}$ está associado à exponencial de menor raiz negativa ($-133,97 \text{ rad/s}$), enquanto a constante $+24,40 \text{ V}$ com a maior (-1.866 rad/s), o que faz com que o termo com a raiz menor vá mais lentamente ao regime #2 e, portanto, pelo lado negativo da tensão.

$$v(t) = -4,4 \cdot e^{-133,97t} + 24,40 \cdot e^{-1.866t} \text{ V}$$

Para obter o valor do tempo quando o transiente corta o esse eixo, deve-se obter a derivada da expressão acima e igualar a zero, ou seja, $dv(t)/dt = 0$. Isso resulta em um tempo de aproximadamente 1 ms, bastante próximo do mostrado no gráfico. Nessa revisão não há interesse em desenvolver os cálculos para apresentar o tempo citado, tendo somente o interesse interpretativo. Existe possibilidade de o transiente chegar ao regime indo apenas com valores positivos ou negativos, a depender da equação que o define.

Para $R = 50 \Omega$, o transiente $v(t)$ expressa no tempo um formato criticamente amortecido, apresentado no gráfico da Figura 2.62 que, comparado ao superamortecido, tem um tempo de alcance do regime #2 menor, como esperado. Lembrando que esse tipo de formato é o meio caminho entre o superamortecido e o subamortecido, já que as frequências α^2 e ω_0^2 são iguais.

Para $R = 100 \Omega$, o transiente $v(t)$ expressa no tempo um formato subamortecido, apresentado no gráfico da Figura 2.62, onde se observa claramente que o sinal cruza

mais de uma vez o eixo dos tempos, condição necessária para defini-lo. Uma dica importante é que quanto maior for o valor de ω_0 em relação a α , maior será a oscilação em torno do regime #2 e o valor do sobressinal (o primeiro pico após cortar o eixo do tempo), e também mais rápido alcança o regime #2. Uma preocupação quando se gera esse sinal para obter maior velocidade para alcançar o regime (como em implementação de sinal de clock digital) é com o valor da sobretensão, pois pode alcançar o primeiro pico com valor superior à alimentação do circuito integrado, onde o sinal é usado como entrada, podendo queimá-lo. Outra observação importante é com a queda nos valores dos picos subsequentes que se alternam acima e abaixo do regime #2, em função das funções trigonométricas cosseno e seno, sendo esses picos limitados pela presença da função exponencial no transiente ($e^{-\alpha t}$). Esse amortecimento na oscilação em torno do regime #2, neste caso zero, é definido pela frequência ω_d .

Para obter o transiente das correntes em cada componente (i_C , i_L e i_R na Figura 2.61b) basta aplicar a fórmula que relaciona a tensão $v(t)$ com elas. Como a resposta é natural, a energia inicial armazenada no capacitor e/ou indutor, ao ser entregue à carga, cessa e leva todas as correntes para 0 no regime #2. O importante é mencionar que o tipo de transiente da tensão é o mesmo da corrente, ou seja:

a) $\alpha^2 > \omega_0^2$ – Formato superamortecido

$$i_C(t) = C \cdot \frac{dv}{dt} = A_1 \cdot e^{s_1 t} + A_2 \cdot e^{s_2 t} \quad \text{para } t > 0 \quad (2.89)$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \cdot \int_0^t v(t) dt + I_0 = A_1 \cdot e^{s_1 t} + A_2 \cdot e^{s_2 t} \quad \text{para } t \geq 0 \quad (2.90)$$

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{R} = A_1 \cdot e^{s_1 t} + A_2 \cdot e^{s_2 t} \quad \text{para } t \geq 0 \quad (2.91)$$

Evidentemente, as constantes A_1 e A_2 produzem valores diferentes para cada transiente de corrente. No regime #1, a corrente inicial no indutor (I_0) foi fornecida como 100 mA.

- b) $\alpha^2 < \omega_0^2$ – Formato subamortecido, com as mesmas considerações feitas para o superamortecido.
- c) $\alpha^2 = \omega_0^2$ – Formato criticamente amortecido, análogo às feitas com as do superamortecido.

• Circuito RLC com resposta ao degrau na topologia paralela

Suponha o circuito simples RLC na topologia paralela apresentado na Figura 2.63. Quando a chave S é acionada ela conecta a fonte de corrente no paralelo RLC, indicando que o transiente é de resposta ao degrau, no caso, o elemento forçante é essa fonte. Ainda que indicadas as três correntes nos componentes do RLC (i_C , i_L e i_R), a de

interesse nessa topologia é a variável corrente no indutor (I_L), na medida em que no regime o indutor é um curto, eliminando os demais elementos do circuito (C e R) e toda a corrente da fonte I passa por ele.

Percebe-se que as condições iniciais, tensão no capacitor e corrente no indutor são nulas e referenciadas na Figura 2.63b como IC.

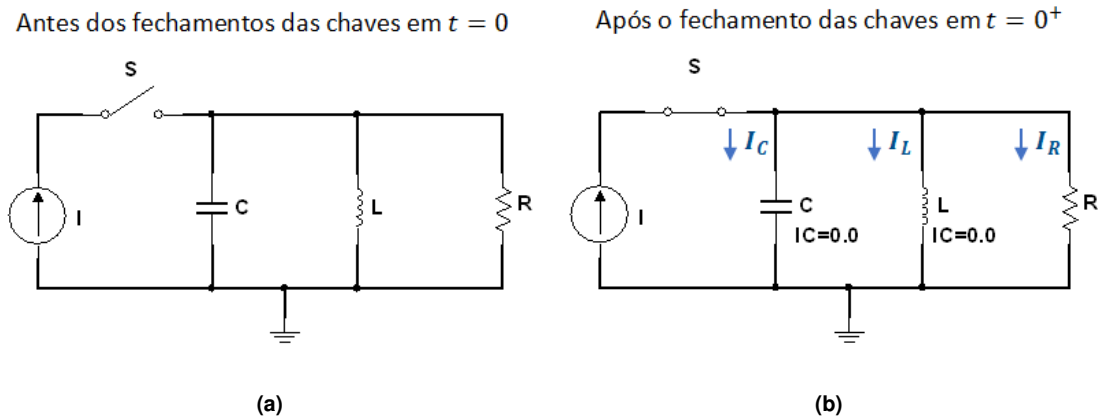


Figura 2.63: Circuito RLC paralelo com transiente em resposta ao degrau

As considerações feitas para o circuito RLC com resposta natural na Figura 2.61 são validadas para a resposta ao degrau, além das que são especificamente para esse segundo tipo de resposta. Dessa forma, pode-se afirmar que:

- As frequências angulares de ressonância ω_0 e amortecimento α são descritas pelas mesmas equações, no caso Eqs. 2.70 e 2.71, respectivamente. Esse fato decorre de ser a mesma topologia e o tipo de resposta não tem efeito sobre elas.
- A equação característica (Eq. 2.72) e, como consequência, as raízes s_1 (Eq. 2.73) e s_2 (Eq. 2.74) que caracterizam os transitórios (superamortecido, criticamente amortecido e subamortecido) também são as mesmas pelos motivos citados no item 'a'.
- Os formatos dos transitórios também são mantidos, com a exceção de que no regime #2, após transcorrido o transiente, os valores são os mesmos do forçante ($I = I_f$) quando o objetivo é obter a corrente no indutor no circuito da Figura 2.63b. Para a tensão no paralelo, os transientes se mantêm aos da resposta natural, pelo fato do indutor se tornar um curto. Dessa forma, a corrente no indutor $i_L(t)$ e a tensão no paralelo $v(t)$ são dadas por:

$\alpha^2 > \omega_0^2$ – **Formato superamortecido**

$$i_L(t) = I_f + A'_1 \cdot e^{s_1 t} + A'_2 \cdot e^{s_2 t} \quad \text{para } t \geq 0 \quad (2.92)$$

$$v(t) = A_1 \cdot e^{s_1 t} + A_2 \cdot e^{s_2 t} \quad \text{para } t \geq 0$$

$\alpha^2 = \omega_0^2$ – **Formato criticamente amortecido**

$$i_L(t) = I_f + D'_1 \cdot t \cdot e^{-\alpha t} + D'_2 \cdot e^{-\alpha t} \quad \text{para } t \geq 0 \quad (2.93)$$

$$v(t) = D_1 \cdot t \cdot e^{-\alpha t} + D_2 \cdot e^{-\alpha t} \quad \text{para } t \geq 0$$

$\alpha^2 < \omega_0^2$ – **Formato subamortecido**

$$i_L(t) = I_f + B'_1 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega_d t) + B'_2 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_d t), \quad t \geq 0 \quad (2.94)$$

$$v(t) = B_1 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega_d t) + B_2 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_d t) \quad \text{para } t \geq 0$$

- d) Perceba que para os cálculos das constantes como resposta ao degrau são empregadas constantes com linha ($A'_1, A'_2, B'_1, B'_2, D'_1, D'_2$) nas expressões abaixo, as quais dependem de duas condições relacionadas à corrente no indutor e de sua derivada no tempo de chaveamento ($t = 0$). Diferente da tensão, onde foram usados o tempo após o chaveamento ($t = 0^+$) tanto na função tensão ($v(0^+)$) quanto na sua derivada ($dv(0^+)/dt$) por uma restrição matemática, condição inexistente na obtenção das constantes das expressões das correntes, uma vez que a tensão no paralelo é assegurada pelo capacitor (variável contínua). Assim:

$$I_L(0) = I_f + \text{resposta natural}(0) \quad \text{para } t \geq 0 \quad (2.95)$$

$$\frac{di_L(0)}{dt} = \frac{v(0)}{L} \quad (2.96)$$

$\alpha^2 > \omega_0^2$ – **Formato superamortecido**

$$I_L(0) = I_f + A'_1 \cdot e^0 + A'_2 \cdot e^0 \quad \Rightarrow \quad I_L(0) = I_f + A'_1 + A'_2 \quad (2.97)$$

$$\frac{di_L(0)}{dt} = \frac{v(0)}{L} = s_1 \cdot A'_1 + s_2 \cdot A'_2 \quad (\text{inclui } t = 0) \quad (2.98)$$

$\alpha^2 < \omega_0^2$ – **Formato subamortecido**

$$I_L(0) = I_f + B'_1 \cdot e^0 \cdot \cos(0) + B'_2 \cdot e^0 \cdot \sin(0) \quad \Rightarrow \quad I_L(0) = I_f + B'_1 \quad (2.99)$$

$$\frac{di_L(0)}{dt} = \frac{v(0)}{L} = \omega_d \cdot B'_2 - \alpha \cdot B'_1 \quad (2.100)$$

$\alpha^2 = \omega_0^2$ – **Formato criticamente amortecido**

$$I_L(0) = I_f + D'_1 \cdot 0 \cdot e^0 + D'_2 \cdot e^0 \quad \Rightarrow \quad I_L(0) = I_f + D'_2 \quad (2.101)$$

$$\frac{di_L(0)}{dt} = \frac{v(0)}{L} = D'_1 - \alpha \cdot D'_2 \quad (2.102)$$

- e) As equações da derivada da corrente no tempo para cada formato de transiente são igualadas ao termo $v(t)/L$ que é proveniente da relação entre a tensão induzida e a derivada da corrente no indutor, conforme Eq. 2.47.

Para mostrar os três possíveis formatos de transiente de segunda ordem, é utilizado o mesmo circuito simples da Figura 2.63. Na Figura 2.64 são mostrados o circuito RLC paralelo com os valores dos componentes e das condições iniciais (IC) da tensão no capacitor e corrente no indutor, juntamente com os gráficos dos transientes para a resposta ao degrau. Para ser possível no circuito obter os três formatos, o valor da resistência no paralelo é alterado, como no caso do exemplo da Figura 2.62, para os valores de $30\ \Omega$, $50\ \Omega$ e $100\ \Omega$.

Os valores são invariáveis para os outros dois componentes e para a fonte de corrente, sendo $C = 50\text{ nF}$, $L = 2,5\text{ mH}$ e $I = 20\text{ mA}$, respectivamente. No regime #1, antes da chave ser fechada, tanto o indutor quanto o capacitor estão desenergizados, ou seja, a tensão inicial nos terminais do paralelo RLC $v(0^-) = v(0) = v(0^+)$ e a corrente no indutor $I_L(0^-) = I_L(0) = I_L(0^+)$ são zero.

Antes de fazer os cálculos para as expressões dos transientes da corrente no indutor para os três formatos, é importante mencionar que na simulação em que se obteve os gráficos no Multisim, o tempo de chaveamento foi de $t = 100\ \mu\text{s}$ e nas expressões a validade desses transientes e da comprovação (passo 6) é feita em $t = 0\text{ s}$. Isso não acarreta erro na obtenção das equações, pois ao invés de t no expoente, deveria ser usado $t - 100\ \mu\text{s}$ e esse valor só foi utilizado para melhor se observar a condição do circuito no regime #1, antes do chaveamento.

Para o valor $R = 50\ \Omega$, tem-se:

- **Passo 1:** Cálculo de α e ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{2,5 \times 10^{-3} \cdot 50 \times 10^{-9}}} = 40\text{ krad/s}, \quad \omega_0^2 = 0,16 \times 10^{10}\text{ rad}^2/\text{s}^2$$

$$\alpha = \frac{1}{2 \cdot R \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot 50 \cdot 50 \times 10^{-9}} = 40\text{ krad/s}, \quad \alpha^2 = 0,16 \times 10^{10}\text{ rad}^2/\text{s}^2$$

- **Passo 2:** Cálculo das raízes s_1 e s_2 :

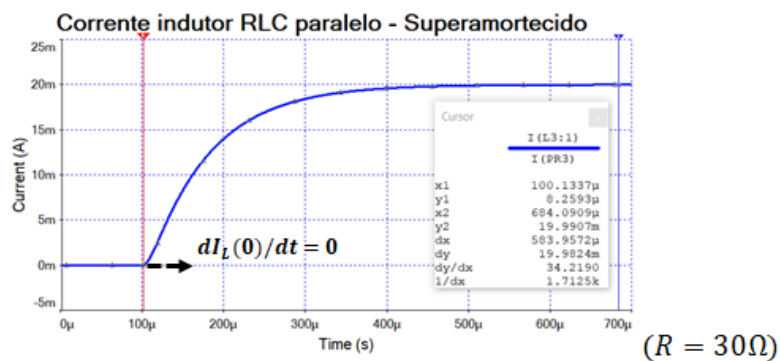
$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -40\text{ krad/s}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -40\text{ krad/s}$$

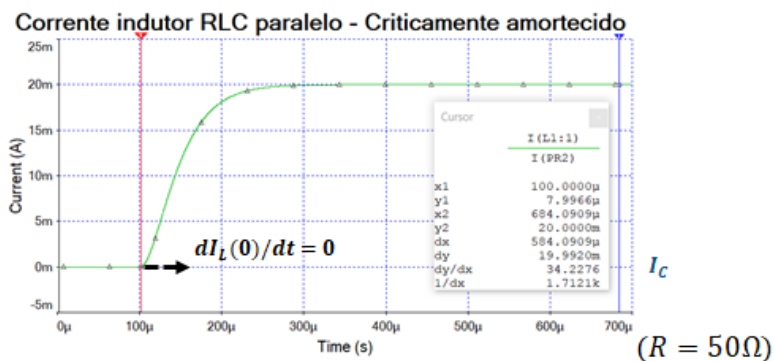
- **Passo 3:** Definição da expressão do transiente na comparação entre α^2 e ω_0^2 . Como $\alpha^2 = \omega_0^2 = 0,16 \times 10^{10}\text{ rad}^2/\text{s}^2$, o formato é criticamente amortecido, produzindo duas raízes reais e iguais, conforme encontrado no passo 2. Logo:

$$I_L(t) = I_f + D'_1 \cdot t \cdot e^{-\alpha t} + D'_2 \cdot e^{-\alpha t}$$

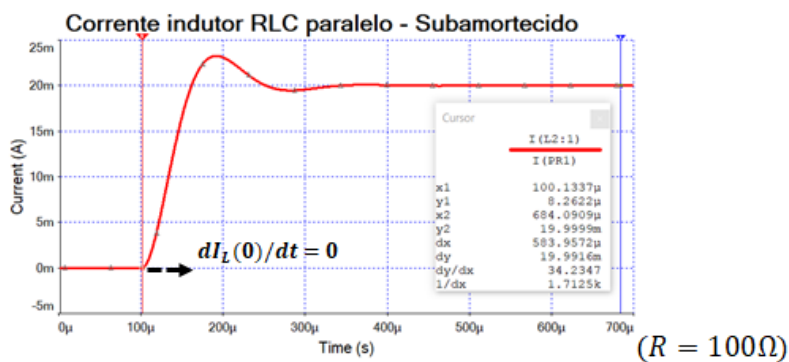
$$I_L(t) = 20 + D'_1 \cdot t \cdot e^{-40.000t} + D'_2 \cdot e^{-40.000t}\text{ mA para } t \geq 0$$



(a)



(b)



(c)

Figura 2.64: Exemplo de circuito RLC na topologia paralela com resposta ao degrau.

- **Passo 4:** Obtenção das constantes em função do formato do transiente, sabendo-se que a tensão inicial no capacitor e corrente no indutor são zero (descarregados).

$$I_L(0) = 20 \times 10^{-3} + D'_1 \cdot 0 \cdot e^0 + D'_2 \cdot e^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad D'_2 = -20 \text{ mA}$$

$$\frac{di_L(0)}{dt} = D'_1 - \alpha \cdot D'_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{v(0)}{L} = 0 = D'_1 - 40k \cdot (-20m) \quad \Rightarrow \quad D'_1 = -800 \text{ A/s}$$

O valor da derivada da corrente no indutor no tempo do chaveamento é zero ($di_L(0)/dt = v(0)/L = 0$), pois a tensão no paralelo é nula devido ao capacitor estar descarregado. Além disso, o tempo usado foi o do chaveamento pelo fato da tensão no paralelo ser contínua em função da presença do capacitor (variável contínua), não restringindo ao tempo logo após o chaveamento ($t = 0^+$).

Aqui também o valor alto de D'_1 informa a taxa de variação do transiente da corrente criticamente amortecido na ordem de milissegundos, podendo ser conferido nos eixos dos tempos dos gráficos da Figura 2.64:

$$D'_1 = -800 \text{ A/s} = -0,8 \text{ A/ms}$$

- **Passo 5:** Expressão completa da variável pedida para o transiente.

$$I_L(t) = 20 + D'_1 \cdot t \cdot e^{-40.000t} + D'_2 \cdot e^{-40.000t}$$

$$I_L(t) = 20 - 800.000 \cdot t \cdot e^{-40.000t} - 20 \cdot e^{-40.000t} \text{ mA} \quad \text{para } t \geq 0$$

$$D'_1 = -800 \text{ A/s} = -800.000 \text{ mA/s} \quad (\text{usado na expressão do transiente})$$

- **Passo 6:** Teste da validade da expressão final para o transiente.

Para $t = 0$:

$$I_L(0) = 20 - 800.000 \cdot 0 \cdot e^0 - 20 \cdot e^0 = 0 \text{ A} \quad (\text{indutor descarregado})$$

Para $t \rightarrow \infty$:

$$I_L(t \rightarrow \infty) = 20 \times 10^{-3} - 800.000 \cdot \infty \cdot e^{-\infty} - 20 \cdot e^{-\infty} = 20 \text{ mA}$$

Ambos os valores testados para o tempo podem ser consultados nos gráficos da Figura 2.64, independente do formato. Nada se pode concluir sobre o tipo de resposta (natural ou ao degrau) para o transiente de $v(t)$, já que essa variável sempre irá para zero no regime #2 devido ao indutor ser substituído por um curto no paralelo RLC. Porém, o tipo de resposta pode ser afirmado em relação à corrente no indutor, já que ela é a variável que não se anula nesse regime, no caso permanece em 20 mA, que é a corrente da fonte I .

Para o valor $R = 30 \Omega$, tem-se:

- **Passo 1:** Cálculo de α e ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{2,5 \times 10^{-3} \cdot 50 \times 10^{-9}}} = 40 \text{ krad/s}, \quad \omega_0^2 = 0,16 \times 10^{10} \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

$$\alpha = \frac{1}{2 \cdot R \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot 30 \cdot 50 \times 10^{-9}} = 66,67 \text{ krad/s}, \quad \alpha^2 = 0,44 \times 10^{10} \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

Lembrando que o resultado de ω_0^2 é mantido por não se variar os valores de C e L , enquanto o de α^2 é alterado por modificar o valor de R na obtenção dos formatos.

- **Passo 2:** Cálculo das raízes s_1 e s_2 :

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -13,333 \text{ krad/s}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -120 \text{ krad/s}$$

- **Passo 3:** Definição da expressão do transiente na comparação entre α^2 e ω_0^2 , que resultou em $\alpha^2 > \omega_0^2$ indicando o formato superamortecido. Logo:

$$I_L(t) = I_f + A'_1 \cdot e^{s_1 t} + A'_2 \cdot e^{s_2 t}$$

$$I_L(t) = 20 + A'_1 \cdot e^{-13,333t} + A'_2 \cdot e^{-120,000t} \text{ mA para } t \geq 0$$

- **Passo 4:** Obtenção das constantes em função do formato do transiente, sabendo-se que no início o capacitor e o indutor estão descarregados, informando condições iniciais nulas.

$$I_L(0) = 20 \times 10^{-3} + A'_1 + A'_2 \Rightarrow 0 = 20 + A'_1 + A'_2 \Rightarrow A'_1 + A'_2 = -20 \text{ mA} \quad (\text{e1})$$

$$\frac{dI_L(0)}{dt} = A'_1 \cdot s_1 + A'_2 \cdot s_2 \Rightarrow \frac{v(0)}{L} = -13,333 \cdot A'_1 - 120.000 \cdot A'_2$$

Como o capacitor está descarregado no chaveamento, a tensão no paralelo é 0 V:

$$0 = -13,333 \cdot A'_1 - 120.000 \cdot A'_2 \quad (\text{e2})$$

Solucionando o sistema (e1) e (e2):

$$A'_1 + A'_2 = -20 \text{ mA} \quad (\text{e1})$$

$$-13,333 \cdot A'_1 - 120.000 \cdot A'_2 = 0 \quad (\text{e2})$$

Obtém-se:

$$A'_1 = -22,5 \text{ mA} \quad \text{e} \quad A'_2 = 2,5 \text{ mA}$$

- **Passo 5:** Expressão completa da variável pedida para o transiente.

$$I_L(t) = 20 + A'_1 \cdot e^{-13.333t} + A'_2 \cdot e^{-120.000t} \text{ mA}$$

$$I_L(t) = 20 - 22,5 \cdot e^{-13.333t} + 2,5 \cdot e^{-120.000t} \text{ mA} \quad \text{para } t \geq 0$$

- **Passo 6:** Teste da validade da expressão final para o transiente. Para $t = 0$:

$$I_L(0) = 20 - 22,5 \cdot e^0 + 2,5 \cdot e^0 = 0 \text{ mA}$$

Para $t \rightarrow \infty$:

$$I_L(t \rightarrow \infty) = 20 - 22,5 \cdot e^{-\infty} + 2,5 \cdot e^{-\infty} = 20 \text{ mA}$$

Para o valor $R = 100 \Omega$, tem-se:

- **Passo 1:** Cálculo de α e ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{2,5 \times 10^{-3} \cdot 50 \times 10^{-9}}} = 40 \text{ krad/s}, \quad \omega_0^2 = 0,16 \times 10^{10} \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

$$\alpha = \frac{1}{2 \cdot R \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot 100 \cdot 50 \times 10^{-9}} = 20 \text{ krad/s}, \quad \alpha^2 = 0,04 \times 10^{10} \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

Lembrando que o resultado de ω_0^2 é mantido por não se variar os valores de C e L , enquanto o de α^2 é alterado por modificar o valor de R na obtenção dos formatos.

- **Passo 2:** Cálculo das raízes s_1 e s_2 :

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -20 + j \cdot 34,641 \text{ krad/s}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -20 - j \cdot 34,641 \text{ krad/s}$$

Onde: $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 34,641 \text{ krad/s}$ (frequência angular de amortecimento)

- **Passo 3:** Definição da expressão do transiente na comparação entre α^2 e ω_0^2 que resultou em $\alpha^2 < \omega_0^2$, indicando o formato subamortecido. Logo:

$$I_L(t) = I_f + B'_1 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega_d t) + B'_2 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \text{sen}(\omega_d t)$$

$$I_L(t) = 20 + B'_1 \cdot e^{-20.000t} \cdot \cos(34.641t) + B'_2 \cdot e^{-20.000t} \cdot \text{sen}(34.641t) \text{ mA}, \quad t \geq 0$$

- **Passo 4:** Obtenção das constantes em função do formato do transiente, sabendo-se que no início o capacitor e o indutor estão descarregados, informando condições iniciais nulas.

$$I_L(0) = 20 \times 10^{-3} + B'_1 \cdot e^0 \cdot \cos(0) + B'_2 \cdot e^0 \cdot \text{sen}(0) \Rightarrow B'_1 = -20 \text{ mA} \quad (\text{e1})$$

$$\frac{dI_L(0)}{dt} = -\alpha \cdot B'_1 + \omega_d \cdot B'_2 \Rightarrow \frac{v(0)}{L} = -20.000 \cdot B'_1 + 34.641 \cdot B'_2$$

$$0 = -20.000 \cdot B'_1 + 34.641 \cdot B'_2 \quad (\text{e2})$$

Substituindo B'_1 da (e1) na (e2), obtém-se:

$$B'_2 = -11,55 \text{ mA}$$

- **Passo 5:** Expressão completa da variável pedida para o transiente.

$$I_L(t) = 20 + B'_1 \cdot e^{-20.000t} \cdot \cos(34.641t) + B'_2 \cdot e^{-20.000t} \cdot \sin(34.641t) \text{ mA}$$

$$I_L(t) = 20 - 20 \cdot e^{-20.000t} \cdot \cos(34.641t) - 11,55 \cdot e^{-20.000t} \cdot \sin(34.641t) \text{ mA}, \quad t \geq 0$$

- **Passo 6:** Teste da validade da expressão final para o transiente.

Para $t = 0$:

$$I_L(0) = 20 - 20 \cdot e^0 \cdot \cos(0) - 11,55 \cdot e^0 \cdot \sin(0) = 0 \text{ mA}$$

Para $t \rightarrow \infty$:

$$I_L(t \rightarrow \infty) = 20 - 20 \cdot e^{-\infty} \cdot \cos(\infty) - 11,55 \cdot e^{-\infty} \cdot \sin(\infty) = 20 \text{ mA}$$

Como mostrado, os resultados dos cálculos obtidos dependerão do valor da resistência no paralelo que definirá o tipo de formato, que quanto menor for (neste caso 30Ω) se torna mais superamortecido e quanto maior (100Ω) subamortecido, passando por um valor intermediário criticamente amortecido (50Ω), podendo ser observado o comportamento nos respectivos gráficos. Isso ocorre porque o valor da resistência está no denominador que se calcula a frequência de amortecimento $\alpha = 1/(2 \cdot R \cdot C)$.

Finalizando as soluções, uma condição observada graficamente em todos os formatos de transientes e que foi comprovada matematicamente é que no início do transiente, após o fechamento da chave, a reta tangente nesse tempo é 0 (indicada no gráfico por uma seta), pois a derivada primeira dessa variável no tempo de chaveamento é:

$$\frac{di_L(0)}{dt} = \frac{v(t)}{L} = 0 \text{ mA/s}$$

Transiente de segunda ordem na topologia série

Na comparação entre as topologias RLC paralelo e série, a complementaridade também está presente no que diz respeito aos transientes das variáveis tensão e corrente, além das mesmas variáveis individuais para os componentes dos circuitos. Dessa maneira, no layout RLC paralelo a tensão $v(t)$ nos componentes é a mesma, enquanto no RLC série isso ocorre com a corrente $i(t)$. Já as correntes individuais de R , L e C são obtidas em função da tensão no paralelo v , enquanto as tensões nesses componentes são calculadas em função da corrente $i(t)$, nas topologias RLC paralelo e série, respectivamente. Esse fato facilita a compreensão das expressões no RLC série, tendo sido feita a revisão da paralela.

• Circuito RLC com resposta natural na topologia série

Suponha o circuito simples RLC na topologia série apresentado na Figura 2.65. Percebe-se a presença da chave S que, ao ser acionada, muda da posição ‘A’ para a ‘B’, alterando o *layout* do circuito RC de primeira ordem de resposta ao degrau (posição ‘A’) para o RLC série (posição ‘B’), formado pelos componentes C , L e $R3$.

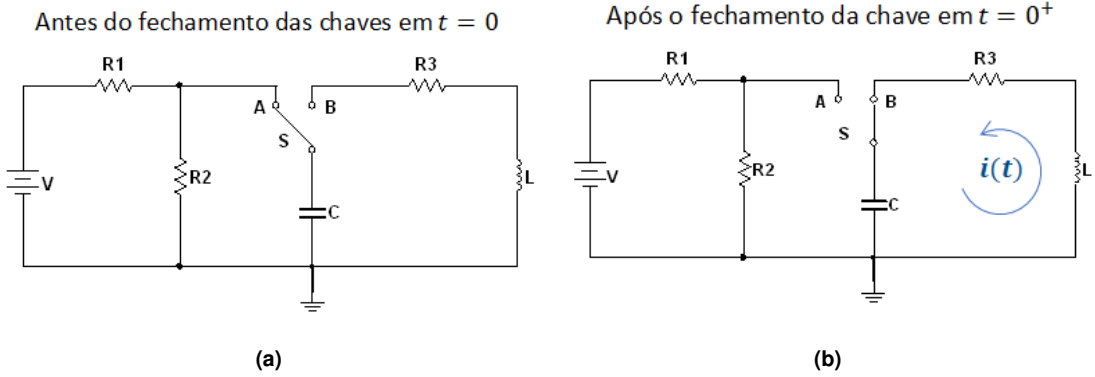


Figura 2.65: Circuito RLC paralelo com transiente em resposta natural

Considerando essa complementaridade e as equações que relacionam as variáveis corrente e tensão nos três elementos, no caso a Eq. 2.47 no indutor, a Eq. 2.49 no capacitor e a lei de Ohm no resistor, obtém-se os mesmos parâmetros vistos na topologia RLC paralela, obtendo-se as expressões dos transientes no tempo:

- a) A equação característica dessa topologia (Eq. 2.103) e as frequências de ressonância natural ω_0 e a de amortecimento α (Eq. 2.104) são:

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \quad (2.103)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad \alpha = \frac{R}{2 \cdot L} \quad (2.104)$$

Perceba que a frequência de ressonância ω_0 é a mesma da topologia paralela, enquanto a de amortecimento α tem sua fórmula alterada, oriunda da equação característica que também é modificada. Como ω_0 não se altera, sua equação não é numerada.

- b) As raízes da equação característica também envolvem as mesmas frequências acima, sendo suas equações mantidas:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

c) Os formatos possíveis de ocorrer nos transientes também são mantidos e envolvem a comparação entre o quadrado das frequências:

- $\alpha^2 > \omega_0^2$ – Formato superamortecido (mais amortece que oscila), produzindo duas raízes reais e distintas pelo radicando $\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ ser positivo.
- $\alpha^2 < \omega_0^2$ – Formato subamortecido (mais oscila que amortece), produzindo duas raízes complexas conjugadas, o qual gera a frequência angular de amortecimento ω_d .
- $\alpha^2 = \omega_0^2$ – Formato criticamente amortecido (limite entre amortecimento e oscilação), produzindo duas raízes reais e iguais.

d) As expressões no tempo para os três formatos de transientes da corrente são as mesmas que as da tensão na topologia paralela (variável comum aos três elementos):

- **Superamortecido** ($\alpha^2 > \omega_0^2$):

$$i(t) = A_1 \cdot e^{s_1 t} + A_2 \cdot e^{s_2 t} \quad (2.105)$$

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad \text{e} \quad s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

- **Subamortecido** ($\alpha^2 < \omega_0^2$):

$$i(t) = B_1 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega_d t) + B_2 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_d t) \quad (2.106)$$

Onde: $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ é a frequência angular de amortecimento

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d \quad \text{e} \quad s_2 = -\alpha - j\omega_d \quad (j \text{ é número imaginário})$$

- **Criticamente amortecido** ($\alpha^2 = \omega_0^2$):

$$i(t) = D_1 \cdot t \cdot e^{-\alpha t} + D_2 \cdot e^{-\alpha t} \quad (2.107)$$

$$s_1 = s_2 = -\alpha$$

e) As condições iniciais V_0 (capacitor) e I_0 (indutor) possibilitam determinar as constantes mencionadas, aplicando-se a condição do valor da expressão corrente e de sua derivada primeira no tempo imediatamente após o chaveamento ($t = 0^+$). Da mesma forma que na topologia paralela, onde a restrição imposta pela corrente no capacitor requiritava que tanto a tensão quanto a sua derivada primeira, matematicamente, considerasse o tempo 0^+ , no layout série a imposição vem da derivada primeira da corrente no indutor que envolve a tensão em seus terminais ($di(0^+)/dt = v_L(0^+)/L$) que não é definida no tempo de chaveamento. Assim:

- **Superamortecido** ($\alpha^2 > \omega_0^2$):

$$i(0^+) = A_1 \cdot e^0 + A_2 \cdot e^0 \Rightarrow I_0 = A_1 + A_2 \quad (2.108)$$

$$\frac{di(0^+)}{dt} = A_1 \cdot s_1 \cdot e^0 + A_2 \cdot s_2 \cdot e^0, \quad \frac{v_L(0^+)}{L} = A_1 \cdot s_1 + A_2 \cdot s_2 \quad (2.109)$$

- **Subamortecido** ($\alpha^2 < \omega_0^2$):

$$i(0^+) = B_1 \cdot e^0 \cdot \cos(0) + B_2 \cdot e^0 \cdot \sin(0) \Rightarrow I_0 = B_1 \quad (2.110)$$

$$\frac{di(0^+)}{dt} = \frac{v_L(0^+)}{L} = -\alpha \cdot B_1 + \omega_d \cdot B_2 \quad (2.111)$$

- **Criticamente amortecido** ($\alpha^2 = \omega_0^2$):

$$i(0^+) = D_1 \cdot 0 \cdot e^0 + D_2 \cdot e^0 \Rightarrow I_0 = D_2 \quad (2.112)$$

$$\frac{di(0^+)}{dt} = \frac{v_L(0^+)}{L} = D_1 - \alpha \cdot D_2 \quad (2.113)$$

- f) Caso seja interesse obter as tensões nos componentes R , L e C , deve-se usar a relação entre a tensão e a corrente no elemento, conhecida a expressão da corrente $i(t)$, conforme as Eqs. 2.114, 2.115 e 2.116, respectivamente.

$$v_R(t) = R \cdot i(t) \quad (2.114)$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) dt + V_0 \quad (2.115)$$

$$v_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad (2.116)$$

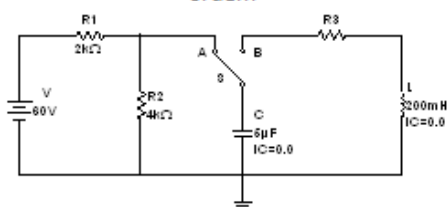
- g) Para obter a derivada da corrente no ponto $t = 0^+$, é necessário apenas encontrar o valor da tensão no indutor $v_L(0^+)$, a partir da LTK no circuito da Figura 2.65b, na medida em que a tensão no capacitor $v_C(0^+) = v_C(0) = v_C(0^-)$ é fornecida como tensão no início do transiente (V_0) e a tensão no resistor $v_R(0^+) = R \cdot i(0^+)$.

$$v_L(t) + v_C(t) + v_R(t) = 0 \Rightarrow v_L(0^+) = -[v_C(0^+) + v_R(0^+)]$$

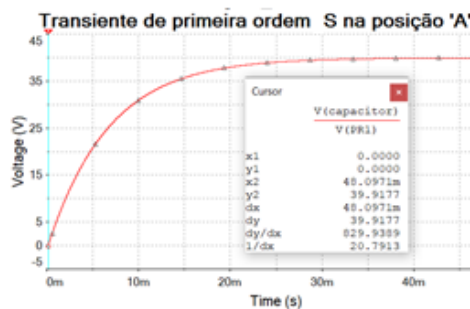
$$v_L(0^+) = -(V_0 + R \cdot i(0^+)) \quad (2.117)$$

Para mostrar os três possíveis formatos de transiente de segunda ordem, é utilizado o mesmo circuito da Figura 2.65. Na Figura 2.66 são mostrados o circuito RLC série com os valores dos componentes e das condições iniciais (IC), a tensão no capacitor e a corrente no indutor, juntamente com os gráficos dos transientes.

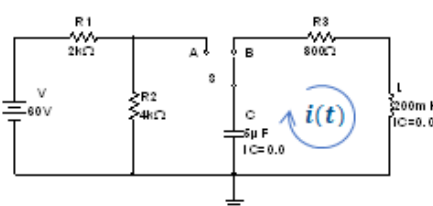
Carga do capacitor com a chave S na posição 'A' – transiente de primeira ordem



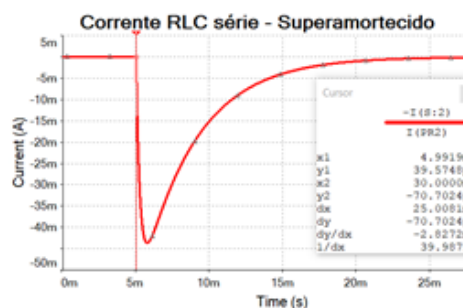
(a1)



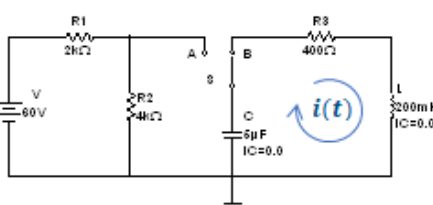
(a2)



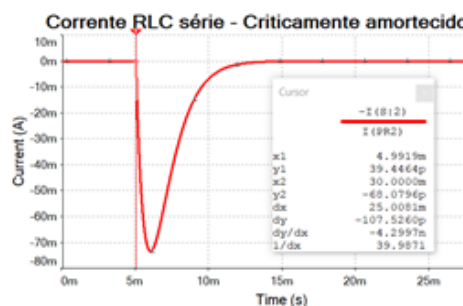
(b1)



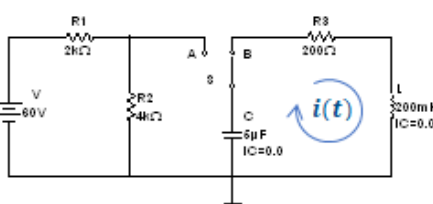
(b2)



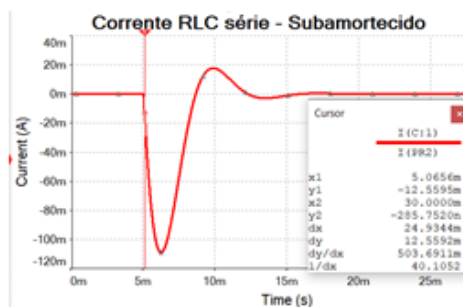
(c1)



(c2)



(d1)



(d2)

Figura 2.66: Exemplo de circuito RLC na topologia série com resposta natural.

Para ser possível no circuito obter os três formatos, o valor da resistência na topologia série é alterado, para os valores de 800 Ω , 400 Ω e 200 Ω , respectivamente. Com os valores do capacitor e indutor mantidos, diferente do circuito RLC paralelo, no layout série quanto menor for o valor da resistência mais a frequência de amortecimento diminui, em virtude de R estar no numerador da Eq. 2.104. A seguir serão mencionados todos os passos para a obtenção final das expressões dos transientes da corrente $i(t)$ na topologia série para os valores de resistência de 200 Ω , 400 Ω e 800 Ω .

Para o valor $R_3 = 400 \Omega$, tem-se:

- **Passo 1:** Cálculo de α e ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{200 \times 10^{-3} \cdot 5 \times 10^{-6}}} = 1 \text{ krad/s}, \quad \omega_0^2 = 1 \times 10^6 \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

$$\alpha = \frac{R}{2 \cdot L} = \frac{400}{2 \cdot 200 \times 10^{-3}} = 1 \text{ krad/s}, \quad \alpha^2 = 1 \times 10^6 \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

- **Passo 2:** Cálculo das raízes s_1 e s_2 :

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -1.000 + \sqrt{0} = -1.000 \text{ rad/s}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -1.000 - \sqrt{0} = -1.000 \text{ rad/s}$$

- **Passo 3:** Definição da expressão do transiente na comparação entre α^2 e ω_0^2 . Como $\alpha^2 = \omega_0^2 = 1 \times 10^6 \text{ rad}^2/\text{s}^2$, o formato é criticamente amortecido, produzindo duas raízes reais e iguais, conforme encontrado no passo 2. Logo:

$$i(t) = D_1 \cdot t \cdot e^{-\alpha t} + D_2 \cdot e^{-\alpha t}$$

$$i(t) = D_1 \cdot t \cdot e^{-1.000t} + D_2 \cdot e^{-1.000t}, \quad \text{A, para } t \geq 0$$

- **Passo 4:** Obtenção das constantes em função do formato do transiente, sabendo-se que a corrente inicial no indutor é nula ($IC = 0,0$). No tempo de chaveamento, ainda que o capacitor informe IC como zero, esse componente com a chave na posição ‘A’ por um longo tempo (Figura 2.66), faz com que o capacitor se carregue através do circuito em resposta ao degrau de transiente de primeira ordem, elevando a sua tensão no regime #1 para $V_0 = 40 \text{ V}$, informado no gráfico e comprovado pelo cálculo:

$$v_C(0^-) = V_0 = \frac{4k}{4k + 2k} \cdot 60 \Rightarrow V_0 = 40 \text{ V}$$

$$i(0^+) = D_1 \cdot 0 \cdot e^0 + D_2 \cdot e^0 \Rightarrow 0 = 0 + D_2 \Rightarrow D_2 = 0 \text{ A}$$

O cálculo da tensão do indutor no início dos transientes ($v_L(0^+)$) é feito a partir da LTK (chave S na posição ‘B’), possibilitando que seu valor defina o mesmo

resultado para a derivada primeira dos transientes da corrente no tempo, logo após o chaveamento ($di(0^+)/dt$), nos três formatos:

$$v_L(0^+) = -[v_C(0^+) + v_R(0^+)] \Rightarrow v_L(0^+) = -(40 + 400 \cdot 0) \Rightarrow v_L(0^+) = -40 \text{ V}$$

O valor negativo da tensão no indutor no início do transiente significa que, nesse momento, ele recebe toda a tensão do capacitor com polaridade contrária pelo fato de não haver corrente no início com a chave na posição ‘B’ (o indutor se opõe à variação abrupta dessa variável e a condição inicial da corrente é zero), mantendo o equacionamento da LTK citada acima. Logo:

$$\frac{di(0^+)}{dt} = \frac{v_L(0^+)}{L} = -\frac{40}{0,2} = -200 = D_1 - 0 \Rightarrow D_1 = -200 \text{ A/s} \quad (\text{e1})$$

O valor alto da constante D_1 informa que a taxa de decaimento (valor negativo) do sinal do transiente é na faixa de milissegundos, como pode ser observado nos gráficos da Figura 2.66, na medida em que:

$$-200 \text{ A/s} = -0,2 \text{ A/ms}$$

- **Passo 5:** Expressão completa da variável pedida para o transiente.

$$i(t) = D_1 \cdot t \cdot e^{-1.000t} + D_2 \cdot e^{-1.000t}$$

$$i(t) = -200 \cdot t \cdot e^{-1.000t} \quad \text{A para } t \geq 0$$

- **Passo 6:** Teste da validade da expressão final para o transiente.

Para $t = 0^+$:

$$i(0^+) = -200 \cdot 0 \cdot e^0 = 0 \text{ A}$$

Para $t \rightarrow \infty$:

$$i(t \rightarrow \infty) = -200 \cdot \infty \cdot e^{-\infty} = 0 \text{ A}$$

Ambos os valores testados para o tempo podem ser consultados no gráfico da Figura 2.66. Nada se pode concluir sobre o tipo de resposta (natural ou ao degrau) para o transiente de $i(t)$, já que ela sempre irá para zero no regime #2 devido ao capacitor ser substituído por um circuito aberto. A definição da resposta em termos de equação poderia ser comprovada pela tensão no capacitor que, na resposta ao degrau, vai para um valor não nulo, como será visto mais adiante na resposta ao degrau.

Para o valor $R_3 = 800 \Omega$, tem-se:

- **Passo 1:** Cálculo de α e ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{200 \times 10^{-3} \cdot 5 \times 10^{-6}}} = 1 \text{ krad/s}, \quad \omega_0^2 = 1 \times 10^6 \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

$$\alpha = \frac{R}{2 \cdot L} = \frac{800}{2 \cdot 200 \times 10^{-3}} = 2.000 \text{ rad/s}, \quad \alpha^2 = 4 \times 10^6 \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

O resultado de ω_0^2 é mantido por não se variar os valores de C e L , enquanto o de α^2 é alterado por modificar o valor de R na obtenção dos formatos.

- **Passo 2:** Cálculo das raízes s_1 e s_2 :

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -2.000 + \sqrt{4 \times 10^6 - 1 \times 10^6} = -267,95 \text{ rad/s}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -2.000 - \sqrt{4 \times 10^6 - 1 \times 10^6} = -3.732,10 \text{ rad/s}$$

- **Passo 3:** Definição da expressão do transiente na comparação entre α^2 e ω_0^2 , que resultou em $\alpha^2 > \omega_0^2$ indicando o formato superamortecido. Logo:

$$i(t) = A_1 \cdot e^{s_1 t} + A_2 \cdot e^{s_2 t} \quad \text{para } t \geq 0$$

$$i(t) = A_1 \cdot e^{-267,95t} + A_2 \cdot e^{-3.732,10t}$$

- **Passo 4:** Obtenção das constantes em função do formato do transiente, sabendo-se que a corrente inicial no indutor é 0 A.

$$i(0^+) = A_1 \cdot e^0 + A_2 \cdot e^0 \Rightarrow A_1 + A_2 = 0 \text{ A} \quad (\text{e1})$$

$$\begin{aligned} \frac{di(0^+)}{dt} &= A_1 \cdot s_1 + A_2 \cdot s_2 \\ -200 &= -267,95 \cdot A_1 - 3.732,10 \cdot A_2 \quad (\text{e2}) \end{aligned}$$

Solucionando o sistema (e1) e (e2):

$$A_1 + A_2 = 0 \quad (\text{e1})$$

$$-267,95 \cdot A_1 - 3.732,10 \cdot A_2 = -200 \quad (\text{e2})$$

Obtém-se:

$$A_1 = -5,77 \text{ mA} \quad \text{e} \quad A_2 = 5,77 \text{ mA}$$

- **Passo 5:** Expressão completa da variável pedida para o transiente.

$$i(t) = A_1 \cdot e^{-267,95t} + A_2 \cdot e^{-3.732,10t}$$

$$i(t) = -5,77 \cdot e^{-267,95t} + 5,77 \cdot e^{-3.732,10t} \text{ mA para } t \geq 0$$

- **Passo 6:** Teste da validade da expressão final para o transiente. Para $t = 0$:

$$i(0^+) = -5,77 \cdot e^0 + 5,77 \cdot e^0 = 0 \text{ A}$$

Para $t \rightarrow \infty$:

$$i(t \rightarrow \infty) = -5,77 \cdot e^{-\infty} + 5,77 \cdot e^{-\infty} = 0 \text{ A}$$

Para o valor $R_3 = 200 \Omega$, tem-se:

- **Passo 1:** Cálculo de α e ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{200 \times 10^{-3} \cdot 5 \times 10^{-6}}} = 1 \text{ krad/s}, \quad \omega_0^2 = 1 \times 10^6 \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

$$\alpha = \frac{R}{2 \cdot L} = \frac{200}{2 \cdot 200 \times 10^{-3}} = 500 \text{ rad/s}, \quad \alpha^2 = 0,25 \times 10^6 \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

O resultado de ω_0^2 é mantido por não se variar os valores de C e L , enquanto o de α^2 é alterado por modificar o valor de R na obtenção dos formatos.

- **Passo 2:** Cálculo das raízes s_1 e s_2 :

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -500 + \sqrt{0,25 \times 10^6 - 1 \times 10^6}$$

$$s_1 = -500 + j \cdot \sqrt{1 \times 10^6 - 0,25 \times 10^6} = -500 + j866,03 \text{ rad/s}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -500 - \sqrt{0,25 \times 10^6 - 1 \times 10^6}$$

$$s_2 = -500 - j \cdot \sqrt{1 \times 10^6 - 0,25 \times 10^6} = -500 - j866,03 \text{ rad/s}$$

Onde: $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 866,03 \text{ rad/s}$ (frequência angular de amortecimento)

- **Passo 3:** Definição da expressão do transiente na comparação entre α^2 e ω_0^2 que resultou em $\alpha^2 < \omega_0^2$ indicando o formato subamortecido. Logo:

$$i(t) = B_1 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega_d t) + B_2 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \text{sen}(\omega_d t)$$

$$i(t) = B_1 \cdot e^{-500t} \cdot \cos(866,03t) + B_2 \cdot e^{-500t} \cdot \text{sen}(866,03t) \quad \text{para } t \geq 0$$

- **Passo 4:** Obtenção das constantes em função do formato do transiente, sabendo-se que a corrente inicial no indutor é nula.

$$i(0^+) = B_1 \cdot e^0 \cdot \cos(0) + B_2 \cdot e^0 \cdot \text{sen}(0) \Rightarrow B_1 = 0 \text{ A} \quad (\text{e1})$$

$$\begin{aligned} \frac{di(0^+)}{dt} &= -\alpha \cdot B_1 + \omega_d \cdot B_2 \\ -200 &= -500 \cdot B_1 + 866,03 \cdot B_2 \quad (\text{e2}) \end{aligned}$$

Substituindo B_1 da (e1) na (e2), obtém-se:

$$B_2 = -230,94 \text{ mA}$$

- **Passo 5:** Expressão completa da variável pedida para o transiente.

$$i(t) = B_1 \cdot e^{-500t} \cdot \cos(866,03t) + B_2 \cdot e^{-500t} \cdot \text{sen}(866,03t)$$

$$i(t) = -230,94 \cdot e^{-500t} \cdot \text{sen}(866,03t) \text{ mA} \quad \text{para } t \geq 0$$

- **Passo 6:** Teste da validade da expressão final para o transiente.

Para $t = 0$:

$$i(0^+) = -230,94 \cdot e^0 \cdot \text{sen}(0) = 0 \text{ A}$$

Para $t \rightarrow \infty$:

$$i(t \rightarrow \infty) = -230,94 \cdot e^{-\infty} \cdot \text{sen}(\infty) = 0 \text{ A}$$

Tanto no transiente criticamente amortecido e subamortecido não há o componente que depende da condição inicial da corrente no indutor, no caso o D_2 e o B_1 , respectivamente. Essas mesmas constantes seriam zero no caso do RLC paralelo e com a condição da tensão inicial no capacitor ser zero, como mostrado na Figura 2.62. Sempre se observa a complementaridade entre variáveis e valores iniciais nas topologias RLC série e paralelo e, como consequência, nas constantes.

Com relação à variação da resistência, esse fato também se observa na geração dos três formatos nos transientes, na medida em que a frequência de amortecimento tem a resistência no denominador no paralelo e numerador no layout série.

Para obter o transiente das tensões em cada componente (v_C , v_L e v_R) basta aplicar a fórmula que relaciona a corrente com elas. Como a resposta é natural, a energia inicial armazenada no capacitor e/ou indutor se esgota ao ser entregue à carga resistiva, levando todas elas para 0 no regime #2. O importante é mencionar que o tipo de transiente da tensão é o mesmo da corrente, ou seja:

- a) $\alpha^2 > \omega_0^2$ – Formato superamortecido

$$v_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt} = A_1 \cdot e^{s_1 t} + A_2 \cdot e^{s_2 t} \quad \text{para } t > 0 \quad (2.118)$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) dt + V_0 = A_1 \cdot e^{s_1 t} + A_2 \cdot e^{s_2 t} \quad \text{para } t \geq 0 \quad (2.119)$$

$$v_R(t) = R \cdot i(t) = A_1 \cdot e^{s_1 t} + A_2 \cdot e^{s_2 t} \quad \text{para } t > 0 \quad (2.120)$$

Evidentemente, as constantes A_1 e A_2 produzem valores diferentes para cada transiente de tensão. No regime #1, a tensão inicial no indutor e no resistor foram calculadas como -40 V e 0 V , respectivamente, enquanto a do indutor é a fornecida como $IC = 0 \text{ A}$ (I_0).

- b) $\alpha^2 < \omega_0^2$ – Formato subamortecido, com as mesmas considerações feitas para o superamortecido.
- c) $\alpha^2 = \omega_0^2$ – Formato criticamente amortecido, análogas às feitas com as do superamortecido.

• Circuito RLC com resposta ao degrau na topologia série

Considere o circuito RLC na topologia série apresentado na Figura 2.67. Antes do acionamento da chave com ela na posição ‘A’, o circuito conectado ao capacitor C é o da esquerda, formado por V_1 , R_1 e R_2 . Quando a chave S vai para a posição ‘B’, o circuito remanescente é formado pela associação série de C , R_3 , L e V_2 . Assim, o transiente do sinal no novo layout é de resposta ao degrau devido à fonte V_2 . Como o capacitor se opõe à variação abrupta no instante do chaveamento, tem-se $v_C(0^-) = v_C(0) = v_C(0^+)$.

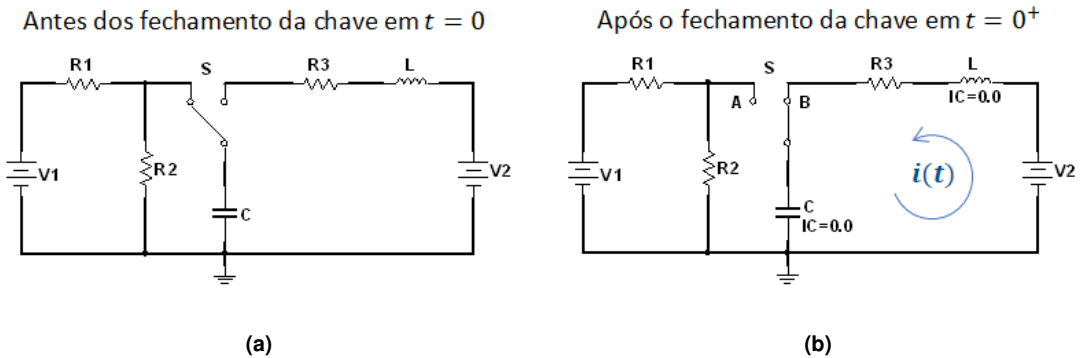


Figura 2.67: Circuito RLC série com transiente em resposta ao degrau

Percebe-se que as condições iniciais, tensão no capacitor e corrente no indutor, são nulas e referenciadas na Figura 2.67b como $IC = 0,0$. Entretanto, devido à carga do capacitor, quando a chave S está na posição ‘A’ (Figura 2.67a), a tensão nos terminais do capacitor no início do transiente é a mesma da resposta natural citada anteriormente, o que fará com que a tensão nos terminais do indutor, que era 0 (chave em ‘A’), salte para um valor obtido pela aplicação da LTK:

$$v_C(0^+) + v_R(0^+) + v_L(0^+) = -V_2$$

Pelo fato de o indutor ter a corrente como variável contínua, ou seja $i(0^-) = i(0) = i(0^+)$, a tensão no resistor R_3 é nula, pois na condição inicial ela é fornecida como 0 ($IC = 0,0$). Da mesma forma, a tensão é segura no chaveamento, ou seja, a validade da LTK é também para o instante logo após o chaveamento:

$$v_C(0^+) + 0 + v_L(0^+) = -V_2 \quad \Rightarrow \quad v_L(0^+) = -[V_2 + v_C(0^+)]$$

Essas considerações iniciais serão vistas mais adiante, quando forem atribuídos valores aos componentes do circuito. Antes, é necessário comentar sobre as principais diferenças entre as respostas natural e ao degrau no circuito RLC série, o que tem correspondência com essas respostas feitas para o RLC paralelo, considerando a complementaridade entre as variáveis tensão e corrente:

- a) No caso, a variável de interesse é a tensão nos terminais do capacitor que não vai para zero no regime #2 pela presença do forçante (V_2 no circuito da Figura 2.67b).

b) Da mesma forma que na resposta ao degrau do RLC paralelo empregam-se constantes com ‘linha’ para diferenciar nos cálculos dos transientes em relação à resposta natural, acontece no caso da topologia série com a tensão no capacitor. Já os transientes de corrente são os mesmos da resposta natural, sendo ambas as expressões mostradas abaixo para os três formatos:

- $\alpha^2 > \omega_0^2$ – **Formato superamortecido**

$$v_C(t) = V_f + A'_1 \cdot e^{s_1 t} + A'_2 \cdot e^{s_2 t} \quad \text{para } t \geq 0 \quad (2.121)$$

$$i(t) = A_1 \cdot e^{s_1 t} + A_2 \cdot e^{s_2 t} \quad \text{para } t > 0$$

- $\alpha^2 = \omega_0^2$ – **Formato criticamente amortecido**

$$v_C(t) = V_f + D'_1 \cdot t \cdot e^{-\alpha t} + D'_2 \cdot e^{-\alpha t} \quad \text{para } t \geq 0 \quad (2.122)$$

$$i(t) = D_1 \cdot t \cdot e^{-\alpha t} + D_2 \cdot e^{-\alpha t} \quad \text{para } t > 0$$

- $\alpha^2 < \omega_0^2$ – **Formato subamortecido**

$$v_C(t) = V_f + B'_1 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega_d t) + B'_2 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_d t), \quad t \geq 0 \quad (2.123)$$

$$i(t) = B_1 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega_d t) + B_2 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_d t) \quad \text{para } t > 0$$

c) Como a variável de interesse na resposta ao degrau é a tensão no capacitor, nas equações dos transientes serão consideradas essa função e sua derivada de primeira ordem no instante do chaveamento, Eq. 2.124 e Eq. 2.125, respectivamente, que permitem calcular as duas constantes com ‘linha’ que precisam ser obtidas e colocadas na expressão final de cada formato de transiente. Assim:

$$v_C(0) = V_f + \text{resposta natural}(0) \quad \text{para } t \geq 0 \quad (2.124)$$

$$\frac{dv_C(0)}{dt} = \frac{i_C(0)}{C} \Rightarrow \frac{dv_C(0)}{dt} = \frac{i(0)}{C} \quad (2.125)$$

Lembrando que pela presença do indutor, que segura mudança abrupta da corrente (variável contínua no chaveamento), $i_C(0) = i_L(0) = i_R(0) = i(0)$ ocorre no circuito RLC série, fazendo com que a restrição no tempo imediatamente após a ação da chave não exista. Além disso, a tensão no capacitor também é variável contínua e, portanto, ambas as equações são calculadas no tempo de chaveamento ($t = 0$).

- $\alpha^2 > \omega_0^2$ – **Formato superamortecido**

$$v_C(0) = V_f + A'_1 \cdot e^0 + A'_2 \cdot e^0 \Rightarrow v_C(0) = V_f + A'_1 + A'_2 \quad (2.126)$$

$$\frac{dv_C(0)}{dt} = \frac{i(0)}{C} = s_1 \cdot A'_1 + s_2 \cdot A'_2 \quad (2.127)$$

- $\alpha^2 < \omega_0^2$ – **Formato subamortecido**

$$v_C(0) = V_f + B'_1 \cdot e^0 \cdot \cos(0) + B'_2 \cdot e^0 \cdot \sin(0) \Rightarrow v_C(0) = V_f + B'_1 \quad (2.128)$$

$$\frac{dv_C(0)}{dt} = \frac{i(0)}{C} = \omega_d \cdot B'_2 - \alpha \cdot B'_1 \quad (2.129)$$

- $\alpha^2 = \omega_0^2$ – **Formato criticamente amortecido**

$$v_C(0) = V_f + D'_1 \cdot 0 \cdot e^0 + D'_2 \cdot e^0 \Rightarrow v_C(0) = V_f + D'_2 \quad (2.130)$$

$$\frac{dv_C(0)}{dt} = \frac{i(0)}{C} = D'_1 - \alpha \cdot D'_2 \quad (2.131)$$

Para mostrar os três possíveis formatos de transiente de segunda ordem, é utilizado o mesmo circuito da Figura 2.67. Na Figura 2.68 são mostrados os circuitos RLC série com os valores dos componentes e das condições iniciais (IC) da tensão no capacitor e corrente no indutor com valores nulos, juntamente com os gráficos dos transientes para a resposta ao degrau. Para ser possível obter os três formatos no transiente, o valor da resistência R_3 no circuito série é alterado, para os valores de 400 Ω , 200 Ω e 100 Ω , nos mesmos procedimentos feitos anteriormente.

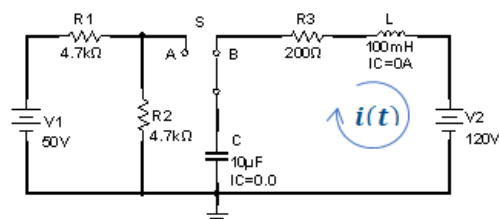
Os valores são invariáveis para os outros componentes e para as fontes de tensão $V_1 = 50$ V e $V_2 = 120$ V. No regime #1, antes da chave ser alterada da posição ‘A’ para ‘B’, tanto o indutor quanto o capacitor estão desenergizados, ou seja, a tensão inicial nos terminais do capacitor e a corrente no indutor são zero. Entretanto, no caso do capacitor, com a chave na posição ‘A’ a tensão em seus terminais é obtida com o divisor de tensão (transiente de primeira ordem RC com resposta ao degrau):

$$v_C(0^-) = v_C(0) = v_C(0^+) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot V_1 \Rightarrow v_C(0) = \frac{4,7k}{4,7k + 4,7k} \cdot 50 = 25 \text{ V}$$

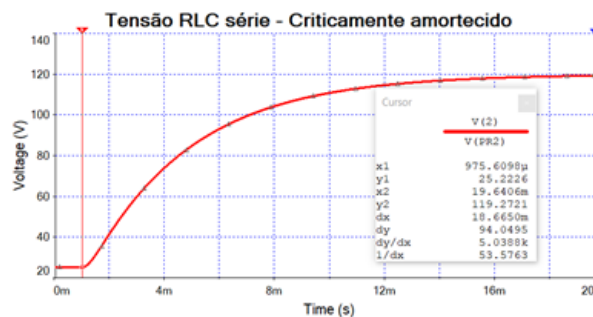
Como no regime #2 (chave na posição ‘B’) o capacitor se carrega em virtude da fonte ter a mesma polaridade arbitrada para a tensão no capacitor, elevando a tensão inicial de 25 V para:

$$v_C(t \rightarrow \infty) = V_2 = V_f \Rightarrow V_f = 120 \text{ V}$$

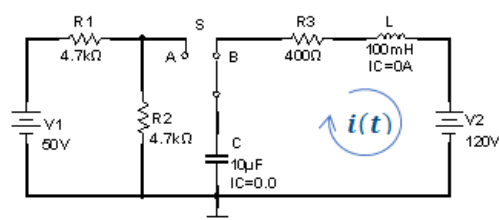
Antes de fazer os cálculos para as expressões dos transientes da tensão no capacitor para os três formatos, é importante mencionar que na simulação, onde se obteve os gráficos no Multisim, o tempo de chaveamento foi de $t = 1$ ms e nas expressões desses sinais, a validade dos mesmos e de sua comprovação (passo 6) é feita em $t = 0$ s. Lembrando novamente que isso não acarreta erro na obtenção das equações, pois ao invés de apenas a variável t no expoente, deveria ser usado $(t - 1 \text{ ms})$ e esse valor de tempo de chaveamento só foi utilizado para melhor se observar a condição do circuito no regime #1.



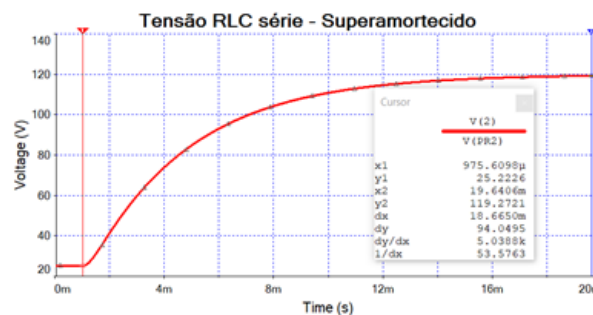
(a1)



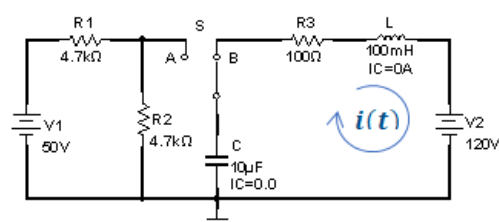
(a2)



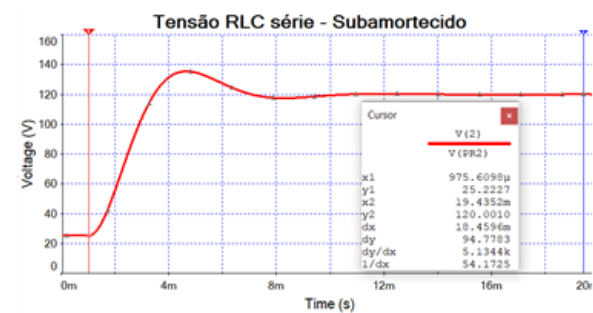
(b1)



(b2)



(c1)



(c2)

Figura 2.68: Exemplo de circuito RLC na topologia série com resposta ao degrau.

Para o valor $R_3 = 200 \Omega$, tem-se:

- **Passo 1:** Cálculo de α e ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{100 \times 10^{-3} \cdot 10 \times 10^{-6}}} = 1.000 \text{ rad/s}, \quad \omega_0^2 = 1 \times 10^6 \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

$$\alpha = \frac{R}{2 \cdot L} = \frac{200}{2 \cdot 100 \times 10^{-3}} = 1.000 \text{ rad/s}, \quad \alpha^2 = 1 \times 10^6 \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

- **Passo 2:** Cálculo das raízes s_1 e s_2 :

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -1.000 + \sqrt{0} = -1.000 \text{ rad/s}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -1.000 - \sqrt{0} = -1.000 \text{ rad/s}$$

- **Passo 3:** Definição da expressão do transiente na comparação entre α^2 e ω_0^2 . Como $\alpha^2 = \omega_0^2 = 1 \times 10^6 \text{ rad}^2/\text{s}^2$, o formato é criticamente amortecido, produzindo duas raízes reais e iguais, conforme encontrado no passo 2. Logo:

$$v_C(t) = V_f + D'_1 \cdot t \cdot e^{-\alpha t} + D'_2 \cdot e^{-\alpha t}$$

$$v_C(t) = 120 + D'_1 \cdot t \cdot e^{-1.000t} + D'_2 \cdot e^{-1.000t} \text{ V para } t \geq 0$$

- **Passo 4:** Obtenção das constantes em função do formato do transiente, sabendo-se que a tensão inicial no capacitor e corrente no indutor são zero (descarregados).

$$v_C(0) = 120 + D'_1 \cdot 0 \cdot e^0 + D'_2 \cdot e^0 \Rightarrow 25 = 120 + D'_2 \Rightarrow D'_2 = -95 \text{ V}$$

$$\frac{dv_C(0)}{dt} = D'_1 - \alpha \cdot D'_2 \Rightarrow \frac{i(0)}{C} = 0 = D'_1 - 1.000 \cdot (-95) \Rightarrow D'_1 = -95.000 \text{ V/s}$$

O valor da derivada da tensão no capacitor no tempo do chaveamento é zero ($dv_C(0)/dt = i(0)/C = 0$), pois a corrente no tempo de chaveamento é zero, condição inicial informada no indutor que é a mesma do capacitor, já que o circuito é série. Esse valor nulo na derivada pode ser observado nos três formatos (Figuras 2.68a2, 2.68b2 e 2.68c2) logo após o chaveamento, pois a tangente é zero.

Aqui também o valor alto de D'_1 informa que a taxa de variação do transiente criticamente amortecido, que é da ordem de milissegundos, pode ser conferido nos eixos dos tempos dos gráficos da Figura 2.68:

$$D'_1 = -95.000 \text{ V/s} = -95 \text{ V/ms} = -0,095 \text{ V}/\mu\text{s}$$

- **Passo 5:** Expressão completa da variável pedida para o transiente.

$$v_C(t) = 120 + D'_1 \cdot t \cdot e^{-1.000t} + D'_2 \cdot e^{-1.000t} \text{ V}$$

$$v_C(t) = 120 - 95.000 \cdot t \cdot e^{-1.000t} - 95 \cdot e^{-1.000t} \text{ para } t \geq 0$$

- **Passo 6:** Teste da validade da expressão final para o transiente.

Para $t = 0$:

$$v_C(0) = 120 - 95.000 \cdot 0 \cdot e^0 - 95 \cdot e^0 = 25 \text{ V}$$

Para $t \rightarrow \infty$:

$$v_C(t \rightarrow \infty) = 120 - 95.000 \cdot \infty \cdot e^{-\infty} - 95 \cdot e^{-\infty} = 120 \text{ V}$$

Ambos os valores testados para o tempo podem ser consultados nos gráficos da Figura 2.68, independente do formato. Nada se pode concluir sobre o tipo de resposta (natural ou ao degrau) para o transiente de $i(t)$, já que ela sempre irá para zero no regime #2 devido ao capacitor ser substituído por um circuito aberto. Porém, o tipo de resposta pode ser afirmado em relação à tensão no capacitor, considerando que ela é a variável que não vai para zero nesse regime, no caso seu valor é 120 V, que é a tensão da fonte V_2 .

Para o valor $R_3 = 400 \Omega$, tem-se:

- **Passo 1:** Cálculo de α e ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{100 \times 10^{-3} \cdot 10 \times 10^{-6}}} = 1.000 \text{ rad/s}, \quad \omega_0^2 = 1 \times 10^6 \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

$$\alpha = \frac{R}{2 \cdot L} = \frac{400}{2 \cdot 100 \times 10^{-3}} = 2.000 \text{ rad/s}, \quad \alpha^2 = 4 \times 10^6 \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

Lembrando que o resultado de ω_0^2 é mantido por não se variar os valores de C e L , enquanto o de α^2 é alterado por modificar o valor de R na obtenção dos formatos.

- **Passo 2:** Cálculo das raízes s_1 e s_2 :

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -2.000 + \sqrt{4 \times 10^6 - 1 \times 10^6} = -267,95 \text{ rad/s}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -2.000 - \sqrt{4 \times 10^6 - 1 \times 10^6} = -3.732,10 \text{ rad/s}$$

- **Passo 3:** Definição da expressão do transiente na comparação entre α^2 e ω_0^2 , que resultou em $\alpha^2 > \omega_0^2$ indicando o formato superamortecido. Logo:

$$v_C(t) = V_f + A'_1 \cdot e^{s_1 t} + A'_2 \cdot e^{s_2 t}$$

$$v_C(t) = 120 + A'_1 \cdot e^{-267,95t} + A'_2 \cdot e^{-3.732,10t} \text{ V para } t \geq 0$$

- **Passo 4:** Obtenção das constantes em função do formato do transiente, sabendo-se que no início o capacitor e o indutor estão descarregados, informando condições iniciais nulas.

$$v_C(0) = 120 + A'_1 + A'_2 \quad \Rightarrow \quad 25 = 120 + A'_1 + A'_2 \quad \Rightarrow \quad A'_1 + A'_2 = -95 \text{ V} \quad (\text{e1})$$

$$\frac{dv_C(0)}{dt} = A'_1 s_1 + A'_2 s_2 \Rightarrow \frac{i(0)}{C} = 0 = -267,95 \cdot A'_1 - 3.732,10 \cdot A'_2 \quad (\text{e2})$$

Solucionando o sistema (e1) e (e2):

$$A'_1 + A'_2 = -95 \text{ V} \quad (\text{e1})$$

$$-267,95 \cdot A'_1 - 3.732,10 \cdot A'_2 = 0 \quad (\text{e2})$$

Obtém-se:

$$A'_1 = -102,35 \text{ V} \quad \text{e} \quad A'_2 = 7,35 \text{ V}$$

- **Passo 5:** Expressão completa da variável pedida para o transiente.

$$v_C(t) = 120 + A'_1 \cdot e^{-267,95t} + A'_2 \cdot e^{-3.732,10t} \text{ V para } t \geq 0$$

$$v_C(t) = 120 - 102,35 \cdot e^{-267,95t} + 7,35 \cdot e^{-3.732,10t} \text{ V}$$

- **Passo 6:** Teste da validade da expressão final para o transiente.

Para $t = 0$:

$$v_C(0) = 120 - 102,35 \cdot e^0 + 7,35 \cdot e^0 = 25 \text{ V}$$

Para $t \rightarrow \infty$:

$$v_C(t \rightarrow \infty) = 120 - 102,35 \cdot e^{-\infty} + 7,35 \cdot e^{-\infty} = 120 \text{ V}$$

Para o valor $R_3 = 100 \Omega$, tem-se:

- **Passo 1:** Cálculo de α e ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{100 \times 10^{-3} \cdot 10 \times 10^{-6}}} = 1.000 \text{ rad/s}, \quad \omega_0^2 = 1 \times 10^6 \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

$$\alpha = \frac{R}{2 \cdot L} = \frac{100}{2 \cdot 100 \times 10^{-3}} = 500 \text{ rad/s}, \quad \alpha^2 = 0,25 \times 10^6 \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

Lembrando que o resultado de ω_0^2 é mantido por não se variar os valores de C e L , enquanto o de α^2 é alterado por modificar o valor de R na obtenção dos formatos.

- **Passo 2:** Cálculo das raízes s_1 e s_2 :

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -500 + j \cdot 866,03 \text{ rad/s}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -500 - j \cdot 866,03 \text{ rad/s}$$

Onde: $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 866,03 \text{ rad/s}$ (frequência angular de amortecimento).

- **Passo 3:** Definição da expressão do transiente na comparação entre α^2 e ω_0^2 que resultou em $\alpha^2 < \omega_0^2$ indicando o formato subamortecido. Logo:

$$v_C(t) = V_f + B'_1 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega_d t) + B'_2 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sen(\omega_d t)$$

$$v_C(t) = 120 + B'_1 \cdot e^{-500t} \cdot \cos(866,03t) + B'_2 \cdot e^{-500t} \cdot \sen(866,03t) \text{ V para } t \geq 0$$

- **Passo 4:** Obtenção das constantes em função do formato do transiente, sabendo-se que no início o capacitor se carregou com 25 V e o indutor está descarregado (corrente nula).

$$v_C(0) = 120 + B'_1 \cdot e^0 \cdot \cos(0) + B'_2 \cdot e^0 \cdot \sen(0) \Rightarrow B'_1 = -95 \text{ V} \quad (\text{e1})$$

$$\frac{dv_C(0)}{dt} = -\alpha \cdot B'_1 + \omega_d \cdot B'_2, \quad \frac{i(0)}{C} = 0 = -500 \cdot B'_1 + 866,03 \cdot B'_2 \quad (\text{e2})$$

Substituindo B'_1 de (e1) em (e2), obtém-se: $B'_2 = -54,85 \text{ V}$

- **Passo 5:** Expressão completa da variável pedida para o transiente.

$$v_C(t) = 120 - 95 \cdot e^{-500t} \cdot \cos(866,03t) - 54,85 \cdot e^{-500t} \cdot \sen(866,03t) \text{ V para } t \geq 0$$

- **Passo 6:** Teste da validade da expressão final para o transiente.

Para $t = 0$:

$$v_C(0) = 120 - 95 \cdot e^0 \cdot \cos(0) - 54,85 \cdot e^0 \cdot \sen(0) = 25 \text{ V}$$

Para $t \rightarrow \infty$:

$$v_C(t \rightarrow \infty) = 120 - 95 \cdot e^{-\infty} \cdot \cos(\infty) - 54,85 \cdot e^{-\infty} \cdot \sen(\infty) = 120 \text{ V}$$

2.3 REVISÃO TEXTUAL DA UNIDADE 3

Nas duas primeiras unidades foram revistos os conteúdos que tinham como fator comum o domínio DC nas fontes de alimentação, onde as três leis de circuitos elétricos (Ohm, LCK e LTK) e os métodos de minimização (diminuição do circuito) e análise (obtenção dos valores de uma ou mais variáveis) envolvem apenas cálculos com números reais. O motivo é o fato de que apenas fontes de tensão e/ou corrente DC (valores invariantes no tempo), tanto independente quanto dependente, além de resistores são envolvidos, fazendo com que operações aritméticas de soma/subtração (como a LTK e LCK) e multiplicação/divisão (Ohm) resultassem em dados reais.

Quando os circuitos alteram seu tipo de alimentação para alternada ou AC, não apenas resistores são considerados como elementos nos cálculos, mas também as reatâncias indutivas e capacitivas, já que os componentes indutores (curto) e capacitor (circuito aberto) não são mais retirados no regime AC de excitação do circuito. Como serão revistas, essas reatâncias surgem como números imaginários, os quais tem valores dependente da frequência do sinal de alimentação. Portanto, na alimentação AC, os cálculos são feitos com números complexos.

2.3.1 Fontes no domínio AC

Da mesma forma que no regime de alimentação DC, no domínio AC existem fontes de tensão e corrente, podendo ser independentes e dependentes. As fontes alternadas geram formas de sinais periódicos que podem ser de vários tipos, como retangulares, triangulares ou senoidais, conforme ilustra a Figura 2.69.

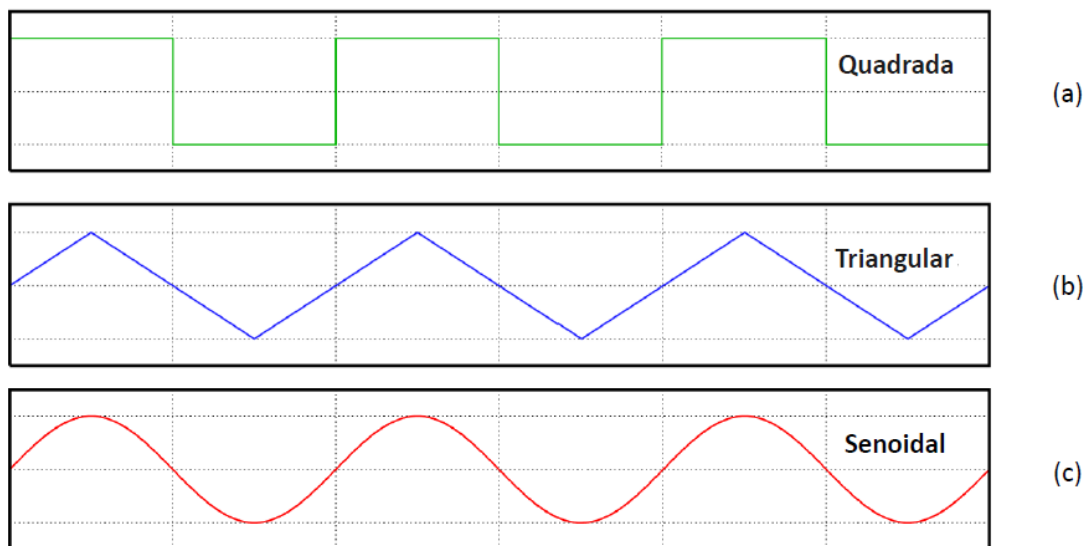


Figura 2.69: Formas de sinais alternados: (a) Quadrada, (b) Triangular e (c) Senoidal

A opção pelo uso de sinais alternados para alimentação de circuitos elétricos no formato senoidal, matematicamente expresso nas funções seno ou cosseno, é justificada por alguns fatores, sendo dois deles (SING, 2025):

- As máquinas geradoras de energia, como alternadores, transformam movimentos mecânicos em sinais elétricos no formato senoidal; e
- Máxima transferência e estabilidade na transmissão e distribuição de energia elétrica, uma vez que o formato senoidal proporciona uma variação suave e contínua do sinal, minimizando perdas no sistema, desde a geração até o consumo.

Existe a possibilidade de simplificação de circuitos ou sistemas elétricos para operar em outros formatos de forma satisfatória, caso se comprove que ocorra no funcionamento em formato senoidal.

Quando se diz que o formato é senoidal, não está sendo especificado se o sinal é descrito pela função matemática seno ou cosseno, já que ambas as funções são de mesmo formato no tempo, apenas defasadas de 90° , conforme pode-se observar na Figura 2.70. Percebe-se que a função seno está atrasada no tempo de 90° exatos em relação à do cosseno. Essa observação é de fundamental importância na representação desses sinais no domínio fasorial, que será revisado nesta seção.

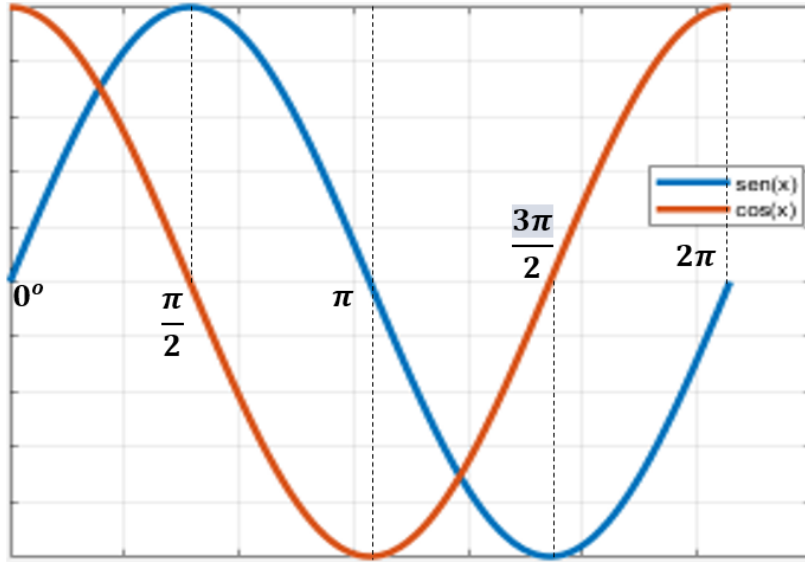


Figura 2.70: Sinais no tempo gerados pelas funções seno (cor azul) e cosseno (vermelho)

Dessa forma, matematicamente existe a possibilidade de representar o mesmo sinal usando ambas as funções, bastando empregar a regra da soma de ângulos, conforme mostra a Eq. 2.132.

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b) \quad (2.132)$$

Para exemplificar a defasagem entre seno e cosseno, basta fazer um dos ângulos somados na função cosseno da Eq. 2.132 ser 90° , chegando-se à conclusão que o cosseno está adiantado ($+90^\circ$) no tempo em relação ao seno ou, de outra forma, a função seno está atrasada (-90°) em relação ao cosseno.

$$\cos(a - 90^\circ) = \cos(a) \cdot \cos(90^\circ) + \sin(a) \cdot \sin(90^\circ)$$

$$\cos(a - 90^\circ) = \cos(a) \cdot 0 + \sin(a) \cdot 1$$

$$\cos(a - 90^\circ) = 0 + \sin(a) \Rightarrow \cos(a - 90^\circ) = \sin(a)$$

Se no resultado final da relação entre as funções atribuir ao ângulo a o termo ωt , de forma a representar essas funções ocorrendo em função do tempo com uma frequência angular ω , em radianos por segundo, chega-se à Eq. 2.133, a qual informa que se a fonte AC no tempo é formulada com a função seno e deseja-se representá-la como cosseno, basta retirar 90° de seu ângulo de fase, o valor que acompanha o termo ωt . No caso da Eq. 2.133, na função seno esse ângulo é zero e no cosseno, após transformação, passa a ser -90° ou $-\pi/2$, o que remete aos sinais dessas funções mostrados na Figura 2.70.

$$\cos(\omega t - 90^\circ) = \sin(\omega t) \quad (2.133)$$

O argumento citado como ângulo de fase é importante na representação de sinais no formato senoidal, tanto na função seno quanto cosseno, em função de defasagem entre sinais de tensões, de correntes e tensão-corrente nos circuitos na alimentação AC, conforme será visto nessa revisão. De forma antecipada, pode-se dizer que as reatâncias indutivas e capacitivas são as causas dessas defasagens entre os sinais, o que não ocorre com as resistências que não produzem defasagem nesses sinais (possuem a mesma fase).

Para finalizar a formulação dos sinais das fontes de alimentação AC nos circuitos, é necessário mencionar seu valor de pico V_p , que acompanha a sua descrição matemática, conforme indica o sinal da tensão no tempo mostrado na Eq. 2.134. Os outros argumentos da função cosseno já foram citados, no caso a frequência angular (ω) e a fase (ϕ).

$$v(t) = V_p \cdot \cos(\omega t + \phi) \quad (2.134)$$

Nos sinais AC existem dois tipos de frequência, a linear (f) medida em Hertz e a angular (ω) em radianos por segundo, sendo a relação entre ambas dadas pela Eq. 2.135. Para exemplificar, a frequência linear das tomadas no Brasil e, portanto, dos equipamentos que necessitam de energia elétrica (ar-condicionado, geladeira, etc.) é 60 Hz ou 377 rad/s.

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \quad (2.135)$$

É de se esperar que a resistência R em ambos os circuitos dissipe potência, porém fica a dúvida de como ela de fato é computada na alimentação AC. Graficamente a Figura 2.71 mostra as formas de onda da corrente que circula e a tensão nos terminais da carga R . Perceba que ambos os sinais estão no mesmo quadrante dos eixos, alternando entre o positivo e o negativo. Isso faz com que a potência seja sempre positiva, considerando que os sinais de tensão e corrente, positivos ou negativos, resultam no produto em um valor positivo, o que é de se esperar já que o resistor apenas consome potência. Observe que a frequência do sinal da potência média ativa na carga é o dobro das empregadas nos sinais de tensão e corrente.

Dessa forma o valor RMS é a área abaixo da curva da potência em um ciclo. Ainda que tenha explicação sob a perspectiva da potência, ele se aplica a sinais de tensão e corrente. Matematicamente esse valor, conforme definido como Raiz Média Quadrática (ou valor eficaz) de um sinal elétrico AC, conforme Eq. 2.136, onde o sinal é $v(t) = V_m \cdot \cos(\omega t)$.

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} V_m^2 \cdot \cos^2(\omega t + \phi) dt} \quad (2.136)$$

Desenvolvendo a Eq. 2.136 chega-se ao valor RMS do sinal (V_{rms}), dado pela Eq. 2.137, onde ele depende apenas do valor de pico do sinal original, não tendo nenhuma influência tanto da frequência angular quanto da fase do sinal. Isso é esperado, já que a área calculada considera a parte negativa de um sinal como positiva (quadrático) e o período total integrado (médio) independe desses parâmetros. A raiz

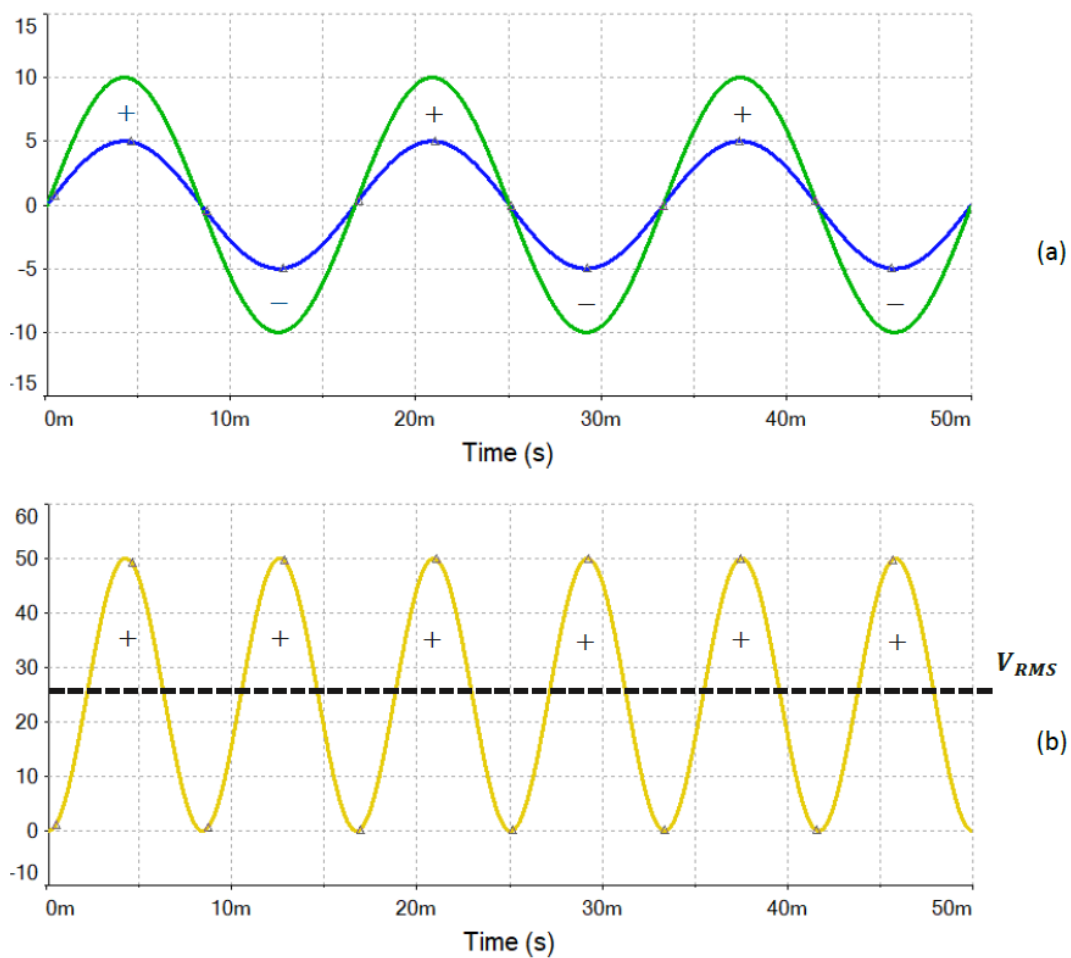


Figura 2.71: Representação gráfica do valor RMS: (a) formas de onda dos sinais tensão (verde) e corrente (azul) no resistor e (b) sinal da potência consumida

quadrada é aplicada na Eq. 2.136 para adequar o valor médio quadrático de um período do sinal. Na perspectiva de revisão de conteúdo, é dispensado o desenvolvimento matemático para partir da Eq. 2.136 e chegar a Eq. 2.137.

$$V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \quad (2.137)$$

Considere o circuito simples da Figura 2.72 que envolve uma fonte de tensão AC (V), um resistor (R) e um indutor (L), além de uma chave (S) que se fecha em um tempo arbitrado como zero ($t = 0$).

O equacionamento da LTK no circuito, após o fechamento da chave, é dado pela Eq. 2.138, onde a tensão referenciada como V é no domínio AC, ou seja, $V = v(t)$.

$$-V + R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di}{dt} = 0$$

$$V = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di}{dt} \quad (2.138)$$

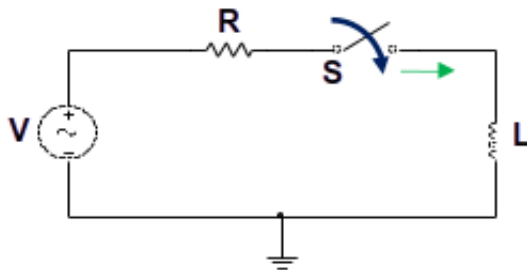


Figura 2.72: Circuito RL operando no regime AC

Resolvendo a Eq. 2.138 e considerando $V = v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$, chega-se à expressão da corrente no tempo, fornecida pela Eq. 2.139. Nessa revisão não há o interesse de demonstrar esse cálculo matemático. Além disso, essa expressão ficará bem mais compreensível quando a expressão da corrente for obtida no domínio fasorial e não do tempo, conforme ainda será demonstrado.

$i(t) = \text{Parcela transitória} + \text{Regime Permanente}$

$$i(t) = -\frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot L^2}} \cdot \cos(\phi - \theta) e^{-(R/L)t} + \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot L^2}} \cos(\omega t + \phi - \theta) \quad (2.139)$$

Conforme citado na Eq. 2.139, a expressão da corrente possui duas componentes, uma que decai exponencialmente no tempo se tornando sem ação após transcorrido o decréscimo pela função $e^{-(R/L)t}$, chamada de **parcela transitória**, e a outra que permanece alimentando o circuito no formato senoidal pela função $\cos(\omega t + \phi - \theta)$, referenciada como **regime permanente**, a única que é de interesse nessa revisão. Em outras palavras, as fontes AC estão sempre em regime permanente nas análises que

serão feitas. A Figura 2.73 mostra essas duas componentes simuladas no Multisim usando o circuito da Figura 2.72.

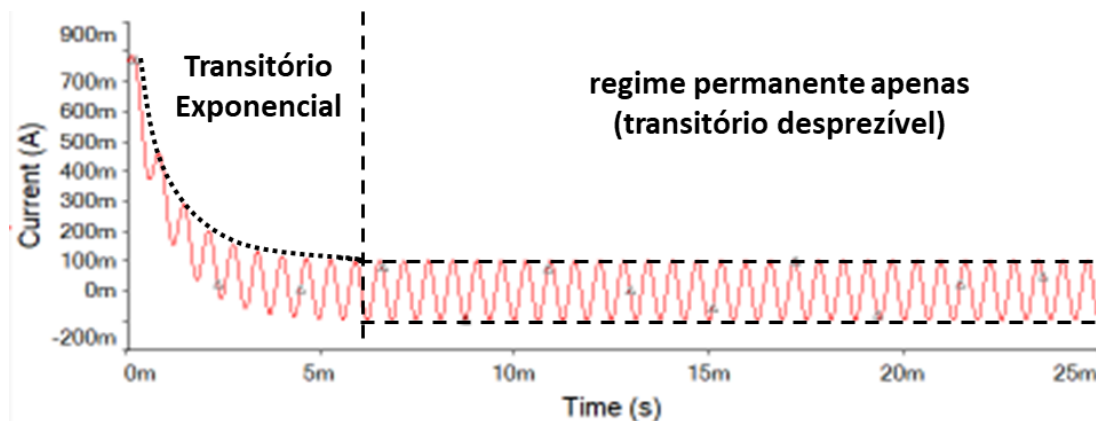


Figura 2.73: Componentes da resposta da corrente no circuito RL

Existem duas considerações importantes sobre a solução de sinais que surgem em circuitos com fontes de alimentação alternada no formato senoidal:

- a) A solução de qualquer variável pedida no circuito, seja tensão ou corrente, tem também o formato senoidal; e
- b) Para um circuito linear onde os componentes como resistores, indutores e capacitores possuem valores constantes, o sinal de resposta tem a mesma frequência que o da fonte. No caso do circuito RL da Figura 2.72, significa que o valor da frequência angular da fonte de tensão e da resposta da corrente são iguais.

A segunda consideração vai ser melhor observada quando tiver sendo feita a solução de circuitos no regime AC na forma fasorial, quando esses componentes se tornam impedâncias e, ainda que compõem o diagrama fasorial com sinais de corrente e tensão, não são fasores.

Por fim, faz-se necessário mencionar dois termos da parte de regime da componente da corrente citada na Eq. 2.139. O primeiro é a magnitude ou o valor de pico do sinal designado por I_m na Eq. 2.140 e o segundo refere-se à fase da corrente (β) em relação à da excitação de entrada (ϕ), a fonte de tensão, expressa na Eq. 2.141.

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot L^2}} \quad (2.140)$$

$$\beta = \phi - \theta \quad (2.141)$$

Esse valor que relaciona o pico da tensão com o da corrente é o módulo da impedância vista pelos terminais da fonte e que é formada por um resistor e um

indutor em série, cujo cálculo é o denominador da Eq. 2.140. No domínio de alimentação AC, a lei de Ohm é ampliada para uma generalização como ficará mais claro na apresentação da ferramenta fasor e seu uso na solução de circuitos excitados por sinais alternados e senoidais, após ser levado para o domínio da frequência ou fasorial.

Com relação à defasagem entre os sinais da tensão de entrada (fase ϕ) e a corrente resultante (fase β) com o fechamento da chave, informando que a corrente está atrasada no tempo de um valor de ângulo θ . Esse atraso já era esperado, uma vez que o indutor impede variação abrupta da corrente por armazenar energia na forma de campo magnético.

2.3.2 A ferramenta fasor

Até basicamente o final do século XIX, os circuitos com alimentação AC eram solucionados no domínio do tempo, envolvendo cálculos com operações aritméticas de soma, subtração, multiplicação e divisão com o uso de funções trigonométricas como seno e cosseno. Foi em um artigo publicado em 1893 em Breslau na Alemanha que, pela primeira vez, a formulação dos fasores foi proposta para simplificação dos cálculos na solução desses tipos de circuitos, sistemas presentes no cotidiano humano, da casa à indústria. O Engenheiro Elétrico Alemão Charles Proteus Steinmetz (1865 – 1963), fazendo uso do plano complexo, proporcionou uma simplificação na solução dos circuitos AC de qualquer número de fases, como o monofásico que será abordado nesta revisão ao polifásico, como acontece no sistema trifásico de eletricidade das cidades.

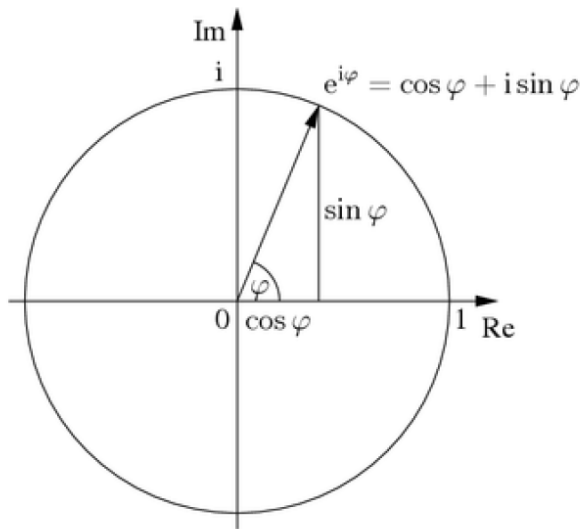
O plano complexo empregado no método proposto por Steinmetz foi crucial, na medida em que seu uso permite relacionar sinais variantes no tempo, na forma de seno ou cosseno, como entidades que dependem de seu módulo e fase, com as impedâncias resultantes de componentes passivos (resistor, indutor e capacitor) que são valores fixos, não fasores, para um determinado valor de frequência angular de excitação, conforme será visto mais adiante em detalhes.

Dessa forma, a identidade de Euler é a forma de associar a relação entre funções trigonométricas de sinais e exponenciais complexas, conforme mostra a Eq. 2.142.

$$e^{\pm j\phi} = \cos(\phi) \pm j \cdot \sin(\phi) \quad (2.142)$$

A questão de se usar o plano complexo e não o real, com o círculo trigonométrico, é que os componentes indutores e capacitores dependem de uma frequência angular que aparece na expressão dos sinais no tempo (ω). Nesse mesmo plano, os fasores tensão e corrente são envolvidos, considerando a frequência angular. A Figura 2.74 apresenta o plano complexo, onde um valor de ângulo (ϕ) na identidade de Euler é expresso.

Para se representar qualquer valor diferente do valor máximo unitário no plano complexo, basta multiplicar a identidade de Euler por esse dado. Como exemplos, tem-se as situações, uma para cada um dos quatro quadrantes do plano, com as mesmas projeções no eixo real e também no imaginário, somente que com sinais correspondentes



Observações:

1. A letra 'i' será substituída pela 'j', para não se confundir com corrente.
2. O valor da identidade de Euler está representado em um círculo unitário no plano complexo, já que a soma do quadrado de suas projeções (no eixo Real com o cosseno e Imaginário com o seno) sempre resulta em 1, conforme a distância euclidiana.

Figura 2.74: Representação de um ângulo no plano complexo usando a identidade de Euler

aos quadrantes.

$$10 \cdot e^{j60^\circ} = 10 \cdot (\cos(60^\circ) + j \cdot \sin(60^\circ)) = 5 + j \cdot 8,66 \quad \text{Quadrante I} \quad (0^\circ \text{ a } 90^\circ)$$

$$10 \cdot e^{j150^\circ} = 10 \cdot (\cos(150^\circ) + j \cdot \sin(150^\circ)) = -5 + j \cdot 8,66 \quad \text{Quadrante II} \quad (90^\circ \text{ a } 180^\circ)$$

$$10 \cdot e^{j240^\circ} = 10 \cdot (\cos(240^\circ) + j \cdot \sin(240^\circ)) = -5 - j \cdot 8,66 \quad \text{Quadrante III} \quad (180^\circ \text{ a } 270^\circ)$$

$$10 \cdot e^{j300^\circ} = 10 \cdot (\cos(300^\circ) + j \cdot \sin(300^\circ)) = 5 - j \cdot 8,66 \quad \text{Quadrante IV} \quad (270^\circ \text{ a } 360^\circ)$$

Assim, pode-se definir o fasor como um número complexo que contém apenas duas informações do sinal AC no domínio do tempo: seu módulo e ângulo de fase. Para chegar a essa definição é necessário estabelecer dois operadores que são aplicados na identidade de Euler (Eq. 2.142), o real ($\Re$) e o imaginário ($\Im$), onde o primeiro obtém a parte real da identidade (cosseno) e o segundo a imaginária (seno), conforme indicado nas Eqs. 2.143 e 2.144, respectivamente.

$$\Re(e^{j\theta}) = \cos(\theta) \quad (2.143)$$

$$\Im(e^{j\theta}) = \sin(\theta) \quad (2.144)$$

Ainda que possa usar ambos os operadores para transferir a fonte do domínio do tempo para o da frequência ou fasorial, como as fontes de excitação são sempre componentes reais, dá-se preferência aqui pelo operador real. Porém, convém lembrar que nas disciplinas de potência se usa o seno sem prejuízo de violar a identidade de Euler.

Suponha que uma fonte de tensão qualquer do circuito seja dada por $v(t) = V_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$. Para que seja possível representar essa fonte no domínio

fasorial, é necessário aplicar a transformada fasorial ($\mathcal{P}$) na expressão do sinal do tempo substituído pelo operador $\Re$ na Eq. 2.143:

$$\begin{aligned} v(t) &= \Re[V_m \cdot e^{j(\omega t + \phi)}] = \Re[V_m \cdot e^{j\phi} \cdot e^{j\omega t}] \\ \mathcal{P}(v(t)) &= \mathcal{P}(\Re[V_m \cdot e^{j\phi} \cdot e^{j\omega t}]) \\ \mathcal{P}(v(t)) &= V_m \cdot e^{j\phi} \end{aligned} \quad (2.145)$$

Algumas considerações sobre o desenvolvimento para se chegar na transformada fasorial expressa na Eq. 2.145:

- A equação da tensão no domínio do tempo, $v(t)$, foi substituída pela sua representação equivalente na identidade de Euler, através do operador Real $\Re$, uma vez que no tempo esse sinal é descrito pela função cosseno;
- Nessa substituição, o argumento da função cosseno, $\omega t + \phi$, é utilizado na identidade de Euler como ângulo no expoente imaginário $j \cdot (\omega t + \phi)$;
- Após o desenvolvimento com exponenciais, onde foram separados como produtos os termos com a fase ($e^{j\phi}$) e com a frequência angular que descreve a função cosseno no tempo ($e^{j\omega t}$), permitiu aplicar a transformada fasorial $\mathcal{P}$ na formulação de Euler no tempo; e
- A transformada fasorial faz acontecer a migração do domínio do tempo para o domínio fasorial, simplesmente retirando o termo $e^{j\omega t}$, ou seja, o termo $V_m \cdot e^{j\phi}$ que permanece é o fasor dessa tensão ($\vec{V}$), expresso pelos elementos invariantes, módulo V_m e fase ϕ , normalmente representado por letra maiúscula com um tipo de ênfase, neste texto uma seta.

A retirada do termo $e^{j\omega t}$ variante no tempo foi, à época da formulação de análise de circuitos no domínio fasorial por Steinmetz, o importante *insight*, pois permitiu representar o mesmo circuito no domínio fasorial também com elementos invariantes, no caso possíveis fasores de tensão e corrente, além de impedâncias. Essa condição é fundamental na simplificação dos cálculos envolvendo operações aritméticas básicas como soma, subtração, divisão e multiplicação, agora não tendo mais envolvimento com funções trigonométricas, mas valores invariantes definidos pelo módulo e fase, plotados em um diagrama para uma dada frequência angular ω .

Uma vez obtidos os valores das variáveis na análise do circuito, caso seja necessário, deve-se retornar do domínio fasorial para o do tempo, através da transformada fasorial inversa ($\mathcal{P}^{-1}$), com o desenvolvimento abaixo, usando-se um sinal fasorial arbitrário $\vec{X}$, conforme Eq. 2.146.

$$\begin{aligned} \vec{X} &= X_m \cdot e^{j\alpha}, \quad \mathcal{P}^{-1}(\vec{X}) = \mathcal{P}^{-1}(X_m \cdot e^{j\alpha}) \\ \mathcal{P}^{-1}(X_m \cdot e^{j\alpha} \cdot e^{j\omega t}), &\text{ inserção do termo } e^{j\omega t} \\ \mathcal{P}^{-1}(\vec{X}) &= x(t) = X_m \cdot \cos(\omega t + \alpha) \end{aligned} \quad (2.146)$$

Análogo à transformada fasorial, onde se retirou o termo $e^{j\omega t}$ para migrar do domínio do tempo para o da frequência ou fasorial, agora a transformada inversa fasorial faz a migração contrária, do fasorial para o tempo, inserindo o termo $e^{j\omega t}$. Como consequência, o fasor $\vec{X}$ é expresso no tempo como $X_m \cdot \cos(\omega t + \alpha)$.

A título de exemplificação dessa transição entre domínios tempo e fasorial é mostrado na Figura 2.75 os elementos de circuito em cada um deles. É importante fazer algumas observações sobre os componentes presentes nessas transições de domínios:

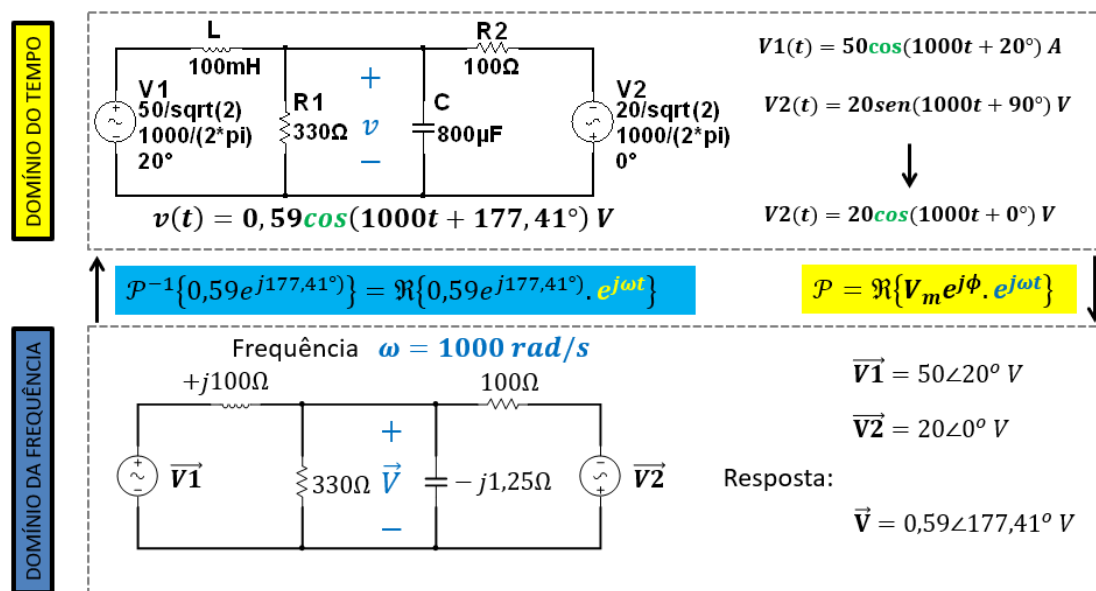


Figura 2.75: Exemplo de migração de circuitos entre domínios tempo e fasorial

- Os circuitos em ambos os domínios têm o mesmo layout, diferenciando nos valores dos elementos;
- No domínio do tempo o circuito possui duas fontes de tensão, $V_1(t)$ expressa com a função cosseno por $V_1(t) = 50 \cdot \cos(1000t + 20^\circ)$, e $V_2(t)$ com o seno como $V_2(t) = 20 \cdot \sin(1000t + 90^\circ)$, além de componentes passivos como os resistores $R_1 = 330\Omega$, $R_2 = 100\Omega$, o indutor $L = 100\text{mH}$ e o capacitor $C = 800\mu\text{F}$;
- A transformada fasorial deve ser aplicada a cada componente que tem seu valor variante no tempo ($V_1(t)$ e $V_2(t)$), lembrando-se que as fontes são fasores e as impedâncias resultantes dos componentes passivos são apenas números complexos (valores fixos e, portanto, não variam senoidalmente no tempo). Ambos fasores e impedâncias podem ser usados nos cálculos, já que todos são complexos;
- Entretanto, antes da aplicação da transformada fasorial, a fonte $V_2(t)$ deve ser expressa também como cosseno, o que implica em retirar 90° de sua fase, como indicado na Eq. 2.133;

- e) Na migração dos domínios, no caso, do tempo para o da frequência feita com a transformada fasorial $\mathcal{P}$ e vice-versa com a transformada fasorial inversa $\mathcal{P}^{-1}$, são destacados a retirada do termo $e^{j\omega t}$ e a inserção do mesmo, conforme expressos nas Eqs. 2.145 e 2.146, respectivamente. A fonte $V_1(t)$ torna-se no fasor $\vec{V}_1 = 50\angle 20^\circ$ e $V_2(t)$ em $\vec{V}_2 = 20\angle 0^\circ$;
- f) Os componentes passivos como os resistores são levados sem alteração de valores, já que independem da frequência angular das alimentações do circuito, tornando-se impedâncias puramente resistivas. Já o indutor e o capacitor são migrados como impedâncias puramente indutivas e capacitivas, respectivamente, pois dependem dessa frequência, conforme será revisto em detalhes mais adiante. Assim o indutor $L = 100\text{ mH}$ no tempo torna-se uma impedância indutiva no domínio fasorial de valor $+j \cdot 100\ \Omega$ e o capacitor $C = 800\ \mu\text{F}$ em impedância capacitiva de valor $-j \cdot 1,25\ \Omega$;
- g) Quando migrando do domínio do tempo para o fasorial, basta observar a função trigonométrica com que é expressa as fontes no tempo. Nesse texto será usado a função cosseno, ainda que possa ser usado o seno. Caso seja a função seno, deve-se levá-la para cosseno, acrescentando 90° a sua fase. Uma vez estando expressa em cosseno, o fasor é obtido facilmente, buscando o seu valor de pico e seu ângulo de fase; e
- h) Por fim, o resultado dos cálculos que se obteve no domínio da frequência o fasor $\vec{V} = 0,59\angle 177,41^\circ\text{ V}$, quando retornado ao domínio do tempo é facilmente expresso com os dois valores presentes nele (módulo e fase) e considerando a frequência de 1.000 rad/s que torna válido o diagrama fasorial, chega-se a $v(t) = 0,59 \cdot \cos(1000t + 177,41^\circ)\text{ V}$.

Uma questão pertinente é sobre o fato dos fasores girarem ou serem estáticos no domínio fasorial. Para responder de forma categórica a essa questão é só observar as transformadas usadas nas migrações entre os domínios. No caso de se levar o circuito do domínio do tempo para o da frequência, usando a transformada fasorial, o termo do tempo $e^{j\omega t}$ foi suprimido, ainda que o valor da frequência ω seja usado na definição dos elementos no destino. Isso implica em dizer que os fasores são estáticos e, assim, devem ser interpretados no plano complexo, juntamente com as impedâncias no circuito. Entretanto, para trazer de volta o resultado dos cálculos para o domínio do tempo, usando a transformada inversa fasorial, o termo $e^{j\omega t}$ é novamente inserido, fazendo os fasores girarem de forma a produzir o sinal no tempo. A Figura 2.76 ilustra os sinais no tempo gerados pelos giros de três fasores com frequência ω , sendo expresso tanto como a função seno (horizontal ao diagrama fasorial) quanto do cosseno (vertical).

A forma de representação dos fasores e também das impedâncias presentes no circuito pode ser tanto polar quanto retangular, conforme mostrado na Figura 2.77. A primeira é melhor para os cálculos que envolvam multiplicação ou divisão, como a lei de Ohm generalizada, onde o fasor tensão é igual ao produto do fasor corrente pela impedância envolvida. Isso acontece porque nos cálculos dessas operações aritméticas,

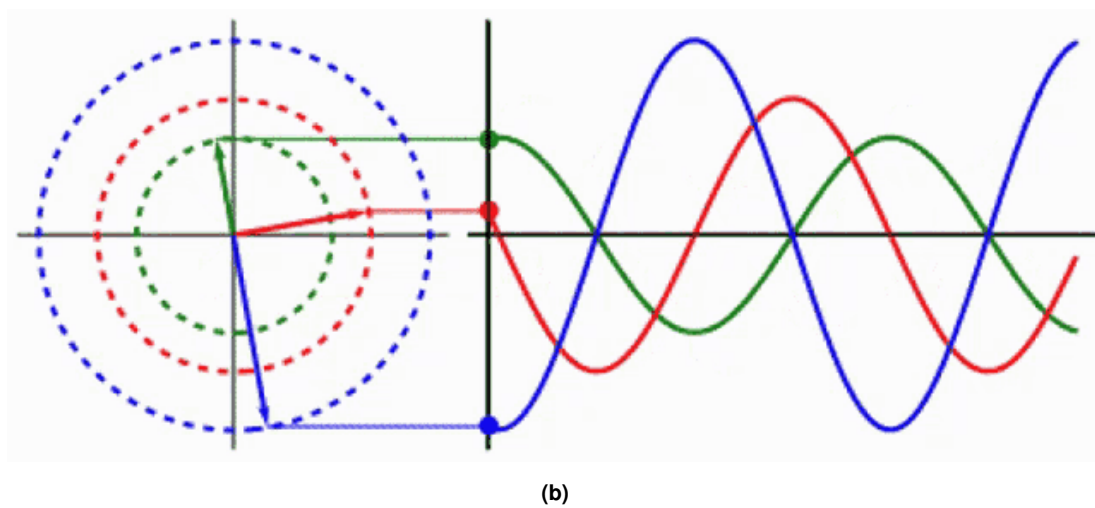
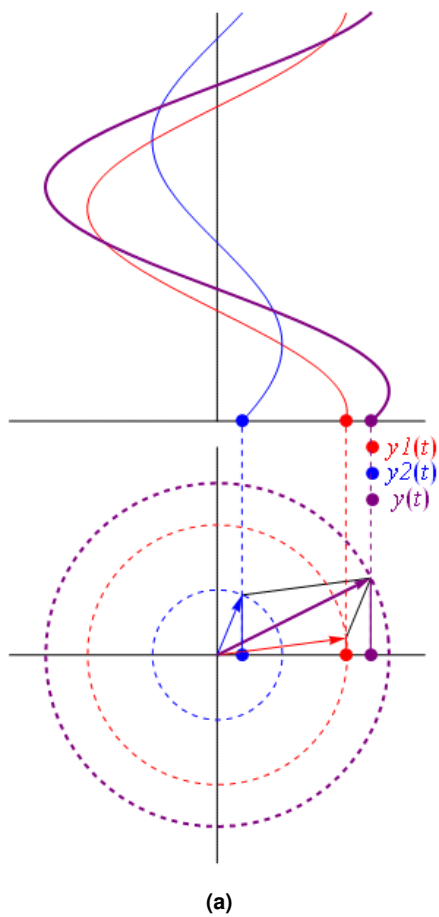


Figura 2.76: Migrando os três fasores do domínio da frequência para o tempo através de seu giro na frequência angular nas funções: a) cosseno e b) seno.

caso seja de multiplicação, o resultado tem como módulo o produto dos dois módulos e como fase a soma dos dois ângulos, de forma bastante simplificada. Já na divisão, o módulo resultante é a divisão dos módulos (numerador pelo denominador) e a fase resulta da subtração entre os ângulos do numerador e do denominador.

$$\vec{Z} = \vec{X} \cdot \vec{Y} = X_m \angle \alpha_X^\circ \cdot Y_m \angle \alpha_Y^\circ = X_m \cdot Y_m \angle (\alpha_X + \alpha_Y)^\circ \Rightarrow \vec{Z} = Z_m \angle \alpha_Z^\circ$$

$$(Z_m = X_m \cdot Y_m \quad \text{e} \quad \alpha_Z = (\alpha_X + \alpha_Y)^\circ)$$

$$\vec{W} = \frac{\vec{X}}{\vec{Y}} = \frac{X_m \angle \alpha_X^\circ}{Y_m \angle \alpha_Y^\circ} = \frac{X_m}{Y_m} \angle (\alpha_X - \alpha_Y)^\circ \Rightarrow \vec{W} = W_m \angle \alpha_W^\circ$$

$$(W_m = \frac{X_m}{Y_m} \quad \text{e} \quad \alpha_W = (\alpha_X - \alpha_Y)^\circ)$$

A forma retangular é empregada nas operações de soma e subtração, como acontece nas leis LCK e LTK. Isso é explicado pelo fato de nessas operações todos os valores reais dos elementos envolvidos produzirem o valor real da resultante, da mesma forma que acontece com as parcelas imaginárias.

$$\vec{Z} = \vec{X} + \vec{Y} = (R_X \pm jI_X) + (R_Y \pm jI_Y) = (R_X + R_Y) \pm j(I_X \pm I_Y)$$

$$\vec{Z} = R_Z + jI_Z, \quad (R_Z = R_X + R_Y \quad \text{e} \quad I_Z = I_X + I_Y)$$

$$\vec{W} = \vec{X} - \vec{Y} = (R_X \pm jI_X) - (R_Y \pm jI_Y) = (R_X - R_Y) \pm j(I_X - I_Y)$$

$$\vec{W} = R_W \pm jI_W, \quad (R_W = R_X - R_Y \quad \text{e} \quad I_W = I_X - I_Y)$$

A Figura 2.77 apresenta as formas de fasores em polar e retangular e um exemplo de soma de dois fasores para verificar graficamente essas informações. Em um mesmo diagrama são mostradas ambas as formas polar e retangular de um mesmo fasor $\vec{F}$ e no segundo a soma vetorial de dois fasores ($\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$) no formato polar apenas. Essa soma fasorial é a forma de verificação gráfica da LCK e LTK.

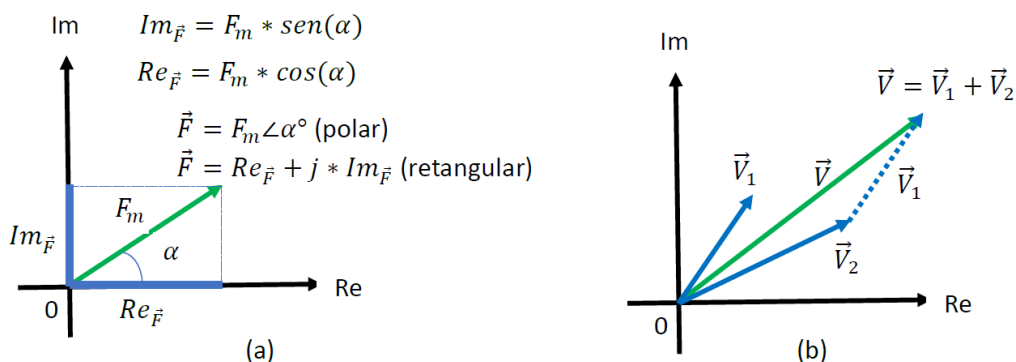


Figura 2.77: Diagramas fasoriais: a) representações polar e retangular e b) soma de fasores

A discussão da melhor maneira de representar as funções no tempo (seno ou cosseno) e qual o módulo usar na representação fasorial (pico ou RMS) são igualmente válidos nas opções mencionadas, sem prejuízo à validação da identidade de Euler. Deve-se apenas considerar qual função no tempo foi usada para migrar para o domínio fasorial, pois ela deve ser usada para retornar ao domínio do tempo, após realizar os cálculos, caso seja pedido.

Com relação à função no formato senoidal ser usada no tempo, existem literaturas que utilizam o cosseno, como está sendo feito aqui e outras que preferem o seno, como as empregadas nos estudos de disciplinas de potência (polifásicos, máquinas, etc.). Uma prevalência para o uso da função seno está no fato de a referência 0° do diagrama fasorial, o valor dessa função é zero. Lembre-se que quando a análise do circuito é feita no domínio fasorial, todos os dados desse diagrama estão estáticos.

No que se refere ao uso do módulo do fasor, se valor de pico ou RMS, a opção é mais clara na escolha. Ainda que, matematicamente, os sinais são expressos com o valor de pico, o uso de módulos com valor RMS é mais adequado, pelo simples fato de que a maioria dos equipamentos de medições usados leem eles, e não o pico, o qual só é possível por instrumentos gráficos como o osciloscópio. Surge a dúvida de como compatibilizar o formalismo matemático no domínio do tempo com o uso do valor RMS. Aqui a explicação é a aplicação do princípio de linearidade que sustenta que, se todas as fontes que excitam o circuito tiverem seus valores de pico dividido por raiz quadrada de dois, a resposta na análise também terá, resolvendo essa questão.

2.3.3 Impedâncias puras e mistas

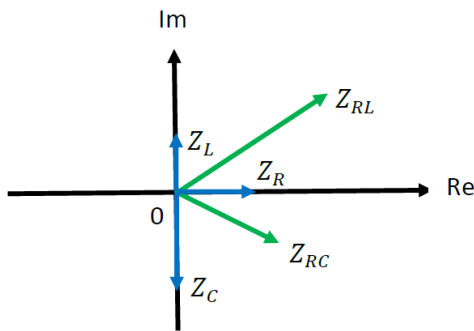
Um primeiro ponto a ser lembrado é que no domínio DC, os componentes passivos de circuitos, como o resistor, o indutor e o capacitor aparecem com dissipadores (resistor) ou armazenadores de energia (indutor e capacitor). Nesse regime os cálculos são realizados apenas com números reais (resistores) nas operações aritméticas empregadas nos métodos de minimização e análise, na medida em que o indutor e o capacitor podem ser substituídos no regime por um curto ou circuito aberto, respectivamente.

No domínio de alimentação de circuitos no regime AC, todas as fontes (correntes e tensões, independentes e dependentes) não são fixas no tempo, ao contrário variam no formato senoidal com uma frequência angular. Será revisado nesta seção como esses três componentes passivos (resistores, indutores e capacitores) saem do domínio do tempo e são transferidos ao fasorial como impedâncias puras (resistivas, indutivas e capacitivas). Pelo fato de as impedâncias não variarem senoidalmente no tempo, elas têm valor constantes e, portanto, não são consideradas fasores. A unidade da impedância resistiva, da mesma forma que as impedâncias e as reatâncias, é Ohms.

A impedância é um número complexo (Z), conforme expresso na Eq. 2.147, podendo conter apenas a parte real (Re_Z) ou imaginária (Im_Z), situação que são consideradas puras, ou ambos os valores dos eixos no plano complexo, quando são consideradas mistas.

$$Z = Re_Z \pm j \cdot Im_Z \quad (2.147)$$

A Figura 2.78 apresenta no plano complexo as possibilidades dessas impedâncias, onde se observa que elas se localizam no primeiro ou quarto quadrante. A não existência de possibilidade de se localizarem no segundo e terceiro quadrantes é devido ao fato de não haver resistência negativa, diferente das reatâncias que podem ter valores positivos (característica indutiva X_L , localizada no primeiro quadrante) ou negativa (característica capacitiva X_C , quarto quadrante).



Impedância puramente resistiva:

$$Z_R = Re_Z + j \cdot 0 = Re_Z$$

Impedância puramente indutiva:

$$Z_L = 0 + j \cdot Im_Z = +j \cdot Im_Z$$

Impedância puramente capacitiva:

$$Z_C = 0 - j \cdot Im_Z = -j \cdot Im_Z$$

Impedância mista de característica indutiva:

$$Z_{RL} = Re_Z + j \cdot Im_Z$$

Impedância mista de característica capacitiva:

$$Z_{RC} = Re_Z - j \cdot Im_Z$$

Figura 2.78: Possibilidades de localização das impedâncias no plano complexo

Relação dos fasores tensões e correntes nos componentes passivos

Antes de verificar matematicamente e de forma gráfica a relação entre a tensão e a corrente em cada um dos componentes passivos, vale relembrar que no regime DC, a lei de Ohm relaciona a tensão nos terminais com a corrente que circula pela resistência, conforme revisado na Unidade 1. No regime AC, essa lei passa a ser generalizada, já que relaciona, no domínio da frequência, as tensões e correntes fasoriais em cada um dos elementos passivos (impedâncias puras) ou de associações deles (impedâncias mistas), tendo como unidade o símbolo Ω . Assim, a impedância, qualquer que seja, será expressa conforme Eq. 2.148.

$$Z = \frac{\vec{V}}{\vec{I}} (\Omega) \quad (2.148)$$

Quando levado do domínio do tempo para o fasorial, o resistor permanece com o mesmo valor, uma vez que ele independe da frequência angular do sinal aplicado ao componente. Nesse domínio ele torna-se uma impedância puramente resistiva (Z_R), dada pela Eq. 2.149.

$$Z_R = \frac{\vec{V}}{\vec{I}} = \frac{V_m \angle \phi^\circ}{I_m \angle \phi^\circ} = \frac{V_m}{I_m} \angle (\phi - \phi)^\circ = |Z| \angle 0^\circ$$

$$Z_R = |Z| = R (\Omega) \quad (2.149)$$

Graficamente, a impedância resistiva no plano fasorial e os sinais de tensão e corrente no domínio temporal são mostrados na Figura 2.79.

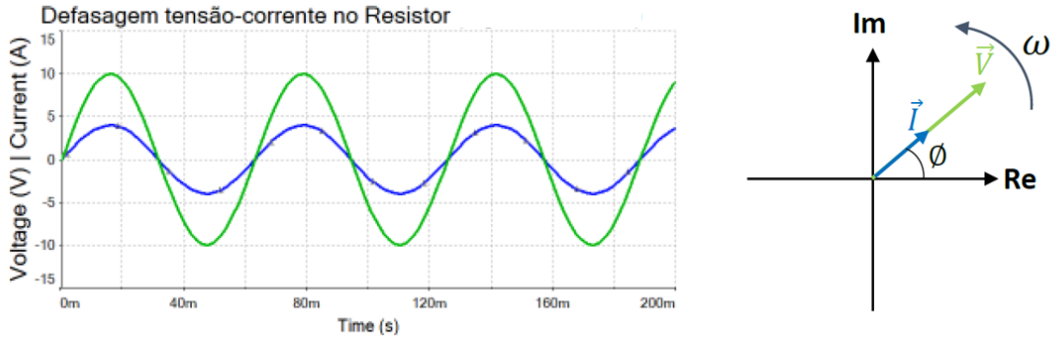


Figura 2.79: Relação tensão e corrente domínio do tempo e fasorial para impedância resistiva

No desenvolvimento para obtenção da Eq. 2.149, o ângulo da impedância é zero, o que implica em dizer que os fasores tensão e corrente nesse componente são colineares, já que possuem a mesma fase (ϕ), ou seja, defasagem nula. No tempo percebem-se as mesmas fases, já que as ondas se encaixam. Observe que no diagrama fasorial da Figura 2.79 é indicado o valor da frequência angular dos sinais no tempo que, para o resistor, não tem efeito, considerando que o seu valor independe dessa frequência. Lembrar que o resistor só dissipa potência e, assim, não defasa os sinais dos fasores tensão e corrente.

Outra informação importante é que a obtenção dos sinais dessas variáveis no tempo é feita pelo giro dos fasores, já que é aplicada a transformada fasorial inversa, conforme mencionado anteriormente. Essa situação de montagem do sinal no tempo pelos giros dos fasores é sempre válida com a migração do domínio da frequência para o tempo, como ilustrado na Figura 2.76.

Para o caso do indutor e capacitor, a ida do domínio do tempo para o fasorial faz com que os valores desses dois componentes sejam transformados em impedâncias puramente indutivas e capacitivas, respectivamente, as quais dependem do valor da frequência angular das fontes. Dessa forma, um diagrama fasorial só é válido para o mesmo valor dessa frequência que, caso mude, altera também o diagrama devido à alteração nos valores dessas impedâncias.

No caso do indutor, na migração para o domínio fasorial, ele é substituído no circuito por uma impedância puramente indutiva e seu valor depende da frequência angular dos sinais tensão e corrente no tempo. Dessa maneira, suponha que o indutor seja alimentado com uma corrente expressa no tempo por $i(t) = I_m \cdot \cos(\omega t + \theta_i)$. No desenvolvimento a seguir é obtida a impedância puramente indutiva (Z_L) dada

pela Eq. 2.150.

$$v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = L \cdot \frac{d(I_m \cdot \cos(\omega t + \theta_i))}{dt} = -\omega \cdot L \cdot I_m \cdot \sin(\omega t + \theta_i)$$

$$v(t) = \omega \cdot L \cdot I_m \cdot \cos(\omega t + \theta_i - 90^\circ)$$

Representação fasorial: $\vec{V} = \mathcal{P}(v(t))$

$$\vec{V} = -\omega \cdot L \cdot I_m \cdot e^{j(\theta_i - 90^\circ)} = -\omega \cdot L \cdot I_m \cdot e^{j\theta_i} e^{-j90^\circ}$$

$$\vec{V} = -\omega \cdot L \cdot \vec{I} \cdot (-j) = j \cdot \omega \cdot L \cdot \vec{I}, \quad \text{onde: } \vec{I} = I_m \cdot e^{j\theta_i} \quad \text{e} \quad e^{-j90^\circ} = -j$$

$$Z_L = \frac{\vec{V}}{\vec{I}} \Rightarrow Z_L = j \cdot \omega \cdot L \quad (\Omega) \quad (2.150)$$

A impedância Z_L informa que ela não possui a parte real, somente a imaginária com o produto $\omega \cdot L$ que é a reatância indutiva de valor sempre positivo no eixo imaginário ($+j$), também com unidade em Ohms. O fato de não haver a parte real na impedância significa que ela não dissipa potência, apenas armazena energia, no caso, de campo magnético por ser um indutor. Além disso, conclui-se pelo ângulo de $+90^\circ$ de Z_L ($+j$, no eixo imaginário) que essa é a defasagem entre a tensão nos terminais do indutor e a corrente que circula pelo componente, estando essa segunda variável atrasada em relação à primeira. Isso pode ser explicado também pelo fenômeno do indutor não permitir mudança abrupta da corrente, segurando-a em relação à tensão. É o caso de um conceito explicado matematicamente através dos fasores.

Graficamente, os fasores tensão e corrente no diagrama complexo e os respectivos sinais no domínio temporal são mostrados na Figura 2.80. Percebe-se claramente as observações feitas no parágrafo anterior, no que se refere ao valor da defasagem (quadro de 90° entre os fasores tensão e corrente) e a questão do fasor corrente estar atrasado em relação ao da tensão.

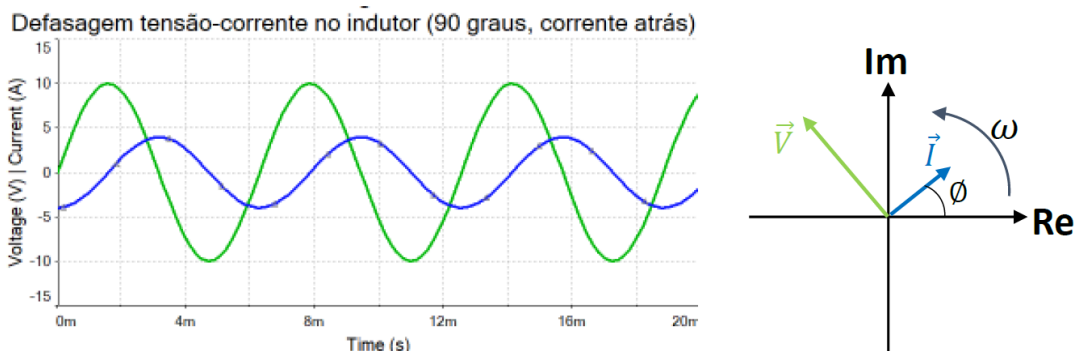


Figura 2.80: Relação tensão e corrente domínio do tempo e fasorial para impedância indutiva

No caso do capacitor, na migração para o domínio fasorial, ele é substituído no circuito por uma impedância puramente capacitiva e seu valor também depende da

frequência angular dos sinais tensão e corrente no tempo. Dessa maneira, suponha que o capacitor seja alimentado com uma tensão expressa no tempo por $v(t) = V_m \cdot \cos(\omega t + \theta_i)$. No desenvolvimento a seguir é obtida a impedância puramente capacitiva (Z_C) dada pela Eq. 2.151.

$$i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt} = C \cdot \frac{d(V_m \cdot \cos(\omega t + \theta_i))}{dt} = -\omega \cdot C \cdot V_m \cdot \sin(\omega t + \theta_i)$$

$$i(t) = \omega \cdot C \cdot V_m \cdot \cos(\omega t + \theta_i - 90^\circ)$$

Representação fasorial: $\vec{I} = \mathcal{P}(i(t))$

$$\vec{I} = -\omega \cdot C \cdot V_m \cdot e^{j(\theta_i - 90^\circ)} = -\omega \cdot C \cdot V_m \cdot e^{j\theta_i} e^{-j90^\circ}$$

$$\vec{I} = -\omega \cdot C \cdot \vec{V} \cdot (-j) = j \cdot \omega \cdot C \cdot \vec{V}, \quad \text{onde: } \vec{V} = V_m \cdot e^{j\theta_i} \quad \text{e} \quad e^{-j90^\circ} = -j$$

$$Z_C = \frac{\vec{V}}{\vec{I}} \Rightarrow Z_C = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = -j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} \Omega$$

$$Z_C = -j \frac{1}{\omega \cdot C} (\Omega) \quad (2.151)$$

A impedância Z_C informa que ela não possui a parte real, somente a imaginária $-1/(\omega C)$, que é a reatância capacitiva de valor sempre negativo no eixo imaginário ($-j$), também com unidade em Ohms. O fato de não haver a parte real na impedância significa que ela não dissipa potência, apenas armazena energia, no caso, de campo elétrico por ser um capacitor. Ademais, conclui-se pelo ângulo de -90° de Z_C que essa é a defasagem entre a tensão nos terminais do capacitor e a corrente que circula pelo componente, estando a primeira variável atrasada em relação à segunda. Isso pode ser explicado também pelo fenômeno do capacitor que não permite mudança abrupta da tensão em seus terminais, segurando-a em relação à corrente.

Graficamente, os fasores tensão e corrente no diagrama complexo e os respectivos sinais no domínio temporal são mostrados na Figura 2.81. Observa-se que o valor da defasagem é de 90° com o fasor tensão atrasado.

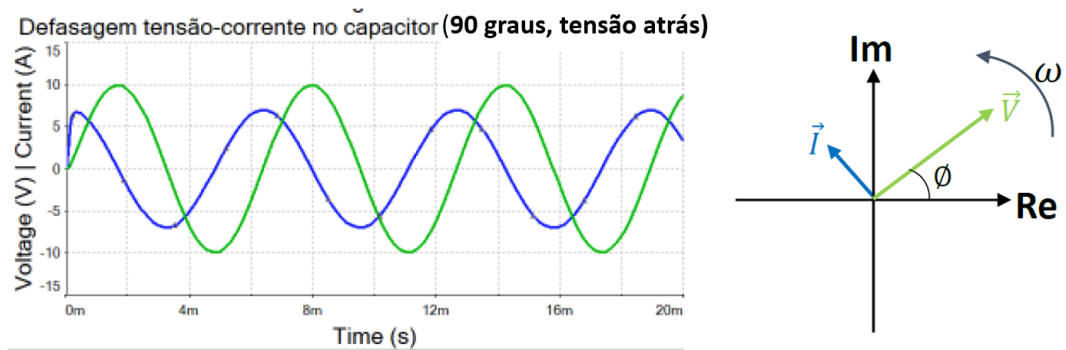


Figura 2.81: Relação tensão e corrente domínio do tempo e fasorial para impedância capacitiva

Antes de iniciar a revisão dos métodos de minimização e análise de circuitos no domínio fasorial, é importante lembrar que matematicamente se comprova que a LCK e a LTK, além da lei de Ohm generalizada, são válidas para a abordagem fasorial, usando a identidade de Euler. Aqui não se tem interesse de comprovação por se tratar de uma revisão. As validações das três leis básicas para cálculo no domínio fasorial são importantes, na medida em que todos os métodos de minimização e de análise que se originam delas também são aplicáveis.

Então, no caso da LCK em um nó de circuito e da LTK em uma malha fechada, essas operações tornem-se soma de fasores tratados como vetores no domínio da frequência. Em ambos os domínios, tem-se:

$$i_1(t) + i_2(t) + \cdots + i_n(t) = 0 \quad (\text{LCK no tempo})$$

$$\vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \cdots + \vec{I}_n = 0 \quad (\text{LCK fasorial})$$

$$v_1(t) + v_2(t) + \cdots + v_n(t) = 0 \quad (\text{LTK no tempo})$$

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \cdots + \vec{V}_n = 0 \quad (\text{LTK fasorial})$$

Para ilustrar a LTK no domínio fasorial, a Figura 2.82a apresenta o circuito com uma fonte de tensão no regime AC alimentando um resistor, um indutor e um capacitor ligados em série.

A soma fasorial das tensões nos elementos é igual à de alimentação, conforme definição da LTK. Já a Figura 2.82b mostra o diagrama fasorial das tensões nos elementos, tomando como referência a corrente que circula por eles ($\vec{I}$), que é a mesma. Observa-se que a tensão fasorial no resistor ($\vec{U}_R$) tem a mesma fase da corrente, enquanto as tensões no indutor ($\vec{U}_L$) e no capacitor ($\vec{U}_C$) têm defasagem de 90° em relação ao fasor corrente, adiantada e atrasada, respectivamente. Na Figura 2.82c tem-se a LTK fasorial, onde é mostrado que o vetor de entrada ($\vec{U}_{RLC}$) é a soma vetorial dos fasores nos componentes.

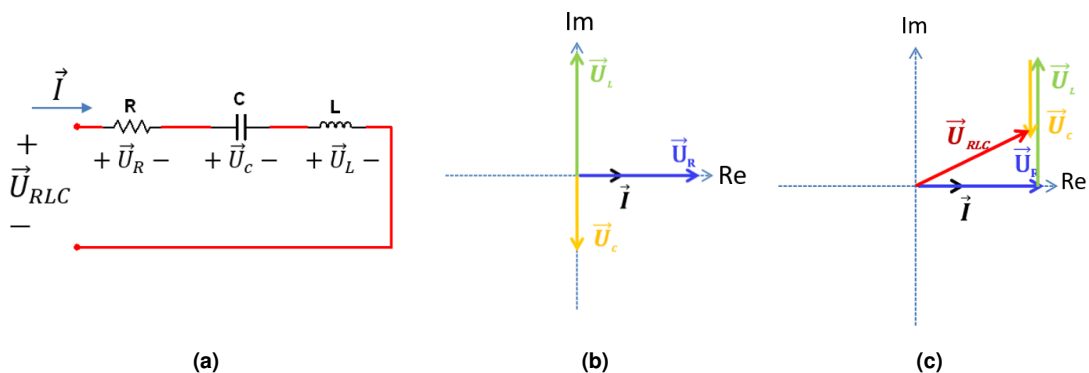


Figura 2.82: LTK no domínio fasorial: (a) circuito RLC série no regime AC, (b) diagrama fasorial e (c) LTK fasorial

2.3.4 Alguns métodos de minimização no domínio fasorial

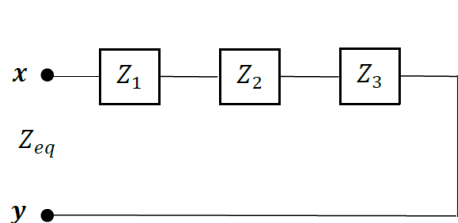
Na revisão dos métodos de minimização e análise nesta e na próxima seção, serão usados exemplos de circuitos mostrando os cálculos e gráficos, esses últimos quando necessário. Não haverá a necessidade de mostrar as leis usadas e como se chega às conclusões das expressões desses métodos, já que se trata apenas de revisão e, inclusive, já foram mostrados na Unidade 1, quando os circuitos eram alimentados por fontes de tensão e/ou corrente no regime DC.

Iniciando pelas associações, diz-se que a impedância equivalente de impedâncias ligadas em série (mesma corrente fasorial) constitui em sua soma, conforme expresso na Eq. 2.152. Com relação à impedância equivalente em uma associação em paralelo, o inverso dela corresponde à soma dos inversos das impedâncias na conexão (Eq. 2.153).

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n \quad (2.152)$$

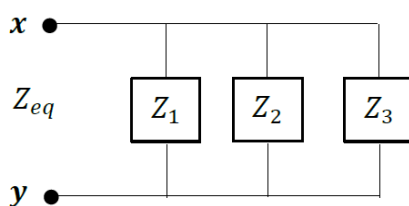
$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_n} \quad (2.153)$$

No exemplo mostrado na Figura 2.83a têm-se três impedâncias (Z_1 , Z_2 e Z_3) conectadas em série, enquanto na Figura 2.83b essas mesmas impedâncias estão em paralelo. Deseja-se obter o valor da impedância equivalente em cada um dos dois circuitos, onde têm os mesmos valores para as duas associações, nas formas polar e retangular, essa última usada por se tratar de soma.



$$\begin{aligned} Z_1 &= 10\angle 36,89^\circ = 8 + j * 6 \, \Omega \\ Z_2 &= 5\angle -53,11^\circ = 4 - j * 3 \, \Omega \\ Z_3 &= 4\angle 0^\circ = 4 \, \Omega \end{aligned}$$

(a)



$$\begin{aligned} Z_1 &= 10\angle 36,89^\circ = 8 + j * 6 \, \Omega \\ Z_2 &= 5\angle -53,11^\circ = 4 - j * 3 \, \Omega \\ Z_3 &= 4\angle 0^\circ = 4 \, \Omega \end{aligned}$$

(b)

Figura 2.83: Associação de impedâncias: (a) série e (b) paralelo

Na associação série (Figura 2.83a):

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + Z_3 \quad \Rightarrow \quad Z_{eq} = 8 + j6 + 4 - j3 + 4$$

$$Z_{eq} = (8 + 4 + 4) + j(6 - 3)$$

$$Z_{eq} = 16 + j3 \, \Omega \quad (\text{retangular}) \quad \text{ou} \quad Z_{eq} = 16,27\angle 10,62^\circ \, \Omega \quad (\text{polar})$$

Na associação paralelo (Figura 2.83b):

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{8 + j6} + \frac{1}{4 - j3} + \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{Z_{eq}} = 0,08 - j0,06 + 0,16 + j0,12 + 0,25$$

$$\frac{1}{Z_{eq}} = (0,08 + 0,16 + 0,25) + j(-0,06 + 0,12) = 0,49 + j0,06$$

$$Z_{eq} = 2,01 - j0,25 \Omega \quad (\text{retangular}) \quad \text{ou} \quad Z_{eq} = 2,02 \angle -7,07^\circ \Omega \quad (\text{polar})$$

Ainda que não mostrado nos cálculos acima, a inversão de um número complexo é o seu conjugado (mantém o sinal da parte real e troca o do imaginário) dividido pelo seu módulo ao quadrado, conforme Eq. 2.154. Pela troca do sinal do conjugado, se ele for de característica indutiva (+j), seu inverso se torna capacitivo (-j), como pode ser comprovado entre o complexo $0,49 + j0,06$ e seu inverso $2,01 - j0,25$, de forma análoga a de característica capacitiva em que o inverso se torna indutivo. Lembrando que o inverso de uma impedância é a admitância, expressa em Siemens (símbolo S).

$$\frac{1}{Z} = \frac{Z_{conj}}{|Z|^2} \quad (2.154)$$

A transformação de topologia de conexão triângulo em estrela ($\Delta \rightarrow Y$) ou vice-versa tem os mesmos resultados que os feitos para as resistências revistos na Unidade 1. A Figura 2.84 mostra ambas as topologias mantidas nos mesmos nós (x, y e z).

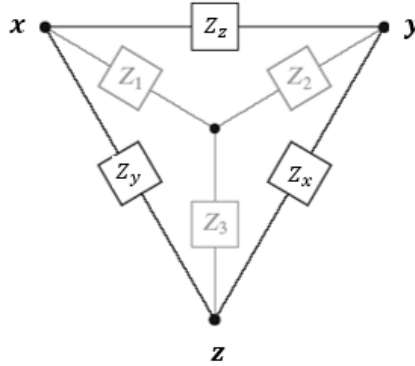


Figura 2.84: Conversão entre topologias de impedâncias

Na conversão $\Delta \rightarrow Y$, as impedâncias Z_x, Z_y e Z_z são substituídas por Z_1, Z_2 e Z_3 :

$$Z_1 = \frac{Z_y \cdot Z_z}{Z_x + Z_y + Z_z}, \quad Z_2 = \frac{Z_z \cdot Z_x}{Z_x + Z_y + Z_z}, \quad Z_3 = \frac{Z_x \cdot Z_y}{Z_x + Z_y + Z_z}$$

Na conversão $Y \rightarrow \Delta$, as impedâncias Z_1, Z_2 e Z_3 são substituídas por Z_x, Z_y e Z_z :

$$Z_x = \frac{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_3 \cdot Z_1}{Z_1}, \quad Z_y = \frac{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_3 \cdot Z_1}{Z_2}$$

$$Z_z = \frac{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_3 \cdot Z_1}{Z_3}$$

Relembrando a forma de memorizar as fórmulas das conversões, no caso de $\Delta \rightarrow Y$, o denominador é comum e igual à soma das três impedâncias ($Z_x + Z_y + Z_z$) e o numerador é o produto das impedâncias ligadas ao nó da conversão ($Z_y \cdot Z_z$ no nó x , $Z_z \cdot Z_x$ no y e $Z_x \cdot Z_y$ no z). Já na conversão contrária, $Y \rightarrow \Delta$, o numerador é o mesmo ($Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_3 \cdot Z_1$) e a impedância no denominador é a que está conectada no nó na transformação (Z_1 no nó x , Z_2 no y e Z_3 no z).

O método de transformação de fontes, sempre em terminais abertos, possibilita alterar o circuito com uma fonte fasorial de tensão em série com uma impedância (Figura 2.85a) em outro com a fonte fasorial de corrente em paralelo com a mesma impedância (Figura 2.85b).

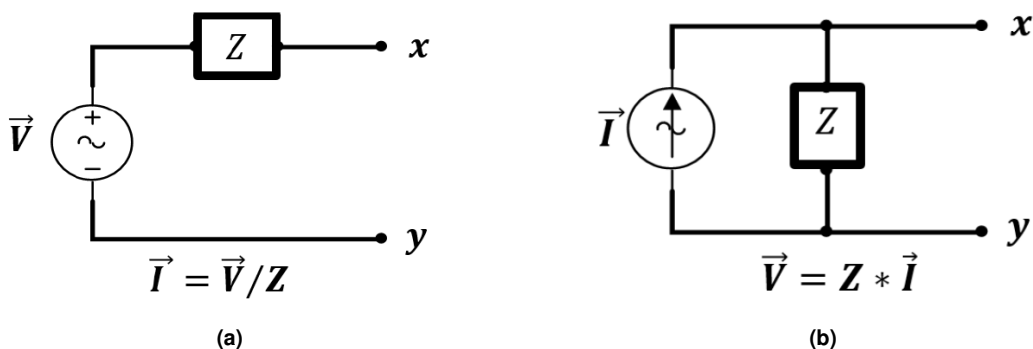


Figura 2.85: Transformações entre circuitos com fontes fasoriais de tensão e corrente

Para ser possível a transformação, é necessário ver no layout do original se o circuito a ser transformado pode ser retirado e, após conversão, reconectado de volta aos mesmos nós (x e y).

Percebe-se a necessidade de ser em terminais abertos, pois na conversão fasorial de tensão em corrente, o valor dessa última é obtido fazendo-se um curto nos terminais abertos ($\vec{I} = \vec{V}/Z$), da mesma forma que o valor fasorial da tensão na transformação inversa é o produto da corrente fasorial pela impedância em terminais abertos ($\vec{V} = Z \cdot \vec{I}$). A transformação de fonte está associada a dois poderosos métodos de minimização que envolvem a obtenção dos circuitos equivalentes de Thévenin (tensão fasorial em série com a impedância) e de Norton (corrente fasorial em paralelo com a mesma impedância), conforme revisto na Unidade 1. A obtenção de um desses equivalentes minimiza qualquer circuito complexo com a finalidade de fazer a análise em um componente do circuito, a partir do qual a minimização foi feita, sendo o de Thévenin preferido para divisores de tensão e o de Norton para divisores de corrente. Outro ponto importante de lembrar é que qualquer um deles pode ser obtido e, ao final, convertido no outro com o método de transformação de fontes.

Para exemplificar, suponha o circuito mostrado na Figura 2.86a onde se deseja encontrar a carga, que é uma impedância definida como Z_L , de modo a obter a máxima transferência de potência ativa no seu valor de pico, calculando o valor associado à carga. Ele é alimentado por uma fonte de formato senoidal expressa como $v_s(t) = 60 \cdot \cos(6283,19t + 60^\circ)$ V.

Como já bastante referido no texto da revisão, existem vários métodos de minimização e análise para se obter as variáveis que estão sendo solicitadas. No caso do exemplo da Figura 2.86a, foi empregado o método de obtenção do circuito equivalente de Thévenin, visto pelos terminais da carga Z_L , onde a ideia é minimizar sem a carga pelo referido equivalente, de maneira a voltar a conectar a carga ao final nos terminais abertos do circuito minimizado.

Dessa forma, na Figura 2.86b a carga é retirada e indica-se nos terminais abertos a obtenção da impedância de Thévenin Z_{Th} , com a eliminação do efeito da fonte $v_s(t)$. Entretanto, antes deve-se fazer a migração do circuito do domínio do tempo (Figura 2.86a) para o fasorial (Figura 2.86b), no caso da fonte $v_s(t)$, resistor R_1 , indutor L_1 e capacitores C_1 e C_2 .

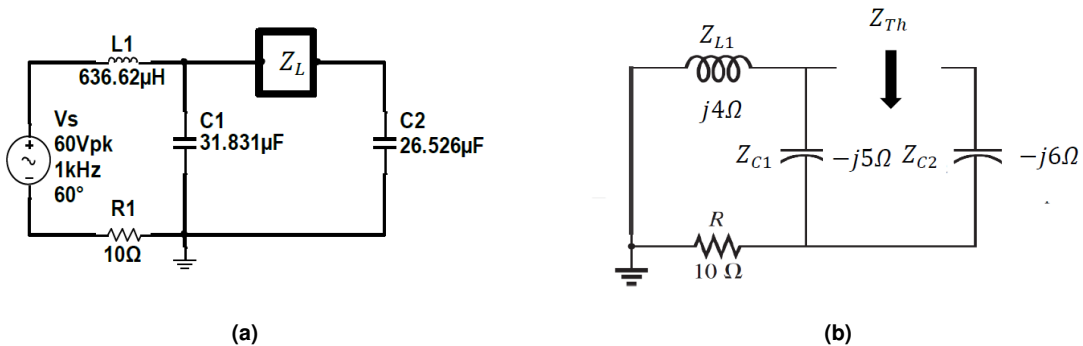


Figura 2.86: Exemplo de circuito para obtenção da máxima transferência de potência através do circuito equivalente de Thévenin

Obtenção dos componentes no domínio fasorial:

$$\vec{V}_s = \mathcal{P}(v_s(t)) = 60 \angle 60^\circ \text{ V}, \quad Z_{R1} = R_1 = 10 \Omega$$

$$Z_{L1} = +j \cdot \omega \cdot L_1 = +j \cdot 6283,19 \cdot 632,62 \times 10^{-6} = +j \cdot 4 \Omega$$

$$Z_{C1} = -j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_1} = -j \cdot \frac{1}{6283,19 \cdot 31,83 \times 10^{-6}} = -j \cdot 5 \Omega$$

$$Z_{C2} = -j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_2} = -j \cdot \frac{1}{6283,19 \cdot 26,53 \times 10^{-6}} = -j \cdot 6 \Omega$$

Obtenção da impedância equivalente de Thévenin no circuito no domínio fasorial:

$$Z_{Th} = (-j \cdot 6) + [(-j \cdot 5) \parallel (10 + j \cdot 4)] = (-j \cdot 6) + \left[\frac{(-j \cdot 5) \cdot (10 + j \cdot 4)}{10 + j \cdot 4 - j \cdot 5} \right]$$

$$Z_{Th} = (-j \cdot 6) + \frac{20 - 50 \cdot j}{10 - j \cdot 1} = -j \cdot 6 + 2,48 - j \cdot 4,75 \Rightarrow Z_{Th} = 2,48 - j \cdot 10,75 \Omega$$

(Z_{Th} é uma impedância com característica capacitiva.)

Obtenção da tensão fasorial de Thévenin ($\vec{V}_{Th}$), pelo divisor de tensão de entrada $\vec{V}_S$ formado pelas impedâncias Z_{L1} , Z_{C1} e Z_{R1} , uma vez que Z_{C2} não está conectada no circuito por estar em terminal aberto. Logo:

$$\vec{V}_{Th} = \frac{Z_{C1}}{Z_{L1} + Z_{C1} + Z_{R1}} \cdot \vec{V}_S = \frac{-j \cdot 5}{j \cdot 4 - j \cdot 5 + 10} \cdot (60 \angle 60^\circ \text{ V})$$

$$\vec{V}_{Th} = \frac{5 \angle -90^\circ}{10 - j \cdot 1} \cdot (60 \angle 60^\circ \text{ V}) = \frac{5 \angle -90^\circ}{10,05 \angle -5,71^\circ} \cdot (60 \angle 60^\circ \text{ V})$$

$$\vec{V}_{Th} = \frac{60 \cdot 5}{10,05} \cdot \angle(-90^\circ + 60^\circ + 5,71^\circ) \Rightarrow \vec{V}_{Th} = 29,85 \angle -24,28^\circ \text{ V}$$

Obtenção do valor da carga, considerando a máxima transferência de potência:

$$Z_L = Z_{Th}^* \quad (R_{Th} = R_L \text{ e } X_{Th} = -X_L) \Rightarrow Z_L = 2,48 + j \cdot 10,75 \Omega$$

A tensão fasorial sobre a carga na máxima transferência de potência é a metade da tensão fasorial de Thévenin. Além disso, apenas o valor real da impedância (2,48) é considerado já que se pede para calcular a potência ativa (P_{ZL}). Logo:

$$P_{ZL} = \frac{\left(|\vec{V}_{Th}|/2\right)^2}{R_L} = \frac{(29,85)^2}{4 \cdot (2,48)} \Rightarrow P_{ZL} = 90 \text{ W}$$

Como pedido na questão do exemplo, o valor 90 refere-se à máxima potência transferida e não a ativa que seria 45W, pois utilizaria a tensão RMS e não o valor de pico do equivalente de Thévenin. A unidade de ambas é o Watt (W). Se fosse a potência em toda a impedância, haveria uma parte reativa que corresponderia à energia armazenada ou fornecida, a depender do ciclo da alimentação que a reatância capacitiva (-10,75) trocava com a fonte, tendo como unidade Volt-Ampère reativo (VAr). A potência total na carga, considerando ambas, ativa e reativa, é definida como potência aparente, cujo valor é a raiz quadrada do quadrado da soma dessas potências (triângulo das potências), tendo como unidade o Volt-Ampère (VA). Nessa revisão não há interesse sobre essas outras duas potências, sendo sua aplicação fundamental, por exemplo, em disciplinas da área de potência, quando se estuda a dinâmica do sistema trifásico de energia no regime AC.

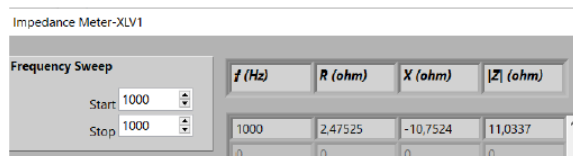
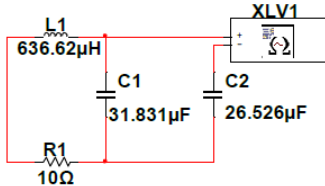
A Figura 2.87 apresenta os circuitos parciais e os dados obtidos na simulação em Multisim da questão calculada com o circuito original da Figura 2.86, onde pode-se citar:

- a) A impedância de Thévenin é obtida com o circuito mostrado na Figura 2.87, onde se percebe que a carga foi retirada e o efeito da fonte de tensão fasorial

suprimido (curto). A leitura do valor da impedância no simulador fez-se com o uso do medidor adequado (Impedance Meter - XLV1), cujo valor é mostrado à direita para um valor de frequência de 1.000 Hz; e

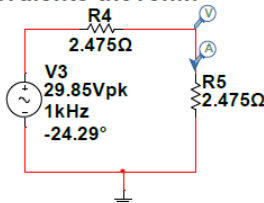
- b) A potência na parte real da impedância de carga ($2,475 \Omega$) é reconectada ao equivalente de Thévenin (fonte V3 com valor real da impedância de Thévenin), conforme Figura 2.87 e o circuito para obtenção da tensão de Thévenin na Figura 2.87. Nos dados medidos percebe-se a leitura da potência ativa em 90 W, conforme calculado no produto das pontas de prova VPR3 * IPR4 (mostrados no circuito como pontas de prova V e A). Nessa mesma tabela de dados lidos, a primeira linha mostra o valor fasorial da tensão do circuito da Figura 2.87, ou seja, a tensão de Thévenin calculada ($29,85 \angle -24,28^\circ$ V), através da ponta de prova V(10)-V(11) | VPR2 (V+ e V-). No gráfico do tempo são mostrados os sinais de tensão e corrente no equivalente de Thévenin com a carga (Figura 2.87), agora com o instrumento de ‘Transiente’ no simulador. Perceba que o pico da tensão na carga é a metade da tensão de Thévenin ($29,85/2 = 14,92$ e próximo do valor 14,87 da tabela na posição do cursor).

Impedância de thévenin



(a)

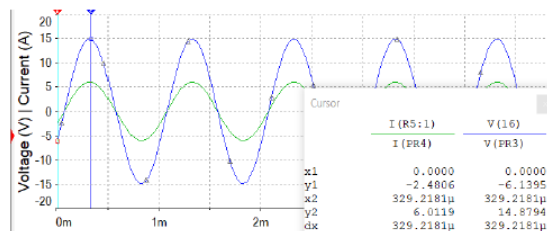
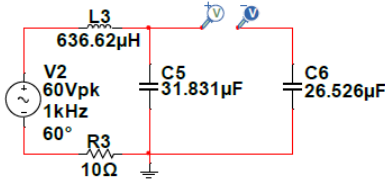
Equivalente thévenin



	Variable	Frequency (Hz)	Magnitude	Phase (deg)
1	V(10) - V(11) V(PR2)	1000	29.85111	-24.28943
2	V(PR3)*I(PR4)	1000	90.00227	-48.58000

(b)

Tensão de thévenin



(c)

Figura 2.87: Circuitos parciais e dados simulados do exemplo do circuito original

Para finalizar, o circuito equivalente de Norton poderia ser obtido, onde a carga R_L ficaria conectada nos terminais abertos dele, que conteria a fonte fasorial de corrente em paralelo com a mesma impedância do Thévenin.

2.3.5 Alguns métodos de análise no domínio fasorial

Serão revisados três dos principais métodos de análise nesta seção: tensões de nó, correntes de malha e superposição. Os passos nos cálculos obedecem, como nas três leis e métodos de minimização, os mesmos passos, com a diferença que se utiliza números complexos (regime AC), ao invés de valores reais (regime DC).

Iniciando pelo método de tensões de nó, ou análise nodal, considere o circuito exemplo mostrado na Figura 2.88.

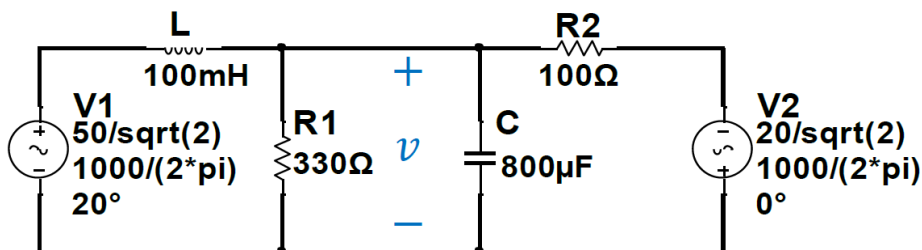


Figura 2.88: Exemplo de circuito para solução em análise nodal

É pedida a expressão em regime da tensão $v(t)$ nas polaridades arbitradas, contendo duas fontes de tensão, $V_1(t) = 50 \cdot \cos(1000t + 20^\circ)$ V e $V_2(t) = 20 \cdot \sin(1000t + 90^\circ)$ V, além dos componentes passivos (dois resistores, um indutor e um capacitor).

De início, percebe-se que o circuito é fornecido no domínio do tempo, o que é confirmado tanto pelos componentes terem seus valores dados na forma de indutor e capacitor, ao invés das respectivas impedâncias, além das fontes serem descritas com componentes no tempo (frequência angular de 1.000 rad/s, que corresponde à linear de $1000/(2\pi)$ Hz). Outra coisa a observar é que na simulação no Multisim os módulos das fontes no tempo usam o valor RMS e, por isso, os valores de pico são $50/\sqrt{2}$ e $20/\sqrt{2}$. Antes de iniciar a aplicação do método nodal, é necessário obter o mesmo circuito no domínio fasorial. Após a solução, é necessário retornar ao domínio do tempo pela transformada fasorial inversa, pois foi pedida a expressão de $v(t)$.

A Figura 2.89 apresenta o mesmo circuito no domínio fasorial, tendo os elementos sido obtidos a partir dos seguintes cálculos, considerando $\omega = 1.000$ rad/s:

$$\vec{V}_1 = \mathcal{P}(V_1(t)) = 50 \angle 20^\circ \text{ V}$$

$$V_2(t) = 20 \cdot \sin(1.000t + 90^\circ) = 20 \cdot \cos(1.000t + 90^\circ - 90^\circ)$$

$$V_2(t) = 20 \cdot \cos(1.000t) \text{ V} \Rightarrow \vec{V}_2 = \mathcal{P}(V_2(t)) = 20 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$Z_L = +j \cdot \omega \cdot L = +j \cdot 1.000 \cdot 100 \cdot 10^{-3} = +j \cdot 100 \Omega$$

$$Z_C = -j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} = -j \cdot \frac{1}{1.000 \cdot 800 \cdot 10^{-6}} = -j \cdot 1,25 \Omega$$

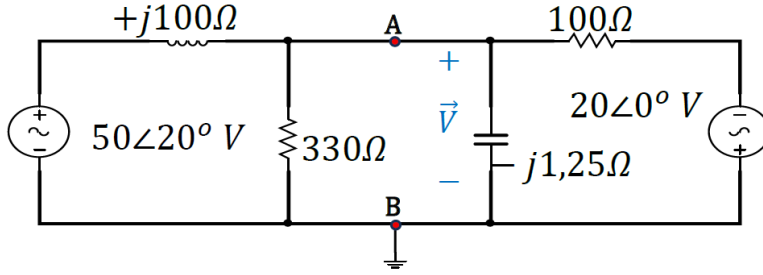


Figura 2.89: Circuito da Figura 2.88 no domínio fasorial para emprego da análise nodal

$$Z_{R1} = R_1 = 330 \Omega \quad \text{e} \quad Z_{R2} = R_2 = 100 \Omega$$

Uma vez que os elementos foram calculados, pode-se passar para o equacionamento empregado na análise nodal (LCK sistemática em cada nó). No circuito existem dois nós essenciais (conexão de três ou mais componentes), um marcado como referência (terra do circuito, designado como ‘B’) e o outro na parte superior (‘A’). Logo, a elevação da tensão do nó ‘B’ ao ‘A’ é a única variável a ser obtida na aplicação do método, que considera todas as correntes fasoriais saindo do nó da tensão $\vec{V}_A$ dada por:

$$\vec{I}_{j100} + \vec{I}_{300} + \vec{I}_{-j1,25} + \vec{I}_{100} = 0 \quad (\text{eq1})$$

As tensões nos nós de cima do terminal de cada fonte, onde ambas são referenciadas ao de referência (‘B’), valem $50\angle 20^\circ \text{ V}$ para $\vec{V}_1$ e $-20\angle 0^\circ \text{ V}$ para $\vec{V}_2$ (polaridade com o terminal positivo na referência). Aplicando a lei de Ohm generalizada em cada corrente do equacionamento acima, tem-se:

$$\vec{I}_{j100} = \frac{\vec{V}_A - \vec{V}_1}{+j \cdot 100}, \quad \vec{I}_{300} = \frac{\vec{V}_A - 0}{300}, \quad \vec{I}_{-j1,25} = \frac{\vec{V}_A - 0}{-j \cdot 1,25}, \quad \vec{I}_{100} = \frac{\vec{V}_A - \vec{V}_2}{100}$$

Substituindo as correntes acima na eq1:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{V}_A - \vec{V}_1}{j \cdot 100} + \frac{\vec{V}_A}{300} + \frac{\vec{V}_A}{-j \cdot 1,25} + \frac{\vec{V}_A - \vec{V}_2}{100} &= 0 \\ \frac{\vec{V}_A - 50\angle 20^\circ}{j \cdot 100} + \frac{\vec{V}_A}{300} - \frac{\vec{V}_A}{j \cdot 1,25} + \frac{\vec{V}_A - (-20\angle 0^\circ)}{100} &= 0 \end{aligned}$$

Fatorando para $\vec{V}_A$:

$$\vec{V}_A \cdot \left(\frac{1}{j \cdot 100} + \frac{1}{330} + \frac{1}{-j \cdot 1,25} + \frac{1}{100} \right) = 0,5\angle -70^\circ - 0,2\angle 0^\circ$$

$$\vec{V}_A \cdot (-j \cdot 0,01 + 0,003 + j \cdot 0,8 + 0,01) = 0,171 - j0,47 - 0,2$$

$$\vec{V}_A \cdot (0,013 + j \cdot 0,79) = -0,029 - j \cdot 0,47 \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_A \cdot (0,79\angle 89,06^\circ) = 0,47\angle -93,53^\circ$$

$$\vec{V}_A = \frac{0,47\angle -93,43^\circ}{0,79\angle 89,06^\circ} = 0,59\angle -182,49^\circ \text{ V} \Rightarrow \vec{V}_A = 0,59\angle 177,41^\circ \text{ V}$$

$$\mathcal{P}^{-1}\{\vec{V}_A\} = v(t) \Rightarrow v(t) = 0,59 \cdot \cos(1.000t + 177,41^\circ) \text{ V}$$

Lembrando que, para retornar do domínio fasorial para o tempo, utiliza-se a transformada fasorial inversa, quando o termo $e^{j\omega t}$ é inserido. Na prática é usar o módulo do fasor, sua fase e a frequência angular na função cosseno.

Na solução de um exemplo para uso do método de correntes de malha, utiliza-se o mesmo circuito mostrado na Figura 2.88, onde foi aplicado o método nodal. Da mesma forma, é necessário levar o circuito do domínio do tempo para o fasorial e resolvê-lo, encontrando as correntes fasoriais das malhas e, finalmente, retornando para o tempo com suas expressões senoidais. A migração do domínio do tempo para o fasorial na obtenção de seus componentes utiliza-se dos mesmos cálculos do método anterior e encontra-se o mesmo circuito fasorial mostrado na Figura 2.89.

A diferença é que no método das correntes de malha deve-se definir as malhas existentes nos circuitos que são sublaços mínimos que não podem ser mais quebrados em outros menores. Percebe-se visualmente que existem três malhas, quantidade que também pode ser definida pela equação envolvendo ramos (b_c) e nós (n_c), ambos essenciais, pela equação $b_c - (n_c - 1)$, que também resulta em três, uma vez que $b_c = 4$ (ramos $V_1 - L_1$, R_1 , C_1 e $R_2 - V_2$) e $n_c = 2$ (nós ‘A’ e ‘B’ mencionados anteriormente).

A Figura 2.90 apresenta o circuito fasorial (o mesmo da Figura 2.89), somente que agora mostrando as três correntes fasoriais arbitradas ($\vec{I}_a$, $\vec{I}_b$ e $\vec{I}_c$), todas percorrendo as respectivas malhas no sentido horário.

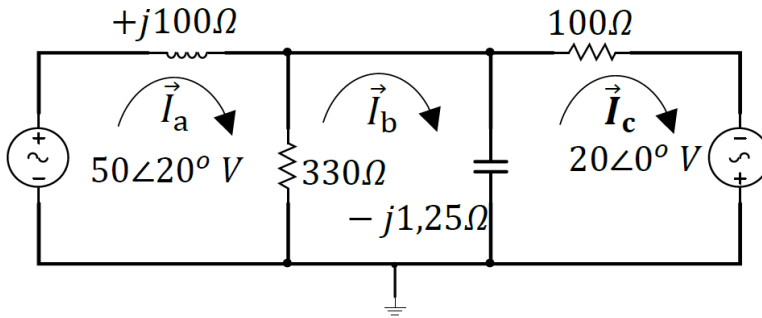


Figura 2.90: Arbitragem dos sentidos das três correntes fasoriais de malha (horários)

Na aplicação do método, percorre-se as malhas no sentido arbitrado e considera-se no equacionamento o sinal negativo na elevação da tensão fasorial e positivo na queda ou vice-versa. Faz-se a escolha pela primeira opção nos cálculos. Dessa forma, equacionando as três malhas nos sentidos arbitrados para as correntes fasoriais, encontram-se as três equações abaixo:

$$-50\angle 20^\circ + j \cdot 100 \cdot \vec{I}_a + 330 \cdot (\vec{I}_a - \vec{I}_b) = 0 \quad (\text{malha de } \vec{I}_a)$$

$$\begin{aligned}
(-j \cdot 1, 25) \cdot (\vec{I}_b - \vec{I}_c) + 330 \cdot (\vec{I}_b - \vec{I}_a) &= 0 \quad (\text{malha de } \vec{I}_b) \\
-20 \angle 0^\circ + (-j \cdot 1, 25) \cdot (\vec{I}_c - \vec{I}_b) + 100 \cdot \vec{I}_c &= 0 \quad (\text{malha de } \vec{I}_c)
\end{aligned}$$

Colocando as equações na forma matricial:

$$\begin{bmatrix}
(330 + j \cdot 100) & -330 & 0 \\
-330 & (330 - j \cdot 1, 25) & j \cdot 1, 25 \\
0 & j \cdot 1, 25 & (100 - j \cdot 1, 25)
\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{I}_a \\ \vec{I}_b \\ \vec{I}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \angle 20^\circ \\ 0 \\ 20 \angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

Resolvendo-se o sistema linear, obtêm-se os fasores das correntes:

$$\vec{I}_a = 505,52 \angle -70,26^\circ \text{ mA}, \quad \vec{I}_b = 506,19 \angle -70,07^\circ \text{ mA} \quad \text{e} \quad \vec{I}_c = 194,05 \angle 0,08^\circ \text{ mA}$$

Levando para o domínio do tempo com $i_x(t) = \mathcal{P}^{-1}\{\vec{I}_x\}$, onde $x = \{a, b, c\}$:

$$\begin{aligned}
i_a(t) &= 505,52 \cdot \cos(1.000t - 70,26^\circ) \text{ mA} \\
i_b(t) &= 506,19 \cdot \cos(1.000t - 70,07^\circ) \text{ mA} \\
i_c(t) &= 194,05 \cdot \cos(1.000t + 0,08^\circ) \text{ mA}
\end{aligned}$$

Para a comprovação dos cálculos efetuados acima, fez-se a simulação no ambiente Multisim, posicionando-se três pontas de prova em um ramo comum de cada malha (a forma de medir a corrente de malha e não a resultante que circula no componente) e utilizou-se a ferramenta ‘Single Frequency AC’ para apresentar os resultados dos fasores na forma polar, incluindo a coluna da frequência, conforme mostrado na Figura 2.91.

Single Frequency AC Analysis @ 159.155 Hz				
	Variable	Frequency (Hz)	Magnitude	Phase (deg)
1	$\text{sqrt}(2) \cdot I(\text{PR1})$	159.155	505.50598 m	-70.25936
2	$\text{sqrt}(2) \cdot I(\text{PR2})$	159.155	506.19458 m	-70.07032
3	$\text{sqrt}(2) \cdot I(\text{PR3})$	159.155	194.04834 m	79.36493 m

Figura 2.91: Resultados simulados no Multisim com os fasores correntes na forma polar

Para interpretar os resultados da tabela, é necessário esclarecer que:

- A frequência linear de 159,155 Hz corresponde à angular de 1.000 rad/s dividido por 2π , mostrado acima e nas colunas de cada corrente;
- As correntes fasoriais foram medidas com valores em RMS, ainda que nas fontes tenham sido usados os valores de pico para os cálculos. Isso acontece devido ao circuito ser simulado com as fontes de tensão no tempo com valores em RMS. Nos cálculos foram empregados os dados de pico e, para comparar com os medidos na tabela da Figura 2.91, constata-se que os valores das correntes fasoriais nas malhas foram multiplicadas por $\sqrt{2}$, no caso, $\text{sqrt}(2) \cdot I(\text{PR})$, mostrando que os módulos e as fases dessas correntes simuladas possuem os mesmos valores das calculadas; e

- c) Nos módulos das correntes aparece a letra m, que indica miliampere, e nas fases a letra m indica o expoente do ângulo em milésimo de grau. No caso de $\vec{I}_C$ esse valor é muito pequeno, medido como 79×10^{-3} grau, ou $0,08^\circ$, conforme calculado.

Para finalizar a revisão desta unidade, é apresentado o exemplo de um circuito no tempo na Figura 2.92a. Nesse problema é pedida a obtenção da expressão da corrente $i(t)$ arbitrada, usando o método de superposição, considerando que as duas fontes de alimentação no regime AC são $V(t) = 30 \cdot \cos(2.000t + 40^\circ)$ V e $I(t) = 0,1 \cdot \cos(2.000t + 0^\circ)$ A.

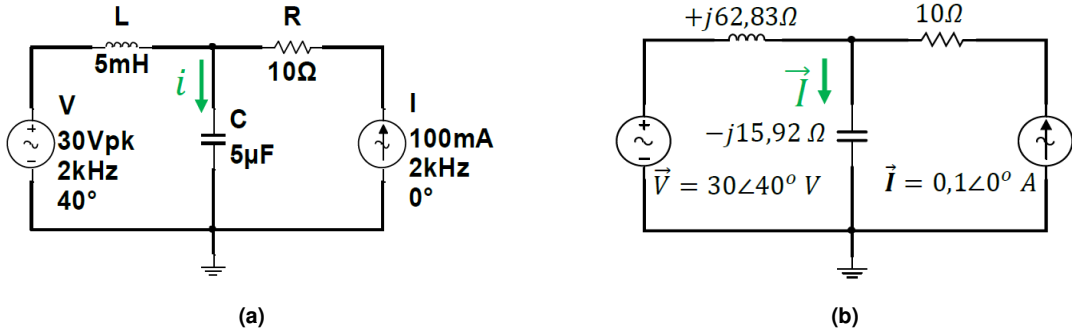


Figura 2.92: Circuito no regime AC para solução pelo método de superposição no domínio: a) tempo e b) fasorial

Lembrando que para se verificar em qual domínio o circuito está no enunciado da questão, basta observar os valores das fontes e os valores dos componentes relacionados à indutância e capacitância. Em ambos, verifica-se que esse é o do tempo, já que as fontes têm expressão cossenoidais e os componentes são valores de indutor ($L = 5$ mH) e capacitor ($C = 5$ μF) e não impedâncias indutivas e capacitivas, respectivamente.

Ao levar o circuito ao domínio fasorial (Figura 2.92b), deve-se verificar para cada uma das fontes a frequência angular, pois esse é o único método possível para solucionar questões com valores diferentes delas. Nesse caso são as mesmas, o que faz com que no domínio fasorial o circuito mantenha os mesmos valores dos componentes passivos de impedância indutiva e capacitiva (dependem da frequência angular $\omega = 2\pi \cdot 2.000 = 12.566,37$ rad/s).

$$\vec{V} = \mathcal{P}(V(t)) = 30\angle 40^\circ \text{ V} \quad \text{e} \quad \vec{I} = \mathcal{P}(I(t)) = 0,1\angle 0^\circ \text{ A}$$

$$Z_L = +j \cdot \omega \cdot L = +j \cdot 12.566,37 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = +j \cdot 62,83 \Omega$$

$$Z_C = -j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} = -j \cdot \frac{1}{12.566,37 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = -j \cdot 15,92 \Omega$$

$$Z_R = R = 10 \Omega$$

A Figura 2.93 mostra os dois circuitos para o cálculo da contribuição de cada fonte fasorial, no caso da corrente (Figura 2.93a) designada como $\vec{I}_1$ e tensão (Figura 2.93b)

como $\vec{I}_2$. Para isso, é necessário, no cômputo de cada contribuição, retirar o efeito das demais, aqui apenas da outra: tensão (curto na Figura 2.93a) e corrente (retirada na Figura 2.93b).

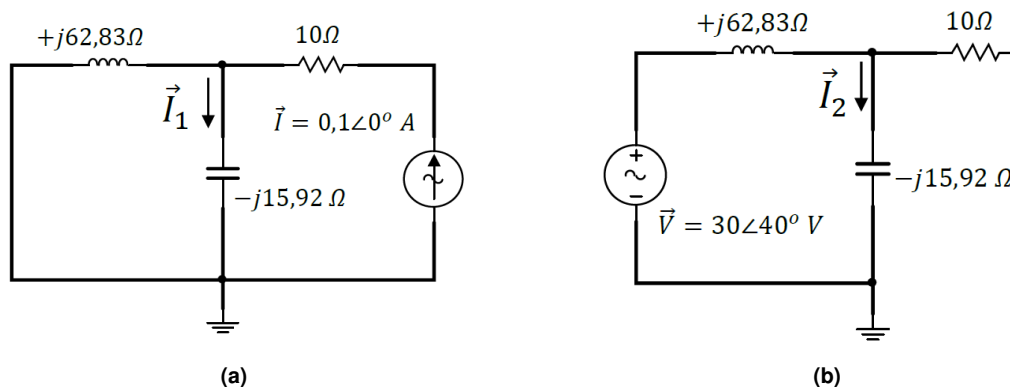


Figura 2.93: Circuitos com a contribuição de cada fonte fasorial: a) corrente $\vec{I}$ e b) tensão $\vec{V}$

Iniciando os cálculos para obter a contribuição da fonte fasorial de corrente ($\vec{I}_1$) (Figura 2.93a), percebe-se que seu valor pode ser obtida com o divisor de corrente formado pelas impedâncias Z_L e Z_C :

$$\vec{I}_1 = \frac{Z_L}{Z_L + Z_C} \cdot \vec{I} = \frac{j \cdot 62,83}{j \cdot 62,83 - j \cdot 15,92} \cdot 0,1 \angle 0^\circ = \frac{j \cdot 62,83}{j \cdot 46,91} \cdot 0,1 \angle 0^\circ$$

$$\vec{I}_1 = 133,94 \angle 0^\circ \text{ mA} \quad (\text{polar}) \quad \text{ou} \quad \vec{I}_1 = 133,94 \text{ mA} \quad (\text{retangular})$$

Para a contribuição da fonte fasorial de tensão (Figura 2.93b), referenciada como $\vec{I}_2$, o cálculo de sua contribuição é feito com a aplicação da lei de Ohm generalizada, onde apenas as impedâncias Z_L e Z_C estão ligadas em série aos terminais da fonte de tensão, na medida em que Z_R está desconectada pelo fato da contribuição da fonte fasorial de corrente ter sido suprimida com a sua retirada (circuito aberto):

$$\vec{I}_2 = \frac{\vec{V}}{Z_L + Z_C} = \frac{30 \angle 40^\circ}{j \cdot 62,83 - j \cdot 15,92} = \frac{30 \angle 40^\circ}{j \cdot 46,91} = \frac{30 \angle 40^\circ}{46,91 \angle 90^\circ} = \frac{30}{46,91} \angle (40^\circ - 90^\circ)$$

$$\vec{I}_2 = 639,52 \angle -50^\circ \text{ mA} \quad (\text{polar}) \quad \text{ou} \quad \vec{I}_2 = 411,08 - j \cdot 489,90 \text{ mA} \quad (\text{retangular})$$

Basta fazer a soma das contribuições para obter, na forma polar, o valor da corrente fasorial pedida ($\vec{I}$) em miliamperes:

$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 = 133,94 + 411,08 - j \cdot 489,90 = 545,02 - j \cdot 489,90 \text{ mA} \quad (\text{retangular})$$

$$\vec{I} = 732,84 \angle -41,95^\circ \text{ mA} \quad (\text{polar})$$

Finalizando, obtém-se a corrente no tempo $i(t)$:

$$i(t) = \mathcal{P}^{-1}\{\vec{I}\} \Rightarrow i(t) = 732,84 \cdot \cos(12.566,37t - 41,95^\circ) \text{ mA}$$

2.4 Videoaulas de revisão

As informações das unidades que foram mencionadas, serão detalhadas nas videoaulas das três unidades, acessados nos links abaixo. Alguns poucos conteúdos do livro texto, como as aulas de revisão de conteúdos, não são abordados neste livro, ainda que sejam apresentados em aulas.

Tabela 2.2: Link para as videoaulas de revisão

CONTEÚDOS DAS VIDEOAULAS

[Revisão dos conteúdos da Unidade 1.](#)

[Revisão dos conteúdos da Unidade 2.](#)

[Revisão dos conteúdos da Unidade 3.](#)

Capítulo 3

PRÁTICAS

Neste capítulo são disponibilizados os links para as videoaulas referentes ao conteúdo prático ministrado na disciplina Laboratório de Circuitos Elétricos. Conforme mencionado, no projeto pedagógico vigente, essa disciplina é separada da teórica (Circuitos Elétricos) e é oferecida no 5º período da grade curricular do curso. Portanto, quando as videoaulas referentes a parte prática foram criadas, elas tomaram como base o Projeto pedagógico (PPC) atual. No próximo PPC a ser implantado, a teoria e a prática do tema circuitos elétricos será oferecida no 3º período em uma única disciplina de 75 h/a. Essa alteração não inviabiliza a importância desse ebook.

Esse conjunto de videoaulas foi desenvolvido em projeto PROAES, ambos na vigência 2018-2019, pelos alunos de Engenharia Elétrica Abmael Rodrigues Costa de Souza (Seção 3.1) e Yoseph Michael S. Silva (Seção 3.2).

3.1 Materiais iniciais

A abordagem didática empregada na disciplina Laboratório de Circuitos Elétricos adota a preparação do material inicial com os circuitos a serem testados nas montagens em protoboard no LSE (Laboratório de Sistemas Eletrônicos), localizado no prédio do CCET (Centro de Ciências Exatas e Tecnologia) e pertencente ao DEE (Departamento de Engenharia Elétrica). Os circuitos a serem projetados devem atender às especificações fornecidas nos guias dos experimentos. A entrega desse material, que inclui os três tipos de solução (conceitual, simulada em Multisim e programada por script em Matlab), é feita antes da realização dos testes experimentais em laboratório.

Esse método possibilita ao aluno já saber sobre o circuito que irá testar e, portanto, dos resultados esperados. Evidentemente, esses resultados entregues de forma simulada no material inicial irão diferir dos realizados na bancada do laboratório, na medida em que os primeiros utilizam medidores ideais, ao passo que os últimos empregam instrumentos reais. Ademais, nos simulados os valores dos componentes também são ideais, enquanto os reais usados nas montagens têm seus valores medidos com alguma

pouca diferença, devido à tolerância definida no componente, o que faz com que seja necessário simular o circuito com esses valores lidos e comparar os resultados da nova simulação com a dos instrumentos reais.

A disciplina Laboratório de Circuitos Elétricos tem 30 horas, sendo organizada em sete guias. No primeiro (guia 1) a disciplina é apresentada e são comprovadas as três primeiras leis de circuitos elétricos (Ohm, LCK e LTK) em circuitos montados em protoboard. Nos guias 2 a 5 são fornecidas as especificações para o projeto de três circuitos por guia. O objetivo desses testes é fazer a prova de conceito dos métodos de minimização e análise nos regimes DC e AC, ministrados na disciplina teórica. Os dois últimos guias, no caso 6 e 7, são destinados a um projeto envolvendo o uso de microcontroladores em uma determinada aplicação com relação ao tema de circuitos elétricos.

Na tabela abaixo são apresentadas as videoaulas de preparação dos materiais iniciais dos Guias 1 a 5. Na videoaula 1 é detalhado o cronograma da disciplina, com datas de experimentos das duas turmas de laboratório, a metodologia utilizada, as formas de definição das notas dos guias obtidas pelos grupos de alunos contidos em cada turma, a forma de preparação do material inicial e experimentação em laboratório que compõem a nota de cada guia, além da contabilização da frequências e referências bibliográficas que são usadas. Com a edição deste ebook, a lista de referências a serem usadas tanto na parte teórica quanto prática, fará constá-lo como básico. Na videoaula 2, que ocorre na mesma data de aula da apresentação do cronograma, são comprovadas as três leis com circuitos fornecidos previamente. Nas videoaulas 3 a 6 são apresentadas as especificações normalmente de três circuitos por guia, os quais devem ser projetados por cada grupo de ambas as turmas. Assim, o grupo deve projetar os circuitos a partir de especificações nos três formatos já mencionados (conceitual, simulado e programado) e entregar como material inicial antes da experimentação em laboratório. As datas referentes aos guias 6 e 7 são reservados a projetos propostos pelos alunos ou professor que envolvam um microcontrolador (Arduino, ESP32, PIC ou Raspberry Pi Pico).

Tabela 3.1: Link para as videoaulas - Materiais iniciais

Aula	CONTEÚDOS DAS VIDEOAULAS
1	Apresentação do cronograma da disciplina.
2	Apresentação dos experimentos do Guia 1 para validação das três leis de circuitos elétricos (Ohm, LCK, LTK).
3	Apresentação das informações que se relacionam a três especificações de circuitos que tratam de métodos de minimização.
4	Apresentação das informações que se relacionam a três especificações de circuitos que tratam de métodos de análise.
5	Apresentação das informações que se relacionam a três especificações de circuitos que tratam de transiente de sinais de 1ª e 2ª ordem.
6	Apresentação das informações que se relacionam a três especificações de circuitos no domínio AC.

3.2 Instrumentos de laboratório

Para a realização dos experimentos na forma prática, ou seja, com os circuitos montados em protoboard, além dos componentes elétricos (resistor, capacitor e indutor) podem ser empregadas fontes de sinais (DC ou gerador de função), sendo os valores das variáveis medidas em instrumentos reais (multímetros analógico e digital, além de osciloscópio para transientes e sinais no formato senoidal).

Esses instrumentos, juntamente com um PC, compõem uma bancada de experimento no LSE/DEE/CCET. Existem 24 estações de experimentos neste laboratório, incluindo nove plataformas de experimentação do fabricante NI (National Instruments) com algumas placas específicas. Antes da atual estrutura do LSE com os instrumentos citados nas videoaulas a seguir, as estações NI eram empregadas nas aulas práticas da disciplina Laboratório de Circuitos Elétricos com o uso da placa NI ELVIS II, no antigo LMD (Laboratório Multidisciplinar)/DEE/CCET, hoje inexistente. Um detalhe ainda não mencionado é que as videoaulas de apresentação do material, cujos links foram disponibilizados na seção anterior, fazem menção a estação da National Instruments (<https://www.ni.com/pt-br/support/model.ni-elvis-ii.html>) que utilizava a citada placa nos experimentos de testes.

Nesta seção são disponibilizados os links para as videoaulas que apresentam as principais funcionalidades dos instrumentos mencionados, que são úteis nas práticas da disciplina, não cobrindo todos os seus recursos. A tabela abaixo associa os links dessas videoaulas com os instrumentos das bancadas do LSE.

Tabela 3.2: Link para as videoaulas - Instrumentos de laboratório

CONTEÚDOS DAS VIDEOAULAS
Apresentação das funcionalidades do multímetro analógico.
Apresentação das funcionalidades do multímetro digital.
Apresentação das funcionalidades da fonte DC ajustável simples com controle de corrente.
Apresentação das funcionalidades do gerador de função.
Apresentação das funcionalidades do osciloscópio digital.

Referências Bibliográficas

- [1] NILSSON, James W.; RIEDEL, Susan A. **Circuitos elétricos:** princípios e aplicações. 8. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009. 564 p.
- [2] ALEXANDER, Charles K.; SADIKU, Matthew N. O. **Fundamentos de circuitos elétricos.** 5. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013. 894 p.
- [3] SING, A. S. **AC waveform:** types and advantages. Disponível em: <https://electrically4u.com/ac-waveform-types-and-advantages/>. Acesso em: 4 fev. 2026.

Realizado o Depósito legal na Biblioteca Nacional conforme a Lei nº
10.994, de 14 de dezembro de 2004.

TÍTULO	Circuitos Elétricos: Teoria e Prática em Videoaulas
ORGANIZADORES	Antonio José Portela de Jesus Santos Luciano Buonocore Luiz Eugênio Santos Araújo Filho
SUPORTE	Digital
PROJETO GRÁFICO E CAPA	Canva
PÁGINAS	160
TIPOGRAFIA	Latin Modern Math CORPO Helvetica TÍTULOS

