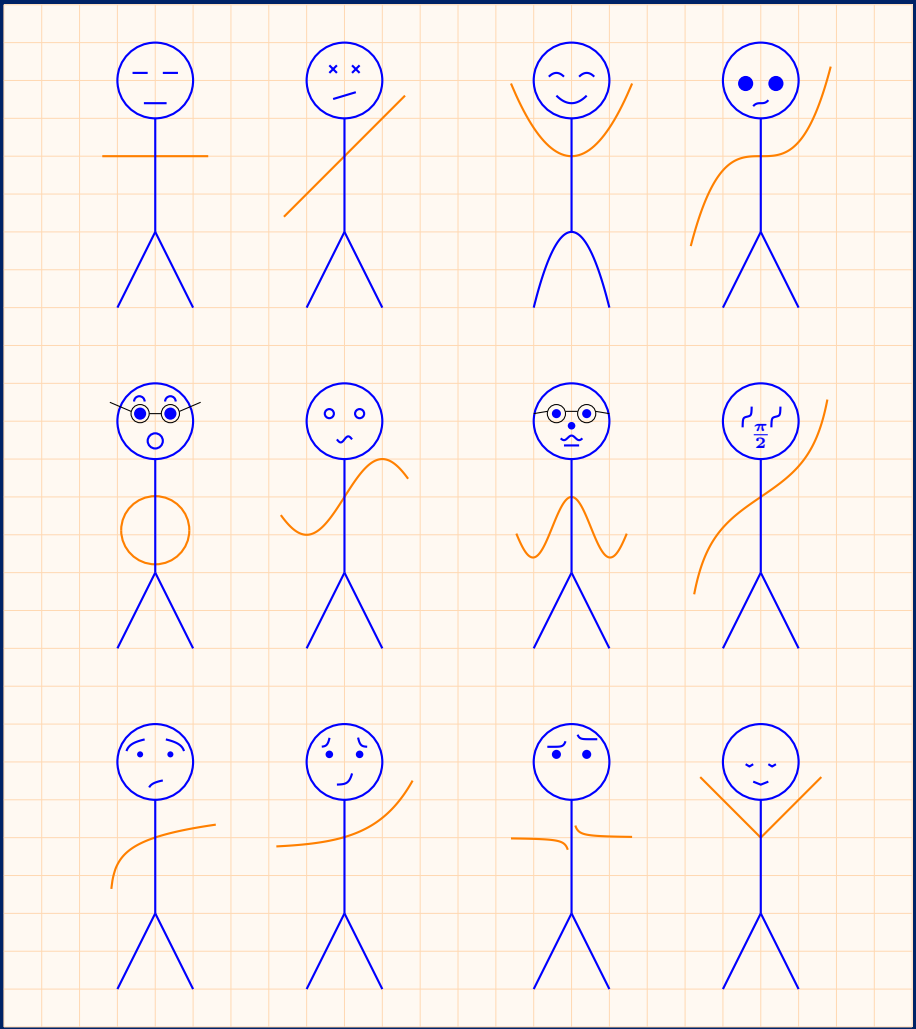
Pre^{x}-Cálculo

Fundamentos de Matemática para Engenharia e Ciências

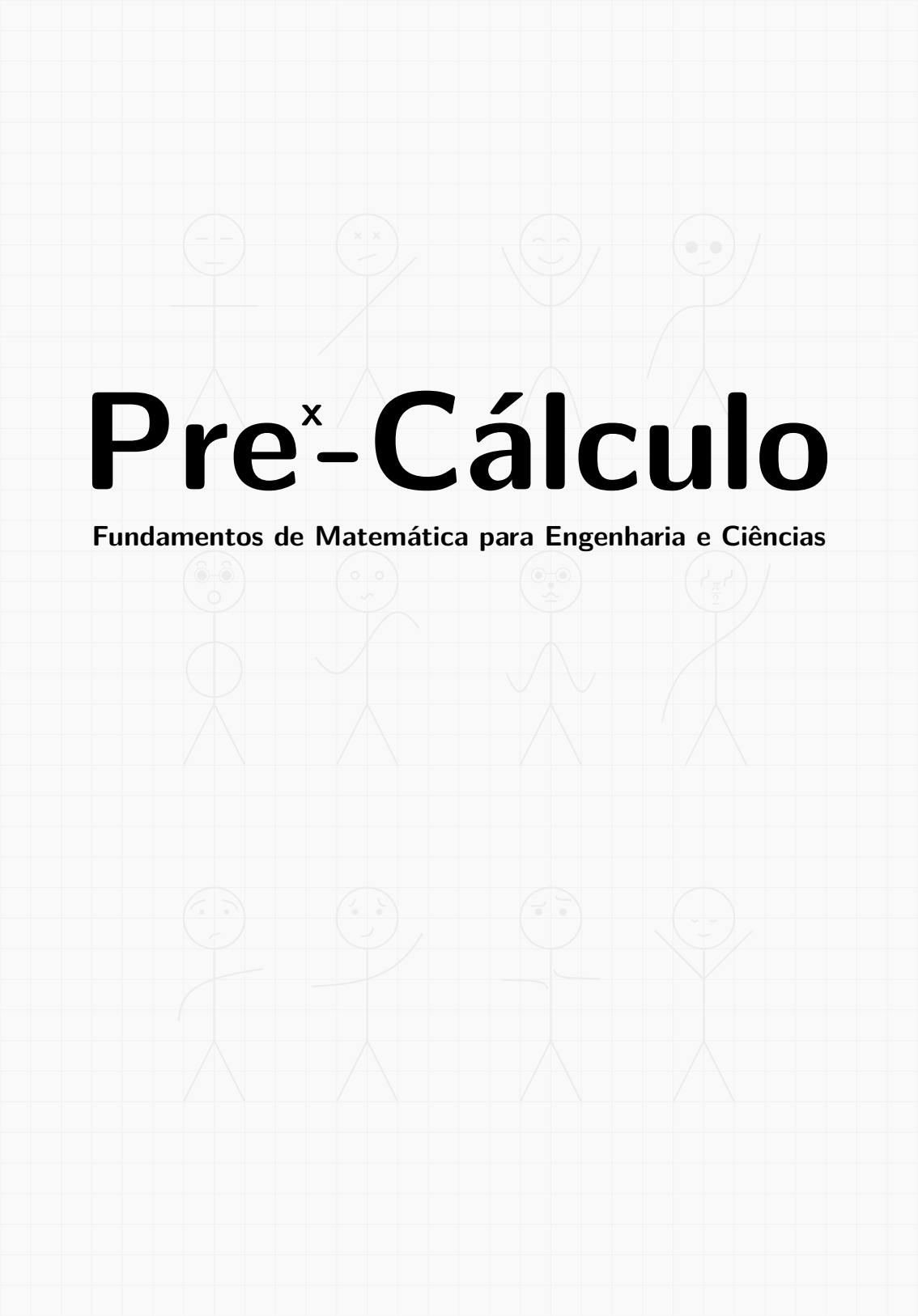


João Valério de Souza Neto

EDUFMA

Pre^{x}-Cálculo

Fundamentos de Matemática para Engenharia e Ciências



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Reitor Prof. Dr. Fernando Carvalho Silva

Vice-Reitor Prof. Dr. Leonardo Silva Soares

SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS

Diretor Prof. Dr. César Augusto Castro

EDITORA DA UFMA

Coordenadora Irenilma Cadête Lima

Conselho Editorial Profa. Dra. Andréa Katiane Ferreira Costa

Profa. Dra. Débora Batista Pinheiro Sousa

Prof. Dr. Edson Ferreira da Costa

Prof. Dr. José Carlos Aragão Silva

Profa. Dra. Jussara Danielle Martins Aires

Profa. Dra. Karina Almeida de Sousa

Prof. Dr. Luís Henrique Serra

Prof. Dr. Luiz Eduardo Neves dos Santos

Profa. Dra. Luma Castro de Souza

Prof. Dr. Márcio José Celeri

Profa. Dra. Maria Áurea Lira Feitosa

Profa. Dra. Raimunda Ramos Marinho

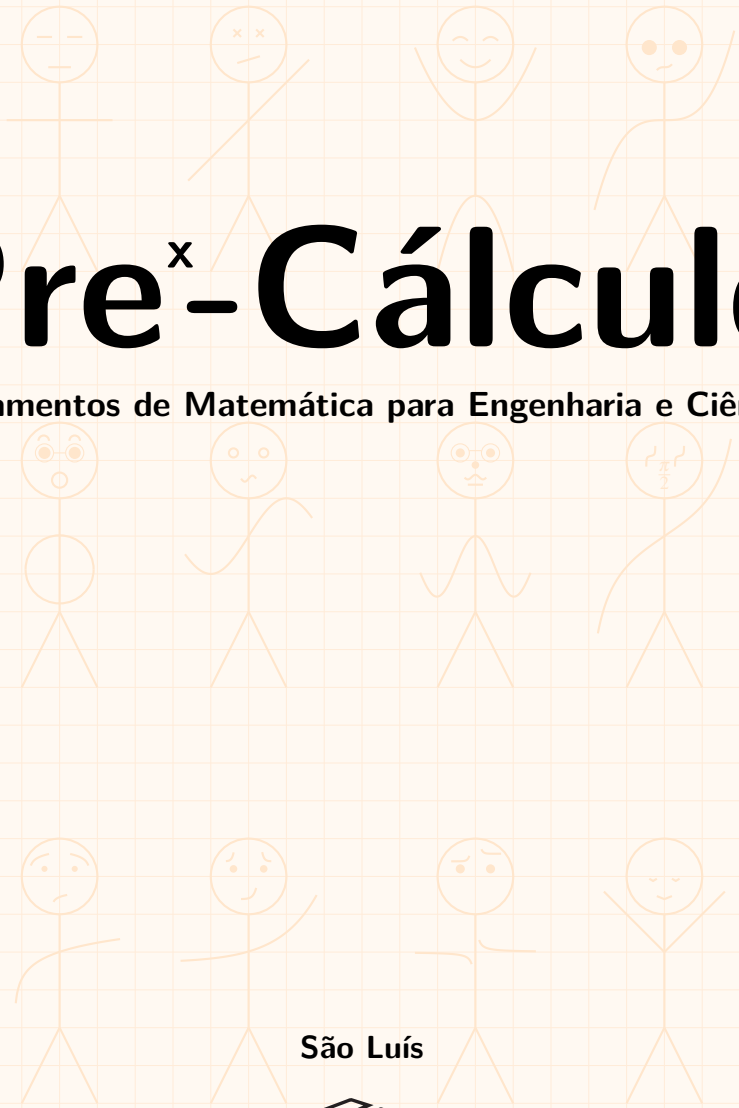
Profa. Dra. Rosângela Fernandes Lucena Batista

Bibliotecária Iole Costa Pinheiro

Associação Brasileira das Editoras Universitárias

Esta obra está licenciada sob uma Licença Creative Commons Atribuição-Não Comercial-Compartilha Igual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0).

João Valério de Souza Neto



Pre^{x}-Cálculo

Fundamentos de Matemática para Engenharia e Ciências

São Luís

EDUFMA

2026

© 2026 EDUFMA – Todos os direitos reservados

Projeto Gráfico, diagramação e capa	João Valério de Souza Neto
Revisão	João Valério de Souza Neto
Ilustrações:	Elaboradas em LaTeX/Overleaf pelo autor

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Souza Neto, João Valério de

Pré-Cálculo: fundamentos de matemática para engenharia e ciências / João Valério de Souza Neto. – São Luís : EDUFMA, 2026.

471 p.: il.

ISBN 978-65-5363-580-7

1. Matemática - estudo e ensino. 2. Pré-cálculo. 3. Engenharia. 4. Ciências. I. Título.

CDD 510

CDU 510.2

Ficha catalográfica elaborada pela biblioteca do CCCh

Bibliotecária: Anna Caroline Mendes

CRB 13 / 793

CRIADO NO BRASIL [2026]

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte deste livro pode ser reproduzida, armazenada em um sistema de recuperação ou transmitida de qualquer forma ou por qualquer meio, eletrônico, mecânico, fotocópia, microfilmagem, gravação ou outro, sem permissão do autor.

EDUFMA | Editora da Universidade Federal do Maranhão

Av. dos Portugueses, 1966 | Vila Bacanga

CEP: 65080-805 | São Luís | MA | Brasil

Telefone: (98) 3272-8157

www.edufma.ufma.br | edufma@ufma.br

Aos alunos que tive,
aos que tenho, e
aos que terei.

Notações

Símbolo	Significado	Símbolo	Significado
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais	$\subset$	Subconjunto próprio
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros	$\subseteq$	Subconjunto ou igual
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais	$\cup$	União de conjuntos
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais	$\cap$	Interseção de conjuntos
$\mathbb{I}$	Conjunto dos irracionais	$\setminus$	Diferença de conjuntos
$\mathbb{C}$	Conjunto dos complexos	$\varnothing$	Conjunto vazio
$\in$	Pertence	$\notin$	Não pertence
$P(A)$	Conjunto das partes de A	$\Rightarrow$	Implica
$\Leftrightarrow$	Se e somente se	$\mapsto$	mapeia
$\wedge$	Conjunção	$\vee$	Disjunção
$\forall$	Para todo	$\exists$	Existe
$\sim$	Negação	$\therefore$	Portanto
$f(x)$	Função	$\propto$	Proporcional
f^{-1}	Inversa	$f \circ g$	Composição
$\lvert x \rvert$	Valor absoluto ou módulo	$\sqrt[n]{x}$	Raiz
x^n	Potência	$\log_b x$	Logaritmo
Σ	Somatório	$\prod$	Produtório
∞	Infinito	$\approx$	Aproximadamente
$\equiv$	Identidade; equivalente	$\neq$	Diferente
: ou $\lvert$	Tal que; divide	$\cdot$	Produto
Δ	Discriminante; Variação	$:=$	Definição

Sumário

Notações vii
Prefácio xiii
1 Lógica Matemática 1
1.1 Introdução 1
1.2 Sentenças 2
1.2.1 Proposição 2
1.2.2 Sentença aberta 3
1.3 Quantificadores 8
1.3.1 O quantificador universal 8
1.3.2 O quantificador existencial 9
1.4 Operadores lógicos 11
1.4.1 O conectivo "e" – ($\wedge$) – Conjunção 12
1.4.2 O conectivo "ou" – ($\vee$) – Disjunção 12
1.4.3 O condicional "se... então" – ($\Rightarrow$) – Implicação 13
1.4.4 O condicional "se e somente se" – ($\Leftrightarrow$) – Bicondicional 13
1.4.5 O modificador "não" – ($\sim$) – Negação 14
1.5 Como negar proposições compostas 15
1.5.1 Negação de uma conjunção ($\wedge$) 16
1.5.2 Negação de uma disjunção ($\vee$) 17
1.5.3 Negação de um condicional simples ($\Rightarrow$) 18
1.5.4 Negação de um bicondicional ($\Leftrightarrow$) 19
1.5.5 Negação de proposições quantificadas 20
1.6 Tautologia 23
1.7 Relações de implicação e equivalência 25
1.7.1 A implicação: "$p \rightarrow q$" 26
1.7.2 A equivalência: $p \leftrightarrow q$ 30
1.8 A lógica dos argumentos 34
1.8.1 Exercícios de argumentos 40

2 Conjuntos Numéricos . . . 43
2.1 Introdução . . . 43
2.2 Números naturais $\mathbb{N}$ . . . 43
2.3 Números inteiros $\mathbb{Z}$ . . . 44
2.4 Números racionais $\mathbb{Q}$ . . . 46
2.5 Números irracionais $\mathbb{I}$ . . . 51
2.6 Números reais $\mathbb{R}$ . . . 52
2.7 Números complexos $\mathbb{C}$ . . . 58
2.8 Intervalos reais . . . 59
2.9 Vizinhanças . . . 65
3 Relações e Funções . . . 74
3.1 Introdução . . . 74
3.2 Plano cartesiano . . . 75
3.3 Relação . . . 78
3.4 Função . . . 79
3.5 Domínio, contradomínio e imagem de uma função . . . 81
3.6 Determinação de domínio e imagem de uma função . . . 83
3.7 Gráfico de uma função . . . 86
3.8 Função par e função ímpar . . . 89
3.9 Função crescente e função decrescente . . . 90
3.10 Função injetora, sobrejetora e bijetora . . . 92
3.11 Função inversa . . . 94
3.12 Função composta . . . 97
4 Funções Elementares . . . 102
4.1 Introdução . . . 102
4.2 Funções potência . . . 102
4.2.1 Função polinomial de grau 1 . . . 102
4.2.2 Função polinomial de grau 2 . . . 123
4.2.3 Função polinomial de grau 3 . . . 158
4.2.4 A função racional . . . 162
4.3 Funções Logarítmica e Exponencial . . . 168
4.3.1 Motivação . . . 168
4.3.2 Equação exponencial . . . 168
4.3.3 Função logarítmica . . . 173
4.3.4 A Função inversa da logarítmica: A Função exponencial . . . 188
4.3.5 O número e e a função exponencial $f(x) = e^x$ . . . 201
4.3.6 Linearização exponencial . . . 209

4.3.7 Linearização de funções potência . . . 212
4.4 Funções trigonométricas . . . 219
4.4.1 Motivação . . . 219
4.4.2 O ciclo trigonométrico . . . 220
4.4.3 Função seno . . . 224
4.4.4 Função cosseno . . . 224
4.4.5 Função tangente . . . 224
4.4.6 Propriedades das funções trigonométricas . . . 226
4.4.7 Funções trigonométricas gerais (Modelação a Dados) . . . 228
4.4.8 Funções trigonométricas inversas . . . 237
4.5 Função módulo . . . 241
4.5.1 Motivação . . . 241
4.5.2 Função módulo . . . 242
5 Sequências e Progressões . . . 252
5.1 Introdução . . . 252
5.2 Sequências . . . 253
5.2.1 Conceito e notação . . . 253
5.2.2 Sequências definidas por fórmula (forma explícita) . . . 253
5.2.3 Sequências definidas por recorrência . . . 254
5.3 Séries . . . 257
5.4 Recorrência . . . 259
5.4.1 Modelos discretos por regras iterativas . . . 259
5.4.2 Recorrência linear de primeira ordem . . . 259
5.5 Princípio da Indução . . . 260
5.5.1 A ideia de prova por etapas . . . 260
5.6 Progressão Aritmética (PA) . . . 262
5.6.1 Definição e caracterização . . . 262
5.7 Progressão Geométrica (PG) . . . 268
5.7.1 Definição e caracterização . . . 268
5.8 Limites de Sequências . . . 272
5.8.1 Sequências infinitas e a ideia de aproximação . . . 272
5.8.2 Critérios de convergência e divergência . . . 274
5.8.3 Cotas, sequências limitadas e representação na reta real . . . 274
5.8.4 Ínfimo e supremo (formal) . . . 275
5.8.5 Sequências monótonas e Teorema da Convergência Monótona . . . 276
5.8.6 Limite superior e limite inferior de uma sequência . . . 277
5.8.7 A série harmônica e a ideia de crescimento sem soma finita . . . 278
5.8.8 Raio de convergência (séries de potência) . . . 280

6 Interpretação e Resolução de Problemas . . . 284
6.1 Introdução . . . 284
6.2 Regras de três . . . 285
6.2.1 Razão, proporção e grandezas proporcionais . . . 285
6.2.2 Estrutura lógica para regras de três . . . 286
6.2.3 Regra de três simples . . . 287
6.2.4 Regra de três composta . . . 291
6.3 Problemas resolvidos por (M.D.C.) e por (M.M.C.) . . . 297
6.3.1 Máximo Divisor Comum (M.D.C.) . . . 297
6.3.2 Mínimo Múltiplo Comum (M.M.C.) . . . 302
6.4 Fatorial e Princípio Fundamental da Contagem . . . 306
6.4.1 Princípio Fundamental da Contagem (PFC) . . . 307
6.4.2 Fatorial . . . 308
6.5 Lógica de Conjuntos e Diagramas de Venn-Euler . . . 311
6.6 Análise Dimensional e Estimativa . . . 316
6.6.1 Estimativa de ordem de grandeza (Problemas de Fermi) . . . 316
6.6.2 Dimensões físicas e homogeneidade . . . 317
6.7 Propagação de Incertezas . . . 320
6.8 Sistemas Lineares e Matrizes . . . 323
6.8.1 Estruturação de dados e Operações matriciais . . . 323
6.8.2 Conjunto solução de sistemas lineares . . . 324
6.9 Otimização . . . 330
7 Números Complexos . . . 346
7.1 Introdução . . . 346
7.2 Conjuntos dos números complexos . . . 347
7.2.1 O número i . . . 347
7.2.2 Potências fundamentais de i . . . 348
7.2.3 Número complexo . . . 354
7.3 Forma trigonométrica dos números complexos . . . 363
7.3.1 Representação geométrica de um número complexo . . . 363
7.3.2 Forma trigonométrica de um número complexo . . . 367
7.4 Operações com complexos na forma trigonométrica . . . 373
7.5 Forma de Euler para um número complexo . . . 386
8 Polinômios e Equações Polinomiais . . . 395
8.1 Introdução . . . 395
8.2 Polinômios . . . 396
8.2.1 Definição . . . 396
8.2.2 Grau, coeficiente líder e termo independente . . . 396

8.2.3 Identidade entre polinômios . . . 398
8.2.4 Polinômio identicamente nulo . . . 403
8.2.5 Valor numérico de um polinômio . . . 404
8.3 Operações com polinômios . . . 409
8.3.1 Adição e Subtração . . . 409
8.3.2 Multiplicação . . . 411
8.3.3 Divisão . . . 413
8.4 Equações Polinomiais . . . 426
8.4.1 Definição . . . 426
8.4.2 Raiz ou zero . . . 426
8.4.3 Conjunto solução . . . 427
8.4.4 O Teorema Fundamental da Álgebra . . . 431
8.4.5 Teorema da decomposição . . . 433
8.4.6 Relações de Girard . . . 436
8.4.7 Multiplicidade de uma raiz . . . 439
8.4.8 Teorema das raízes complexas . . . 441
8.4.9 Raízes racionais . . . 443
8.4.10 Método da Bisseção . . . 446
Gabarito . . . 455
Bibliografia . . . 466
Índice . . . 468

Prefácio

Geral

Esta obra reflete minha visão sobre Pré-Cálculo, então críticas, considerações e sugestões são bem-vindas. Embora alguns defendam a antecipação de tópicos do Cálculo, acredito que essa introdução deva ser sutil, destacando a beleza e a utilidade prática dos conceitos fundamentais. Minha intenção é despertar no aluno seu senso matemático por meio de aplicações que revelem a importância da disciplina antes do rigor teórico do Cálculo. Assim, ao enfrentar temas mais complexos, o estudante terá segurança, confiança e propósito, sabendo que o esforço compensa diante da beleza de aprender matemática.

Acredito que, ao saber manipular intervalos e vizinhança, desenvolver estruturas algébricas, raciocinar logicamente e conhecer as funções elementares, além de determinar domínios, alunos de diferentes níveis tornam-se suficientes para alcançar sucesso em Cálculo. Evidentemente, o aluno deve querer e aceitar o processo de estudar exatas.

Nesse consentimento, este livro foi elaborado com o intuito de proporcionar uma introdução sólida aos conceitos fundamentais essenciais para o aprendizado do Cálculo. Com uma abordagem voltada a aplicações, ao desenvolvimento gradual do raciocínio matemático e à aprendizagem. O conteúdo foi distribuído de maneira sequencial, respeitando a lógica de aprendizagem progressiva e dialogando com experiências pedagógicas de ensino vividas ao longo de 10 anos em disciplinas de Fundamentos de Matemática, Pré-Cálculo, Cálculo I, II e III, Geometria Analítica, Álgebra Linear, Estatística & Probabilidade e Cálculo Numérico.

A proposta central é desenvolver, de maneira gradual, o raciocínio matemático e a autonomia intelectual do estudante. Mais do que transmitir técnicas, pretende-se estimular a percepção do papel da matemática na compreensão de fenômenos e na solução de problemas reais. Cada capítulo inicia com uma breve contextualização – às vezes histórica – ressaltando a relevância do tema tanto para os conteúdos subsequentes quanto para sua aplicação nas ciências.

Os exercícios resolvidos e propostos buscam inserir o estudante em múltiplos contextos problematizadores e aplicados das ciências e das engenharias, fomentando a capacidade de análise, de aplicação e a criatividade na resolução de problemas. Foram então incluídas questões que exploram diferentes habilidades e níveis de complexidade, no final de cada seção e como material suplementar como testes de verificação da aprendizagem. A intenção é despertar o senso crítico–matemático, permitindo que o estudante reconheça a natureza dos desafios que encontrará no Cálculo e desenvolva segurança para enfrentá-los.

Tais listas de exercícios presentes ao final das seções e os testes de verificação da aprendizagem (material de apoio em anexo) foram cuidadosamente elaboradas. Seu objetivo não é a exaustão, mas a prática reflexiva e consciente: aprende-se matemática essencialmente pela ação, pela experimentação e pelo enfrentamento de desafios variados que estimulam o senso crítico e a autonomia intelectual.

O estudo do Pré-Cálculo tem como finalidade muito mais do que revisitar conteúdos da educação básica: ele abre espaço para a reconstrução da percepção matemática. Ao retomar fundamentos conhecidos, o estudante amplia a capacidade de abstração, fortalece o pensamento lógico e prepara a mente para ideias mais sofisticadas. Trata-se de um processo de reorientação cognitiva — compreender o que antes parecia difícil, perceber beleza nas estruturas matemáticas e reconhecer sua importância para as Engenharias e para as Ciências.

Uma meta relevante é promover o nivelamento de conhecimentos entre discentes de diferentes origens e ritmos de aprendizagem que ingressam em cursos de exatas. Por isso, adotou-se um formato conciso: um livro de Pré-Cálculo não precisa reproduzir extensivamente toda a matemática escolar, mas sim apresentar os conceitos essenciais de modo claro, direto e funcional, servindo como ponte entre a educação básica e o cálculo universitário. Assim, evita-se excessos e discussões periféricas, privilegiando uma abordagem objetiva e cirúrgica, adequada ao propósito formativo.

Optou-se por uma estrutura concisa e objetiva, evitando abordagens excessivamente extensas. Acredita-se que um livro de Pré-Cálculo deve ser cirúrgico em seu conteúdo, suscitando no aluno a recuperação e o aprimoramento de competências já desenvolvidas na educação básica, sem recorrer a explicações desnecessariamente longas.

A aparência volumosa fica por conta da diagramação do texto integralmente feita em LaTeX, para garantir excelência na qualidade tipográfica e realce visual do texto com expressões matemáticas, assegurando clareza notacional e estética adequada à leitura matemática, fatores que contribuem para uma experiência de estudo agradável e eficaz.

Este volume também pretende funcionar como um manual de consulta rápida para discentes de Cálculo que necessitem revisitar tópicos essenciais para o bom acompanhamento da disciplina.

Sobre os capítulos

Ao longo da obra, estudantes de Matemática terão contato com notações formais, símbolos, demonstrações elementares e referências cruzadas, fundamentais para a formação teórica. Professores que atuam em cursos de Engenharia e em outras áreas afins podem, conforme a carga horária e os objetivos da disciplina, optar por omitir algumas dessas demonstrações sem prejuízo do encadeamento conceitual.

Trata-se, portanto, de uma obra pensada para cursos das Ciências Exatas e Aplicadas em geral, oferecendo um percurso completo e flexível, do qual cada leitor poderá extrair os conteúdos mais adequados aos seus objetivos formativos.

Capítulo 1 | Lógica Matemática

Este capítulo é considerado central na formação do estudante. A Lógica Matemática desenvolve a capacidade de argumentação, raciocínio estruturado e escrita precisa, habilidades que extrapolam o contexto estritamente matemático. O conteúdo aqui apresentado prepara o aluno para o Cálculo, para as Engenharias, para as Ciências em geral, bem como para áreas como Programação, Computação e Análise Numérica.

Capítulo 2 | Conjuntos Numéricos

Este capítulo apresenta os conjuntos numéricos, suas propriedades fundamentais e as principais relações entre eles. O objetivo é consolidar a base conceitual necessária para o desenvolvimento do pensamento algébrico e para a compreensão rigorosa dos diferentes domínios numéricos, em termos de intervalos e vizinhanças.

Capítulo 3 | Relações e Funções

Antes do estudo sistemático das funções, introduzem-se os conceitos de relação e de função. Essa abordagem visa fornecer ao aluno uma compreensão conceitual sólida, essencial para evitar dificuldades futuras na interpretação e no uso de funções em diferentes contextos matemáticos e aplicados.

Capítulo 4 | Funções Elementares

Neste capítulo são estudadas as principais funções elementares, indispensáveis para o aprendizado do Cálculo Diferencial e Integral. Trabalham-se suas definições, representações algébricas e interpretações gráficas,

enfatizando o conceito de função como ferramenta essencial para a descrição de fenômenos e a resolução de problemas reais. Em cursos que não possuem a disciplina de Pré-Cálculo, é comum que esse conteúdo precise ser retomado durante o estudo do Cálculo, o que reforça sua importância.

Capítulo 5 | Sequências e Progressões

O estudo das sequências constitui um elo fundamental entre a Álgebra e o Cálculo. Este capítulo aborda os conceitos básicos e propriedades das sequências e progressões, preparando o aluno para noções como limite, convergência e séries.

Capítulo 6 | Interpretação e Resolução de Problemas

Este capítulo foi elaborado a partir de diálogos com profissionais das Engenharias, com o objetivo de enfrentar dificuldades recorrentes dos alunos na interpretação e modelagem de problemas. São discutidas estratégias e conteúdos essenciais para a resolução de problemas em contextos da Engenharia e das Ciências. Dependendo do enfoque do curso, este capítulo pode ser omitido sem prejuízo da estrutura central do Pré-Cálculo.

Capítulo 7 | Números Complexos

Os números complexos são frequentemente apontados por docentes de áreas tecnológicas como um conteúdo que merece maior atenção na formação básica. Neste capítulo, o tema é desenvolvido de forma cuidadosa e conceitualmente sólida, visando preparar o aluno para aplicações posteriores, especialmente em áreas como a Engenharia Elétrica.

Capítulo 8 | Polinômios e Equações Polinomiais

Polinômios e equações algébricas constituem a base da modelagem de inúmeros fenômenos naturais e tecnológicos. Este capítulo apresenta os conceitos fundamentais, técnicas operatórias e métodos de resolução, destacando sua importância tanto do ponto de vista teórico quanto aplicado.

Chapadinha/MA.

Outono de 2026

Capítulo 1

Lógica Matemática

1.1 Introdução

A Lógica Matemática é frequentemente descrita como a "gramática da razão". Mais do que um conjunto de regras para a manipulação de símbolos, ela constitui a estrutura fundamental sobre a qual todo o edifício da matemática e das ciências exatas é construído.

Historicamente, a sistematização do raciocínio iniciou-se com **Aristóteles** (séc. IV a.C.), que buscou formalizar as regras da argumentação válida. No entanto, foi apenas no século XIX, com matemáticos como **George Boole** e **Gottlob Frege**, que a lógica transcendeu a filosofia e tornou-se uma disciplina matemática, calculável e precisa. Essa evolução permitiu que, décadas mais tarde, **Alan Turing** e **Claude Shannon** utilizassem a lógica booleana para fundamentar a era digital. Hoje, a Lógica é o motor invisível por trás da Inteligência Artificial, da verificação de softwares críticos e da segurança de dados.

No contexto deste livro, o estudo da Lógica cumpre um papel de **reorientação cognitiva**. Conforme mencionado no prefácio, o objetivo aqui é promover uma *reconstrução da percepção matemática*. Ao dominar os conectivos, as tabelas-verdade e as regras de inferência, o estudante não está apenas aprendendo a resolver exercícios; está adquirindo uma ferramenta poderosa para:

- **Ampliar a capacidade de abstração:** permitindo modelar problemas complexos de Engenharia e Ciências Agrárias;
- **Estruturar a argumentação:** essencial para a escrita científica e para a demonstração de teoremas no Cálculo (como nas definições ε-δ);
- **Tomar decisões assertivas:** blindando a mente contra falácias e ambiguidades em análises de dados e cenários de risco.

Portanto, este capítulo é central na sua formação. As habilidades aqui desenvolvidas extrapolam o contexto estritamente matemático, preparando sua mente para a sofisticação exigida pelo Cálculo, pela programação e pela análise numérica. Encare as próximas páginas como um treino de alto nível para o seu raciocínio crítico.

1.2 Sentenças

Na linguagem natural, uma **sentença** é a unidade mínima de comunicação que expressa uma ideia completa e autônoma. Estruturalmente, é uma sequência de palavras (geralmente com sujeito e predicado) organizada segundo regras gramaticais para transmitir um significado.

Antes de definir o que interessa à Lógica, é crucial distinguir os tipos de sentenças existentes na linguagem, pois nem todas servem como matéria-prima para o cálculo lógico.

Abaixo, apresenta-se a classificação usual de sentenças com respectivos exemplos:

Classificação	**Exemplo**
Declarativa (Afirma ou nega um fato)	*A luz viaja mais rápido que o som.*
Interrogativa (Formula uma pergunta)	*Qual é o seu nome?*
Imperativa (Exprime ordem ou pedido)	*Estude para a prova.*
Exclamativa (Exprime emoção/sentimento)	*Que dia maravilhoso!*
Optativa (Exprime um desejo)	*Deus te abençoe.*

1.2.1 Proposição

Para a Lógica Matemática, interessam apenas as sentenças que podem ser julgadas como verdadeiras ou falsas. Chega-se, assim, ao conceito central da Lógica:

Definição 1.2.1: Proposição

Chama-se **proposição** toda sentença declarativa que pode ser classificada, de forma única, como verdadeira (V) ou falsa (F).
Portanto, para ser uma proposição, a sentença deve satisfazer simultaneamente três condições:

i. **Ser oração:** deve ter sujeito e predicado (sentido completo);

ii. **Ser declarativa:** não pode ser exclamativa, interrogativa, imperativa ou optativa;

iii. **Ter valor lógico definido:** deve assumir um, e apenas um, dos valores verdade (V ou F), excluindo-se a ambiguidade.

Notação: Geralmente, as proposições simples são representadas por letras latinas minúsculas: $p, q, r, s, t \ldots$

No exemplo que segue, contrasta-se o que é proposição com o que não é, justificando cada caso.

Exemplos:

São Proposições (Lógica)

1. $2+3=5$.

NÃO são Proposições

1. Feche a porta!

Declarativa com valor lógico V.

2. $7-4=1$.
   Declarativa com valor lógico F. (Ser falsa não deixa de torná-la uma proposição!)

3. Todo número par é divisível por 2.
   Sentença declarativa V.

4. O Brasil localiza-se na Europa.
   Sentença declarativa F (fato geográfico verificável).

5. 5 é um número primo.
   Sentença declarativa V.

6. A Lua é feita de queijo.
   Sentença declarativa F.

Imperativa (ordem). Não tem valor V ou F.

2. Quem descobriu o Brasil?
   Interrogativa. Perguntas não são verdadeiras nem falsas.

3. $x+5=7$.
   Sentença aberta. O valor lógico depende de x (variável não definida).

4. Que belo dia!
   Exclamativa. Expressa estado emotivo, subjetivo.

5. x é um número par.
   Sentença aberta. Quem é x?

6. Esta frase é falsa.
   Paradoxo. Não pode receber valor lógico sem gerar contradição.

1.2.2 Sentença aberta

Muitas expressões matemáticas não podem ser classificadas como V ou F de imediato porque contêm "espaços vazios" ou variáveis. Elas são o esqueleto de uma proposição, mas ainda não são proposições.

Definição 1.2.2: Sentença aberta

É uma expressão que contém uma ou mais **variáveis** e que se torna uma proposição (V ou F) somente quando essas variáveis são substituídas por elementos de um conjunto determinado (Conjunto Universo).

Exercício resolvido 1.2.2

1. Da linguagem natural para a matemática:

Proposição	$\xrightarrow{\text{substituindo}}$	**Sentença Aberta**
João é alto.	(João $\rightarrow x$)	*x é alto.*
$2+3=5$	$(2 \rightarrow x)$	$x+3=5$

2. Exemplos matemáticos clássicos:

- $x+3>7$
  (Inequação)
- $2x-4=0$
  (Equação)
- x é divisor de y
  (Propriedade aritmética)

Variáveis e Conjunto Verdade

Para transformar uma sentença aberta em proposição, precisamos de um contexto, chamado de **Conjunto Universo** (U). Os elementos de U que tornam a sentença verdadeira formam o **Conjunto Verdade** (V).

Exercício resolvido 1.2.2

3. Considere a sentença aberta $P(x): x+3=7$.

- Ao atribuir $x=4$, tem-se $4+3=7$ (V). Logo, $4 \in V$.
- Ao atribuir $x=2$, tem-se $2+3=7$ (F). Logo, $2 \notin V$.

4. Seja a sentença aberta $x^2=9$.

- Se o universo for os Inteiros ($U=\mathbb{Z}$), então $V=\{3,-3\}$.
- Se o universo for os Naturais ($U=\mathbb{N}$), então $V=\{3\}$.

Note como o Conjunto Verdade depende fundamentalmente do Universo escolhido.

Sentenças abertas com mais de uma variável

Uma sentença pode depender de múltiplos parâmetros para ter seu valor lógico definido.

Exercício resolvido 1.2.2

5. A expressão "x é irmão de y" é aberta.

- Ao substituir $x=$ Ana e $y=$ Pedro, a sentença pode ser julgada (V ou F).

6. Considere a equação $2x+y=10$ no universo $U=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Alguns pares que tornam a sentença verdadeira (Conjunto Verdade):

$$V=\{(1,8),(2,6),(3,4),(4,2),(0,10)\}$$

Qualquer outro par, como $(1,1)$, torna a sentença falsa ($2(1)+1=3\neq 10$).

Equações e Inequações

Dentro da lógica matemática, **equações** e **inequações** são exemplos particulares de sentenças abertas. Ambas estabelecem relações (de equivalência ou ordem) entre expressões matemáticas, e o valor lógico de cada uma depende dos valores atribuídos às variáveis.

Equações

Definição 1.2.3: Equação

É toda sentença aberta articulada pelo verbo *ser igual a* ($=$). Em termos lógicos, é uma afirmação de identidade entre duas expressões algébricas que só se torna verdadeira para determinados valores das variáveis.

Perceba que...

Embora toda equação seja uma sentença aberta, a recíproca não é verdadeira. O que caracteriza uma equação é a presença do símbolo de igualdade ($=$) entre duas expressões -— chamadas de **primeiro membro** e **segundo membro** -— das quais **pelo menos uma contém uma incógnita**.

Exercício resolvido 1.2.2

7. Exemplos de sentenças que são equações:

- $5y+2=12$
- $x^2-5x+6=0$
- $\frac{t}{2}+1=5$
- $\sqrt{x+1}=3$

Inequações

Definição 1.2.4: Inequação

É toda sentença aberta caracterizada por uma relação de ordem. Ao contrário da igualdade, ela expressa que um termo é *maior*, *menor* ou *diferente* do outro, utilizando os sinais $\lesseqgtr$ ou $\neq$.

Importância lógica

As inequações são essenciais para formular proposições condicionais, tal como: "Se $x > 2$, então $x^2 > 4$", onde a implicação lógica, 'se... então', conecta duas sentenças abertas.

Exercício resolvido 1.2.2

8. Exemplos de inequações variadas:

- $2x > 10$
- $a \leq b+1$
- $y \neq 0$
- $z^2 \geq 4$
- $3m < n$

9. Determine o conjunto verdade (V) para cada sentença aberta, considerando os conjuntos universo (U) especificados:

Enunciados:

a) $2x+1=9 \quad U=\{2;3;4;5\}$

b) $x-1>4 \quad U=\{3;4;5;6;7;8\}$

c) $x^2=25 \quad U=\{-5;0;5;10\}$

d) $x^2=9 \quad U=\{1;2;3;4\}$

e) $x+y=5 \quad U=\{(1,4);(2,2);(3,2);(0,5)\}$

f) $x<y \quad U=\{(3,5);(5,3);(2,2);(1,4)\}$

g) $x+z=y \quad U=\{(1,3,2);(2,5,3);(4,6,2)\}$

Soluções:

a) $V=\{4\}$ *(Pois* $2(4)+1=9$*)*

b) $V=\{6;7;8\}$ *(Valores maiores que 5)*

c) $V=\{-5;5\}$

d) $V=\{3\}$ *(O valor* -3 *não está em U)*

e) $V=\{(1,4);(3,2);(0,5)\}$

f) $V=\{(3,5);(1,4)\}$

g) $V=\{(1,3,2);(4,6,2)\}$

Exercício 1.2

1. Classifique as sentenças abaixo em **Proposição (P)** ou **Não Proposição (NP)**. Para as que forem proposições, indique o seu valor lógico (V ou F).

   a) O número 25 é um quadrado perfeito.

   b) Que dia chuvoso!

   c) $3+4\times 2=14$.

   d) Estude lógica todos os dias.

   e) A capital da França é Londres.

   f) Existe vida inteligente em outros planetas?

   g) O triplo de um número menos dois.

   h) Todo losango é um quadrado.

   i) $x-5=0$.

   j) O Brasil é o único país da América do Sul que fala português.

2. Analise as sentenças abaixo e justifique por que elas **não** são proposições, baseando-se nas três características obrigatórias (sujeito/predicado, declarativa, valor lógico).

   a) "Silêncio, por favor!"

   b) "Quem descobriu a América?"

   c) "$2x+3y=10$."

   d) "A raiz quadrada de um número negativo."

3. Dada a sentença aberta $P(x) : 2x - 4 = 6$, determine o conjunto verdade V para cada um dos seguintes conjuntos universo U:

   a) $U = \mathbb{R}$ (Reais) b) $U = \mathbb{N}$ (Naturais) c) $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

4. Transforme as seguintes proposições em sentenças abertas, substituindo os termos sublinhados por variáveis adequadas $(x, y, z...)$:

   a) O número 10 é par. b) Maria é irmã de João. c) 3 mais 5 é igual a 8.

5. Considere a sentença aberta $Q(x) : x^2 > 10$. Determine o valor lógico (V ou F) para as seguintes atribuições:

   a) $x = 3$ b) $x = -4$ c) $x = \sqrt{10}$ d) $x = 0$

6. Seja a sentença aberta $R(x, y) : x + y = 5$, onde $x, y \in \mathbb{N}$. Liste todos os pares ordenados (x, y) que tornam a sentença verdadeira.

7. Explique, com suas palavras, a diferença fundamental entre uma proposição e uma sentença aberta. Dê um exemplo original de cada uma.

8. A frase "Ele foi o melhor jogador da partida" é uma proposição? Justifique sua resposta considerando o contexto (ou a falta dele).

9. A frase "Esta sentença é falsa" pode ser considerada uma proposição lógica? Por quê? (Dica: Tente atribuir V ou F e veja o que acontece).

10. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determine o conjunto verdade da sentença aberta $P(x) : x$ é primo e $x < 5$, considerando A como conjunto universo.

11. Determine o conjunto verdade V para cada sentença aberta, considerando o conjunto universo $U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

    a) $x^2 - 4 = 0$ b) $2x + 1 > 5$ c) $x^2 < 5$ d) $|x| = 2$

12. Classifique as seguintes proposições como Verdadeiras (V) ou Falsas (F), considerando o universo dos números reais ($\mathbb{R}$).

    a) Se $x = 3$, então $x^2 > 8$. b) Se $x < -2$, então $x^2 < 4$.

    c) Existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 + 1 = 0$. d) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$.

13. Seja a sentença aberta $P(x, y) : 2x + y \leq 10$, definida no universo $U = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (números naturais). Quais dos pares ordenados abaixo pertencem ao conjunto verdade dessa sentença?

a) $(3,4)$ b) $(5,1)$ c) $(2,7)$

d) $(4,3)$ e) $(0,10)$ f) $(6,0)$

14. Um sistema de equações pode ser visto como uma conjunção lógica ("e"). Determine o par (x,y) que torna verdadeira a sentença composta:

$$P(x,y) : (x+y=7) \text{ e } (x-y=1)$$

15. Considere as sentenças abertas $A(x) : x > 2$ e $B(x) : x < 5$. Determine o conjunto verdade da sentença composta "$A(x)$ e $B(x)$" no universo dos números inteiros ($\mathbb{Z}$).

1.3 Quantificadores

Sentenças abertas podem ser transformadas em proposições completas por meio de **quantificadores**. Um quantificador indica a extensão ou abrangência da afirmação sobre o domínio das variáveis.

Existem dois principais tipos de quantificadores: o **universal**, que abrange todos os elementos do domínio, e o **existencial**, que indica a existência de ao menos um elemento que torna a sentença verdadeira.

1.3.1 O quantificador universal

O **quantificador universal**, representado por

$$\forall \quad \begin{cases} \bullet \text{ qualquer que seja} \\ \bullet \text{ para todo} \\ \bullet \text{ para cada} \end{cases}$$

é um símbolo lógico que expressa uma proposição verdadeira para todos os elementos de um conjunto.

Exercício resolvido 1.3.1

1. Transforme a sentença aberta em a) em uma proposição e reflita para classificar como V ou F as demais:

a) $x+1=7$

b) $(\forall x)\ (x^3 = 2x^2)$

c) $(\forall a)\ \left((a+1)^2 = a^2+2a+1\right)$

d) $(\forall y)\ (y^2+1>0)$

e) $\forall x \in \mathbb{R},\ (x+1>x)$

f) $\forall x \in \mathbb{N},\ (x^2 \geq x)$

Resolução:

a) A sentença aberta $x+1=7$ se torna V para $x=6$ e F para qualquer outro valor de x, i.e., seu valor lógico é discutível.
Agora, ao adicionar o quantificar universal $\forall$ do seguinte modo:

$$(\forall x)\ (x+1=7), \text{se lê: qualquer que seja } x,\ x+1=7,$$

tem-se uma proposição, que obviamente é F, tendo em vista que ela será V apenas quando $x=6$. Logo, ao adicionar o quantificador universal $\forall$, a sentença aberta $x+1=7$ deu lugar a proposição $(\forall x)\ (x+1=7)$, que é F.

b) Reflita e conclua que a sentença $(\forall x)\ (x^3=2x^2)$ é F.

c) Reflita e conclua que a sentença $(\forall a)\ \left((a+1)^2=a^2+2a+1\right)$ é V.

d) Reflita e conclua que a sentença $(\forall y)\ (y^2+1>0)$ é V.

e) A sentença $\forall x\in\mathbb{R},\ (x+1>x)$ é V, pois para qualquer número real x, somar 1 sempre resulta em um número maior que ele próprio.

f) A sentença $\forall x\in\mathbb{N},\ (x^2\geq x)$ é V, pois o quadrado de qualquer número natural é sempre maior ou igual ao próprio número.

Perceba que...

Se uma afirmação não é verdadeira para ao menos um elemento do domínio, então o quantificador universal torna a afirmação falsa.

1.3.2 O quantificador existencial

O **quantificador existencial**, representado por

$$\exists \quad \begin{cases} \bullet \text{ existe} \\ \bullet \text{ existe pelo menos um} \\ \bullet \text{ existe um} \end{cases}$$

é um símbolo lógico usado para expressar uma proposição verdadeira para ao menos um valor da variável do conjunto.

Exercício resolvido 1.3.2

1. Transforme a sentença aberta $x+1=7$ em uma proposição verdadeira.
Resolução: Adicionando o quantificador existencial $\exists$ a sentença aberta $x+1=7$, ela torna-se $(\exists x)\ (x+1=7)$, que se lê: existe um, ou existe pelo menos um, ou existe um x tal que $x+1=7$, o que é verdade, uma vez que, se sabe que, $x=6$ torna a sentença aberta uma proposição verdadeira.

2. A sentença $\exists x \in \mathbb{R},\ (x^2=9)$ é verdadeira, pois existem valores $x=3$ e $x=-3$ que satisfazem a igualdade.

3. A sentença $\exists x \in \mathbb{R},\ (x^2+1=0)$ é falsa, pois não existe número real cujo quadrado somado a 1 resulte em 0.

4. A proposição quantificada $(\exists! x)\ (x+1=7)$, com símbolo $\exists!$, significa *existe um único* x tal que $x+1=7$, é verdadeira. De fato, $x=6$ é o único x que satisfaz a sentença aberta $x+1=7$.

5. Reflita e conclua que

a) $(\exists x)\ (x^3=2x^2)$ é V.
b) $(\exists x)\ (a^2+1\leq 0)$ é F.
c) $(\exists x)\ \big((m+1)\neq m^2+m\big)$ é F.
d) $(\exists! x)\ (x+3>2)$ é F.

Suma e comparação entre os quantificadores

- $\forall$ afirma que "*todos* os elementos satisfazem a proposição".
- $\exists$ afirma que "*ao menos um* elemento satisfaz a proposição".

Exercício 1.3

1. A veracidade de uma proposição quantificada depende crucialmente do conjunto universo U considerado. Para a sentença aberta $P(x): x^2<5$, determine o valor lógico (V ou F) das seguintes proposições e justifique sua resposta analisando os elementos de cada conjunto:

   a) $(\forall x \in \mathbb{N})\ P(x)$ b) $(\exists x \in \mathbb{Z})\ P(x)$ c) $(\forall x \in \mathbb{R})\ P(x)$ d) $(\exists! x \in \mathbb{N}^*)\ P(x)$

2. Reescreva as frases abaixo utilizando a linguagem simbólica dos quantificadores $(\forall, \exists, \in, >, <, =$ etc.) e, em seguida, classifique-as como V ou F.

   a) "Todo número real elevado ao quadrado é maior que zero."
   b) "Existe algum número inteiro cujo dobro seja igual ao seu triplo."
   c) "Para qualquer número natural, seu sucessor é estritamente maior que ele."
   d) "Há pelo menos um número real que é igual à sua própria raiz quadrada."

3. Para provar que uma proposição universal $(\forall x)P(x)$ é **Falsa**, basta encontrar um único elemento x (contraexemplo) tal que $P(x)$ não ocorra. Encontre um contraexemplo para refutar cada uma das afirmações abaixo:

   a) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > x$

   b) $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2+n+41$ é um número primo

   c) $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \dfrac{1}{x} < x$

4. O quantificador $\exists!$ (existe um único) é muito mais restritivo que o $\exists$. Analise as proposições abaixo e diga se são V ou F. Se forem falsas, explique se o erro está na "existência" (nenhum serve) ou na "unicidade" (mais de um serve).

   a) $\exists! x \in \mathbb{R},\ x^2-4=0$

   b) $\exists! x \in \mathbb{R},\ x+5=5$

   c) $\exists! x \in \mathbb{N},\ x<0$

   d) $\exists! x \in \mathbb{Z},\ |x|=3$

5. Em matemática avançada, a ordem dos quantificadores altera completamente o sentido da frase. Analise o valor lógico das seguintes proposições no universo dos Reais ($\mathbb{R}$) e explique a diferença de significado entre elas:

   a) $\forall x, \exists y$ tal que $x+y=0$

   b) $\exists y, \forall x$ tal que $x+y=0$

   Dica: No item (a), o y pode depender de x (para cada x, escolho um y). No item (b), o y deve ser um "campeão universal" que funciona para todos os x simultaneamente.

1.4 Operadores lógicos

Definição 1.4.1: Operadores lógicos

São elementos ou símbolos lógicos que servem de ligação entre proposições já existentes afim de se construir proposições novas ou proposições compostas.

O quadro a seguir organiza os operadores lógicos pela classificação, nomenclatura e pela notação ou símbolo lógico. Veja:

Classificação	**Coectivos**		**Condicionais**		**Modificador**
Operador	e	ou	se... então	se e somente se	não
Símbolo	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\sim$

1.4.1 O conectivo “e” – ($\wedge$) – Conjunção

Definição 1.4.2: Conjunção

Diz-se **conjunção** a proposição composta formada por duas proposições simples p e q, conectadas pelo termo “e”. Simbolicamente, escreve-se $p \wedge q$ e sua leitura é “p e q”. A conjunção é verdadeira apenas quando *ambas* as proposições são verdadeiras.

Descrição e Memorização

A conjunção representa a simultaneidade de duas verdades. Se uma das proposições for falsa, o todo se torna falso.
Memorize: “O ‘e’ é exigente — só é verdadeiro se tudo for verdadeiro.”

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemplos:

- p: “Hoje chove” q: “A aula será online.”
  $p \wedge q$: “Hoje chove *e* a aula será online.”
- p: “2 é par.” q: “2 é primo.”
  $p \wedge q$: “2 é par *e* 2 é primo.” (Verdadeira)

1.4.2 O conectivo “ou” – ($\vee$) – Disjunção

Definição 1.4.3: Disjunção

A **disjunção** é a proposição composta formada por $p \vee q$, lida “p ou q”. É verdadeira quando *pelo menos uma* das proposições é verdadeira.

Descrição e Memorização

O “ou” lógico (inclusivo) admite uma ou ambas as verdades.
Memorize: “O ‘ou’ lógico é generoso — basta uma verdade para valer.”

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplos:

- p: “Estudo Matemática.” q: “Estudo Biologia.”
  $p \vee q$: “Estudo Matemática ou Biologia.” (Verdadeira se estudo qualquer uma ou ambas.)
- p: “5 é ímpar.” q: “5 é par.”
  $p \vee q$: “5 é ímpar ou 5 é par.” (Verdadeira)

1.4.3 O condicional "se... então" – (⇒) – Implicação

Definição 1.4.4: Implicação

A **implicação** é uma proposição composta do tipo $p \Rightarrow q$, lida "Se p, então q". Ela é falsa apenas quando p é verdadeira e q é falsa.

A implicação $p \Rightarrow q$ significa que o acontecimento de p é garantia para o de q. Assim, diz-se que, *"p é condição suficiente para q"*. Também significa que, q só acontece se p acontecer, assim diz-se que, *"q é condição necessária para p"*.

Descrição e Memorização

A implicação indica uma relação de dependência: a verdade de p exige a de q.
*Memorize: "A frase, 'Se p então q', representa uma **promessa lógica**: toda vez que p for verdadeira, espera-se que q também seja. 'A promessa só é quebrada se eu digo que farei algo (p) e não cumpro (q)'."*

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemplos:

- p: "Estudo bastante." q: "Tiro boa nota."
  $p \Rightarrow q$: "Se estudo bastante, então tiro boa nota"
- p: "x = 2." q: "x é par."
  $p \Rightarrow q$: "Se $x = 2$, então x é par." (Verdadeira)

1.4.4 O condicional "se e somente se" – (⇔) – Bicondicional

Definição 1.4.5: Bicondicional

A **bicondicional** (ou equivalência) é a proposição $p \Leftrightarrow q$, lida "p se e somente se q". É verdadeira quando p e q têm o mesmo valor lógico.

Descrição e Memorização

A bicondicional expressa igualdade lógica.
Memorize: " 'O se e somente se' exige coerência total."

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemplos:

- p: "Um número é múltiplo de 6." q: "É múltiplo de 2 e 3."
  $p \Leftrightarrow q$: "Um número é múltiplo de 6 se e somente se for múltiplo de 2 e de 3."
- p: "x = 4." q: "$x^2 = 16$."
  $p \Leftrightarrow q$: "x = 4 se e somente se $x^2 = 16$." (Falsa, pois $x = -4$ também satisfaz.)

1.4.5 O modificador "não" – ($\sim$) – Negação

Definição 1.4.6: Negação

A **negação** de uma proposição p é a proposição composta $\sim p$, lida "não p". Seu valor lógico é o oposto de p.

Descrição e Memorização

A negação inverte o valor lógico da proposição.
Memorize: "Negar é trocar o verdadeiro pelo falso e vice-versa."

p	$\sim p$
V	F
F	V

Exemplos:

- p: "A planta cresceu." $\sim p$: "A planta não cresceu."
- p: "$x > 3$." $\sim p$: "$x \leq 3$."

Exercício 1.4

1. Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das seguintes proposições compostas, analisando os conectivos "e" ($\wedge$) e "ou" ($\vee$):

   a) $5 > 2$ e $6 > 3$
   b) $4 > 1$ ou $4 = 1$
   c) $3 \mid 9$ ou $3 \mid (9+1)$
   d) $2(4+3) = 2\cdot 4 + 2\cdot 3$ e $2 \mid 5$
   e) $\frac{2}{3} < \frac{4}{5}$ ou $7 \mid 15$
   f) $(-1)^8 = 1$ ou $2^5 < (-2)^7$
   g) $\sqrt{36} = 7$ ou $\text{mdc}(6,10) = 3$
   h) $3^2 = 9$ e $\sqrt{9} = -3$

2. Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das proposições abaixo, atentando para as implicações ($\Rightarrow$) e equivalências ($\Leftrightarrow$):

   a) $3 - 1 = 7 \Rightarrow 4 + 8 = 3 \cdot 4$
   b) $3^2 = 9 \Leftrightarrow (-3)^2 = 9$
   c) $4 + 5 \cdot 2 = 14 \Rightarrow 2 \cdot 5 = 10$
   d) $3 \mid 9 \Rightarrow \text{mmc}(3,9) = 3$
   e) $\text{mdc}(4,8) = 1 \Leftrightarrow 5$ é primo
   f) $5 \leq 3 \Leftrightarrow 5 - 3 \geq 0$
   g) $\frac{2}{5} < \frac{1}{3} \Rightarrow 2 \cdot 3 = 1 \cdot 5$
   h) $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ (para $x \in \mathbb{R}$)

3. Admitindo que a proposição p é verdadeira (V) e que as proposições q e r são falsas (F), determine o valor lógico (V ou F) de cada proposição composta abaixo:

   a) $p \Rightarrow r$ b) $p \vee q$ c) $r \Leftrightarrow q$ d) $(p \wedge \sim q) \Rightarrow r$

   e) $\sim r \Rightarrow p$ f) $q \Rightarrow (p \wedge r)$ g) $(p \Leftrightarrow \sim q) \vee r$ h) $\sim p \wedge (q \Rightarrow r)$

4. Sendo a proposição $(p \wedge q) \Rightarrow r$ falsa e a proposição $(s \vee r) \Leftrightarrow q$ verdadeira, classifique p, q, r, s.

5. Qual é a negação de cada uma das seguintes proposições? Após negar, indique se a **negação** é verdadeira ou falsa.

   a) $4 \cdot 5 = 20$ b) $2 \cdot (10-5) \neq 8$ c) $4 \cdot 3 > 10$ d) $3 \cdot 5 - 1 \leq 3 \cdot 4$

   e) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 < \left(\frac{1}{3}\right)^2$ f) $\sqrt{3} < 2$ g) $-(-5) \geq 6$ h) 5 divide 12

6. Considere a sentença p: "Todos os gatos usam gravata". Qual das opções abaixo representa corretamente a negação de p?

   a) q: "Nenhum gato usa gravata."

   b) r: "Existe pelo menos um gato que não usa gravata."

7. Dê a negação lógica de cada sentença abaixo:

   a) Todos os extraterrestres usam chapéu.

   b) Nenhum elefante tem asas.

   c) Existe pelo menos um habitante em Marte.

1.5 Como negar proposições compostas

Definição 1.5.1: Negação de proposições compostas

Negar uma proposição composta consiste em encontrar uma proposição equivalente que represente *exatamente* o oposto lógico do que foi afirmado originalmente.

As **Leis de De Morgan** orientam a forma correta de efetuar tais negações. Através delas, é possível verificar que a negação de uma conjunção se transforma em uma disjunção das negações, e a negação de uma disjunção se transforma em uma conjunção das negações, em notação lógica:

Leis de De Morgan

$$\sim (p \wedge q) \quad \Leftrightarrow \quad (\sim p) \vee (\sim q)$$

$$\sim (p \vee q) \quad \Leftrightarrow \quad (\sim p) \wedge (\sim q)$$

1.5.1 Negação de uma conjunção ($\wedge$)

Teorema 1.5.1: Lei de De Morgan para a conjunção

A negação de $p \wedge q$ é equivalente ($\equiv$) à proposição $(\sim p) \vee (\sim q)$. Em suma:

$$\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q).$$

Isso significa que a negação de uma proposição do tipo $p \wedge q$ é uma proposição que será verdadeira quando **pelo menos uma** das partes for falsa.

Demonstração:

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \vee (\sim q)$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Descrição e Memorização

A conjunção $p \wedge q$ é verdadeira apenas quando *ambas* as proposições o são. Logo, para que sua negação seja verdadeira, basta que **uma delas seja falsa**. Lembre-se: *"Negar o 'e' é trocar por 'ou' e negar cada parte."*

Exemplo:

$$\begin{aligned} p &: \text{ A água é potável.} \\ q &: \text{ O rio está limpo.} \\ p \wedge q &: \text{ A água é potável e o rio está limpo.} \\ \sim (p \wedge q) &: \text{ A água não é potável ou o rio não está limpo.} \end{aligned}$$

Exemplo numérico:

$$p: \ x > 0, \qquad q: \ x < 5, \qquad p \wedge q: \ 0 < x < 5$$

$$\therefore \sim (p \wedge q): \ x \leq 0 \text{ ou } x \geq 5$$

1.5.2 Negação de uma disjunção ($\vee$)

Teorema 1.5.2: Lei de De Morgan para a disjunção

A negação de uma disjunção $p \vee q$ é equivalente ($\equiv$) à proposição $(\sim p) \wedge (\sim q)$. Em suma:

$$\sim (p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q).$$

Isso significa que a negação de uma proposição do tipo $p \vee q$ será verdadeira apenas quando **ambas as proposições forem falsas**. Isto é, para que a disjunção inteira seja falsa, é necessário que nenhuma das partes seja verdadeira.

Demonstração:

p	q	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Descrição e Memorização

A disjunção $p \vee q$ é verdadeira se pelo menos uma das proposições o for. Então, sua negação só será verdadeira se **nenhuma delas** for verdadeira. Memorize: *"Negar o ou é trocar por e e negar cada parte."*

Exemplo:

$$\begin{aligned} p &: \text{O solo é fértil.} \\ q &: \text{A planta recebe irrigação.} \\ p \vee q &: \text{O solo é fértil ou a planta recebe irrigação.} \\ \sim (p \vee q) &: \text{O solo não é fértil e a planta não recebe irrigação.} \end{aligned}$$

Exemplo numérico:

$$p: x > 3, \qquad q: x < -1, \qquad p \vee q: x > 3 \text{ ou } x < -1$$

$$\therefore \sim (p \vee q): -1 \leq x \leq 3$$

1.5.3 Negação de um condicional simples ($\Rightarrow$)

Teorema 1.5.3: Negação da Condicional

A negação de uma proposição condicional $p \Rightarrow q$ é equivalente ($\equiv$) à proposição $p \wedge (\sim q)$. Em suma:

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge (\sim q).$$

Isso significa que a negação de uma proposição do tipo "se p, então q" será verdadeira apenas quando **p for verdadeiro e q for falso**. Ou seja, a única maneira de negar uma implicação é mostrando que o antecedente (p) é verdadeiro, mas o consequente (q) é falso.

Demonstração:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim (p \Rightarrow q)$	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge (\sim q)$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	V	F

Descrição e Memorização

A implicação $p \Rightarrow q$ é falsa apenas quando p é verdadeira e q é falsa. Logo, negar um condicional significa afirmar que a primeira parte ocorreu, mas a consequência não. Memorize: *"Negar o se... então é manter o se e negar o então."*

Exemplo:

$$\begin{aligned} p &: \text{A planta é regada.} \\ q &: \text{A planta cresce.} \\ p \Rightarrow q &: \text{Se a planta é regada, então ela cresce.} \\ \sim (p \Rightarrow q) &: \text{A planta é regada e não cresce.} \end{aligned}$$

Exemplo numérico:

$$p: x = 2, \qquad q: x^2 = 4, \qquad p \Rightarrow q: \text{Se } x = 2, \text{ então } x^2 = 4.$$

$$\therefore \sim (p \Rightarrow q): x = 2 \text{ e } x^2 \neq 4.$$

1.5.4 Negação de um bicondicional ($\Leftrightarrow$)

Teorema 1.5.4: Negação da Bicondicional

A negação de uma proposição bicondicional $p \Leftrightarrow q$ é equivalente ($\equiv$) à proposição $(p \wedge (\sim q)) \vee ((\sim p) \wedge q)$. Em suma:

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge (\sim q)) \vee ((\sim p) \wedge q).$$

Isso significa que a negação de uma proposição do tipo "p se e somente se q" será verdadeira quando **apenas uma das proposições for verdadeira**. Assim, para negar uma bicondicional, é necessário mostrar que os valores de p e q são diferentes.

Demonstração:

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$\sim (p \Leftrightarrow q)$	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge (\sim q)$	$(\sim p) \wedge q$	$(p \wedge (\sim q)) \vee ((\sim p) \wedge q)$
V	V	V	F	F	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V	F	V
F	V	F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	F	V	V	F	F	F

Exemplo 1:

p : O licantropo está sob o luar cheio.

q : O licantropo se transforma em lobo.

$p \Leftrightarrow q$: O licantropo se transforma em lobo **se e somente se** estiver sob o luar cheio.

$\sim (p \Leftrightarrow q)$: Ou o licantropo se transforma sem luar, ou está sob luar sem se transformar.

Exemplo Numérico 1:

$$p : n \text{ é par}, \quad q : n^2 \text{ é par}, \quad p \Leftrightarrow q : n \text{ é par se e somente se } n^2 \text{ é par.}$$

$$\therefore \sim (p \Leftrightarrow q) : \text{Ou } n \text{ é par e } n^2 \text{ é ímpar, ou } n \text{ é ímpar e } n^2 \text{ é par.}$$

Exemplo 2:

p : O sistema tem acesso à internet.

q : O aplicativo sincroniza os dados.

$p \Leftrightarrow q$: O aplicativo sincroniza os dados **se e somente se** o sistema tem internet.

$\sim (p \Leftrightarrow q)$: Ou sincroniza sem internet, ou tem internet mas não sincroniza.

Exemplo 3:

p : O maestro levanta a batuta.

q : A orquestra começa a tocar.

$p \Leftrightarrow q$: A orquestra toca **se e somente se** o maestro levanta a batuta.

$\sim (p \Leftrightarrow q)$: Ou a orquestra toca espontaneamente, ou o maestro sinaliza mas ninguém toca.

Exemplo Numérico 2:

p : Senha = "123456", q : Acesso concedido, $p \Leftrightarrow q$: Acesso se e somente se senha correta.

$\therefore \sim (p \Leftrightarrow q)$: Ou acesso com senha errada, ou senha correta mas acesso negado.

Exemplo 4:

p : É noite de eclipse lunar total.

q : A lua fica avermelhada.

$p \Leftrightarrow q$: A lua fica avermelhada **se e somente se** é noite de eclipse lunar total.

$\sim (p \Leftrightarrow q)$: Ou a lua avermelha sem eclipse, ou há eclipse sem lua avermelhada.

1.5.5 Negação de proposições quantificadas

Definição 1.5.2

As negações dos quantificadores seguem padrões fixos:

$$\sim (\forall x,\, P(x)) \Leftrightarrow \exists x,\, \sim P(x) \quad \text{e} \quad \sim (\exists x,\, P(x)) \Leftrightarrow \forall x,\, \sim P(x)$$

Proposição com quantificador universal ($\forall$)

Exemplo:

$$p(x) :\, x^2 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},\, p(x) \text{ é falso, pois } x = 0 \text{ não satisfaz.}$$

$$\sim (\forall x,\, x^2 > 0) \Leftrightarrow \exists x,\, x^2 \leq 0$$

Proposição com quantificador existencial ($\exists$)

Exemplo:

$$p(x) :\, x^2 = 2, \quad \exists x \in \mathbb{Q},\, p(x)$$

é falsa, pois não existe número racional cujo quadrado seja 2.

$$\therefore \sim (\exists x \in \mathbb{Q},\, x^2 = 2) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Q},\, x^2 \neq 2$$

Exercício 1.5

1. Negação da Conjunção / Agronomia - Considere a proposição composta P: "O solo está úmido e a semente germinou". Assinale a alternativa que apresenta a negação lógica correta de P.

   (A) O solo não está úmido e a semente não germinou.

   (B) O solo não está úmido ou a semente não germinou.

   (C) Se o solo não está úmido, então a semente não germinou.

   (D) O solo está seco e a semente morreu.

2. Negação da Conjunção / Química - Dê a negação da seguinte proposição envolvendo propriedades químicas: "A solução é ácida ($pH < 7$) e conduz eletricidade".

   (A) A solução não é ácida ($pH \geq 7$) ou não conduz eletricidade.

   (B) A solução é básica e isolante.

   (C) A solução não é ácida e não conduz eletricidade.

   (D) Se a solução é ácida, então não conduz eletricidade.

3. Negação da Disjunção / Engenharia Civil - Um engenheiro afirma: "A viga suporta a carga ou a estrutura colapsará". A negação lógica dessa afirmação é:

   (A) A viga não suporta a carga ou a estrutura não colapsará.

   (B) A viga não suporta a carga e a estrutura não colapsará.

   (C) Se a viga suporta a carga, a estrutura não colapsará.

   (D) A viga suporta a carga e a estrutura colapsará.

4. Negação da Disjunção / Matemática - Qual é a negação da proposição p: "x é um número irracional ou $x = 0$"?

   (A) x é racional ou $x \neq 0$.

   (B) x é racional e $x \neq 0$.

   (C) x não é irracional ou $x = 0$.

   (D) x é irracional e $x = 0$.

5. Negação da Condicional / Física) - A primeira lei de Newton pode ser resumida na implicação: "Se a força resultante é nula, então a velocidade é constante". A negação dessa proposição é:

   (A) Se a força resultante não é nula, então a velocidade não é constante.

   (B) A força resultante é nula e a velocidade não é constante.

   (C) A força resultante não é nula e a velocidade é constante.

   (D) A força resultante é nula ou a velocidade não é constante.

6. Negação da Condicional / Lógica de Programação - Em um algoritmo, tem-se a regra: “Se o sensor detectar fumaça ($S = 1$), então o alarme dispara ($A = 1$)”. Em qual situação essa regra é violada (negada)?

   (A) O sensor detecta fumaça ($S = 1$) e o alarme não dispara ($A = 0$).

   (B) O sensor não detecta fumaça ($S = 0$) e o alarme não dispara ($A = 0$).

   (C) O sensor não detecta fumaça ($S = 0$) e o alarme dispara ($A = 1$).

   (D) O sensor detecta fumaça ($S = 1$) ou o alarme dispara ($A = 1$).

7. Negação da Bicondicional / Biologia - A proposição “Uma célula é eucarionte se, e somente se, possui carioteca” é negada por:

   (A) Uma célula não é eucarionte se, e somente se, não possui carioteca.

   (B) Ou a célula é eucarionte e não possui carioteca, ou possui carioteca e não é eucarionte.

   (C) A célula é eucarionte e não possui carioteca.

   (D) A célula não é eucarionte e possui carioteca.

8. Negação da Bicondicional / Álgebra Linear - Considere a afirmação: “A matriz A é invertível se, e somente se, seu determinante é diferente de zero ($\det(A) \neq 0$)”. Sua negação lógica afirma que:

   (A) A matriz A é invertível e $\det(A) = 0$, ou A não é invertível e $\det(A) \neq 0$.

   (B) A matriz A não é invertível se, e somente se, $\det(A) = 0$.

   (C) A matriz A é invertível e $\det(A) \neq 0$.

   (D) A matriz A não é invertível ou $\det(A) = 0$.

9. Negação de Quantificadores / Cálculo - A definição formal de limite envolve a sentença: “Para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que...”. A negação da parte “Para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$” é:

   (A) Para todo $\varepsilon > 0$, não existe $\delta > 0$.

   (B) Existe um $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$...

   (C) Existe um $\varepsilon > 0$ tal que existe um $\delta > 0$.

   (D) Para todo $\delta > 0$, existe um $\varepsilon > 0$.

10. Negação de Quantificadores / Zootecnia - A afirmação “Todos os bovinos do rebanho foram vacinados” é falsa se:

    (A) Nenhum bovino foi vacinado.

    (B) A maioria dos bovinos não foi vacinada.

    (C) Existe pelo menos um bovino do rebanho que não foi vacinado.

    (D) Pelo menos um bovino de outro rebanho foi vacinado.

1.6 Tautologia

Definição 1.6.1: Tautologia

Uma proposição composta é dita uma **tautologia** quando é sempre verdadeira, independentemente dos valores lógicos das proposições simples que a compõem.

Descrição e memorização

Uma tautologia é um tipo especial de proposição que representa uma verdade lógica universal. É usada para demonstrar equivalências e validar raciocínios. Memorize: *"Uma tautologia nunca falha – é verdadeira para toda combinação possível de valores."*

Exemplos:

1. $p \vee \sim p$ —— *Lei do Terceiro Excluído.*
2. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ —— *Contrapositiva.*
3. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ —— *A verdade de p independe de q.*
4. $\big((p \Rightarrow q) \wedge p\big) \Rightarrow q$ —— *Modus Ponens.*

Verificação para o exemplo 3. O demais ficam como exercício para o leitor!

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Exemplo 5: O paradoxo do mentiroso inevitável

p : Esta sentença é falsa.

$\mathbf{p \vee \sim p}$: Esta sentença é falsa ou não é falsa.

p	$\sim p$	$\mathbf{p \vee \sim p}$
V	F	V
F	V	V

$(p \vee \sim p) =$ Sempre Verdadeiro

Verificação: A última coluna é sempre Verdadeira - característica de tautologia!
Explicação: Mesmo que a sentença original seja um paradoxo, sua disjunção com a negação sempre será verdadeira - é a "fuga lógica" do paradoxo do mentiroso!

Exemplo 6: O princípio do foguete interstelar

p : O combustível do foguete está suficiente.

q : O foguete alcança a velocidade de escape.

$(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \Rightarrow \mathbf{p}$: Se o combustível está suficiente E o foguete alcança a velocidade de escape, ENTÃO o combustível está suficiente.

p	q	$p \wedge q$	$(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \Rightarrow \mathbf{p}$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

$$((p \wedge q) \Rightarrow p) = \text{Sempre Verdadeiro}$$

Verificação: Todas as linhas resultam em Verdadeiro - tautologia confirmada!
Explicação: Não importa a situação do foguete - se ambas as condições são verdadeiras, certamente a primeira delas é verdadeira!

Exemplo 7: O feitiço mágico de três encantamentos

p : O feitiço da invisibilidade está ativo.

q : O feitiço de proteção está ativo.

r : O feitiço de levitação está ativo.

$(\mathbf{p} \Rightarrow (\mathbf{q} \vee \mathbf{r})) \vee (\sim \mathbf{p})$: SE o feitiço da invisibilidade está ativo, ENTÃO pelo menos um dos outros dois está ativo, OU o feitiço da invisibilidade não está ativo.

p	q	r	$q \vee r$	$p \Rightarrow (q \vee r)$	$\sim p$	$(\mathbf{p} \Rightarrow (\mathbf{q} \vee \mathbf{r})) \vee (\sim \mathbf{p})$
V	V	V	V	V	F	V
V	V	F	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V
V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V

$$(p \Rightarrow (q \vee r)) \vee (\sim p) = \text{Sempre Verdadeiro}$$

Verificação: Todas as 8 combinações resultam em Verdadeiro - tautologia com 3 variáveis!
Explicação: Esta fórmula complexa com 3 variáveis é sempre verdadeira porque: ou a invisibilidade está desativada (tornando $\sim p$ verdade), ou se está ativada, então pelo menos um dos outros feitiços deve estar ativo para completar o encantamento!

Exercício 1.6

1. Construa a tabela-verdade para cada proposição composta abaixo e verifique se ela constitui uma tautologia (ou seja, se a última coluna é inteiramente verdadeira).

   a) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
   b) $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$
   c) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
   d) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$

2. Sistemas Digitais / Circuitos Lógicos - Em sistemas digitais, é fundamental simplificar expressões para economizar componentes. Verifique se as seguintes equivalências são tautologias (isto é, se o lado esquerdo é logicamente equivalente ao direito), o que permitiria a substituição de um circuito pelo outro.

   a) **Absorção:** $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
   b) **Distributiva:** $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
   c) **Contrapositiva:** $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

3. Argumentação Lógica - Um argumento é válido se a estrutura "(Premissas) $\Rightarrow$ Conclusão" for uma tautologia. Verifique se o seguinte raciocínio lógico é válido construindo a tabela-verdade da proposição:

   $$((p \vee q) \wedge \sim p) \Rightarrow q$$

   Contexto: "O motor falhou por falta de combustível (p) ou por falha elétrica (q). Não foi falta de combustível ($\sim p$). Logo, foi falha elétrica (q)."

4. Sem construir a tabela-verdade completa, argumente logicamente por que a proposição abaixo é uma tautologia:

   $$(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r)$$

   Dica: Pense no que seria necessário para essa disjunção ser Falsa. Lembre-se que para o "ou" ser falso, ambas as partes devem ser falsas.

1.7 Relações de implicação e equivalência

Relações de implicação e de equivalência desempenham papel essencial na Lógica Proposicional, especialmente na formulação e na demonstração de teoremas. O estudo dessas relações permite compreender a estrutura

dos raciocínios válidos e distinguir os tipos de conexão lógica entre proposições. Essas relações derivam dos condicionais (*se... então* $\Rightarrow$) e a bicondicional (*se e somente se* $\Leftrightarrow$).

1.7.1 A implicação: "$p \to q$"

O condicional "se... então", representado por $p \Rightarrow q$, pode ser interpretado como uma **relação de implicação**, denotada por $p \to q$ e lida como "p implica q". Do ponto de vista lógico, afirma-se que $p \to q$ somente quando **não ocorre** o caso em que p é verdadeiro e q é falso – i.e., quando não há a combinação **V-F** na tabela-verdade de $p \Rightarrow q$.

Em termos matemáticos, p é chamado de *hipótese* (ou *premissa*), e q, de *tese* (ou *conclusão*). Demonstrar que $p \to q$ significa provar que, sempre que a hipótese é verdadeira, a tese também o será. Assim, em uma demonstração de teorema, o caso em que a hipótese é verdadeira e a tese falsa **não pode ocorrer**, pois isso invalidaria a implicação e, consequentemente, o próprio resultado matemático.

Exercício resolvido 1.7.1

1. Considere a proposição:

Se um número é múltiplo de 4, então é par.

Seja:

p : "O número é múltiplo de 4", q : "O número é par."

A proposição é simbolizada como:

$$p \Rightarrow q$$

ou seja, "Se p, então q".

Na linguagem lógica, p é a 'hipótese' e q é a 'tese'. O valor lógico da condicional $p \Rightarrow q$ é definido pela seguinte tabela-verdade:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A condicional só é 'falsa' quando a hipótese é verdadeira e a tese é falsa. No caso da proposição analisada, todo número múltiplo de 4 (p verdadeiro) é necessariamente par (q verdadeiro), de modo que a relação $p \Rightarrow q$ é 'verdadeira'. ■

2. Considere agora a proposição:

Se uma figura é um quadrado, então é um retângulo.

Definindo:

p : "A figura é um quadrado", q : "A figura é um retângulo."

Temos novamente:

$$p \Rightarrow q$$

A hipótese (p) garante propriedades que tornam a tese (q) verdadeira: todo quadrado tem quatro lados iguais e quatro ângulos retos, logo satisfaz as condições de um retângulo.

A validade lógica da proposição pode ser expressa por:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Neste caso, a hipótese verdadeira implica tese verdadeira, e portanto a proposição é 'verdadeira'. Em termos de raciocínio matemático, trata-se de um exemplo clássico de 'implicação direta', amplamente usada na demonstração de teoremas. ■

3. (Teorema) — Se n é par então n^2 é par.

Hipótese (p): n é par.
Tese (q): n^2 é par.

Demonstração (cadeia de implicações):

p : n é par
$\rightarrow$ $\exists k \in \mathbb{Z}\ (n = 2k)$ (definição de número par)
$\rightarrow$ $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$
$\rightarrow$ n^2 é múltiplo de 2
$\rightarrow$ q : n^2 é par.

Portanto, a implicação $p \rightarrow q$ e o teorema estão provados por dedução direta a partir da hipótese. ■

4. (Propriedade) — Se $a \mid b$ e $b \mid c$ então $a \mid c$.

Hipótese (p): $a \mid b$ e $b \mid c$ (com $a, b, c \in \mathbb{Z}$).
Tese (q): $a \mid c$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} p:\ & a \mid b \text{ e } b \mid c \\ \rightarrow\ & \exists m, n \in \mathbb{Z}\ (b = am \text{ e } c = bn) \\ \rightarrow\ & c = (am)n = a(mn) \\ \rightarrow\ & \exists k \in \mathbb{Z}\ (c = ak) \\ \rightarrow\ & q:\ a \mid c. \end{aligned}$$

Logo, a hipótese implica a tese; a propriedade é uma implicação direta e elementar em teoria dos números. ■

5. (Identidade) — Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Hipótese (p): a, b são números reais (condição de domínio).
Tese (q): $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Demonstração por manipulação algébrica (implicação):

$$\begin{aligned} p:\ & a, b \in \mathbb{R} \\ \rightarrow\ & (a+b)^2 = (a+b)(a+b) \\ \rightarrow\ & = a(a+b) + b(a+b) \quad \text{(distributiva)} \\ \rightarrow\ & = a^2 + ab + ab + b^2 \\ \rightarrow\ & = a^2 + 2ab + b^2 \\ \rightarrow\ & q:\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \end{aligned}$$

Assim, assumindo os elementos no domínio (hipótese), obtemos a identidade (tese). ■

6. (Transformação lógica) — Lei de De Morgan na direção de ida:
"Se $\neg(p \vee q)$, então $\neg p \wedge \neg q$".

Hipótese (p): $\neg(p \vee q)$ (a negação da disjunção).
Tese (q): $\neg p \wedge \neg q$ (conjunção das negações).

Demonstração lógica (implicativa) por argumento e tabela reduzida:

Intuitivamente: se não é verdade que "p ou q", então nem p nem q podem ser verdadeiros; portanto $\neg p$ e $\neg q$ são verdadeiros simultaneamente.

Formalmente, verifica-se por análise de casos (tabela-verdade reduzida):

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	**V**	**V**

Observa-se que sempre que $\neg(p \vee q)$ é verdadeira (único caso marcado em negrito), também o é $\neg p \wedge \neg q$. Logo, a implicação $\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ é válida.

(Nota: a recíproca $(\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg(p \vee q)$ também é verdadeira; assim as duas direções formam uma equivalência $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ —— a lei de De Morgan (ida). ■

7. (Transformação lógica) — Distribuição da conjunção sobre a disjunção:
"Se $p \wedge (q \vee r)$, então $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$."

Hipótese (p): $p \wedge (q \vee r)$ (uma conjunção contendo uma disjunção).
Tese (q): $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (disjunção de duas conjunções).

Demonstração lógica (implicativa) por argumento e tabela reduzida:

Intuitivamente: se p é verdadeiro e pelo menos uma entre q ou r é verdadeira, então certamente é verdade que p ocorre junto com q ou p ocorre junto com r.

Formalmente, verifica-se por análise de casos (tabela-verdade reduzida):

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	F	V	**V**	**V**
V	F	V	V	**V**	**V**
V	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F

Em todas as linhas em que a hipótese $p \wedge (q \vee r)$ é verdadeira (marcadas em negrito), a tese $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ também é verdadeira. Portanto, a implicação

$$(p \wedge (q \vee r)) \rightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$$

é **válida**, ilustrando uma transformação lógica do tipo implicativa. ■

1.7.2 A equivalência: $p \leftrightarrow q$

A **equivalência lógica**, representada por $p \leftrightarrow q$, expressa a ideia de que p e q possuem **o mesmo valor lógico**. Ela é lida como "p equivale a q" e indica que tanto p implica q quanto q implica p. Em outras palavras, a equivalência é a conjunção de duas implicações:

$$p \leftrightarrow q \;\Leftrightarrow\; (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p).$$

Do ponto de vista lógico, $p \leftrightarrow q$ é verdadeira apenas quando **ambas as proposições possuem o mesmo valor lógico**, isto é, quando são simultaneamente verdadeiras ou simultaneamente falsas. Essa relação expressa uma **igualdade lógica** entre as duas sentenças, motivo pelo qual a equivalência é amplamente empregada na demonstração de teoremas, na verificação de propriedades matemáticas, em identidades algébricas e em transformações de expressões lógicas. Isso significa que, todo teorema cuja recíproca é verdadeira constitui uma equivalência lógica.

Assim, ao provar que duas proposições são equivalentes, mostra-se que uma pode substituir a outra sem alterar o valor de verdade de um argumento. Por exemplo, demonstrar que a negação de uma disjunção é equivalente à conjunção das negações, $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$, é uma aplicação direta da equivalência lógica e do raciocínio baseado em leis fundamentais da lógica proposicional.

Exercício resolvido 1.7.2

1. (Teorema) — Um número inteiro é divisível por 6 se, e somente se, for divisível por 2 e por 3.

Sentenças:

p : "n é divisível por 6" $\qquad$ q : "n é divisível por 2 e por 3".

Provar: $p \leftrightarrow q$.

Demonstração:

(I) $p \Rightarrow q$: Se n é divisível por 6, então $n = 6k = 2 \cdot 3k$, logo n é divisível por 2 e por 3.

(II) $q \Rightarrow p$: Se $n = 2a$ e $n = 3b$, então $2a = 3b \Rightarrow n = 6c$ para algum $c \in \mathbb{Z}$,
o que mostra que n é divisível por 6.

Como ambas as implicações são verdadeiras, conclui-se que

$$p \leftrightarrow q.$$

De fato, se um número é divisível por 6, ele pode ser escrito como $6k = 2 \cdot 3k$, o que implica que é divisível por 2 e por 3. Reciprocamente, se o número é divisível por 2 e por 3, pode ser escrito como $2a = 3b$, e portanto $6c$, o que demonstra a equivalência. ■

A seguir, analisa-se a validade lógica por meio da tabela verdade:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Observa-se que $p \leftrightarrow q$ é 'verdadeira' quando ambos os enunciados possuem o mesmo valor lógico. Assim, a proposição "Um número é divisível por 6 se, e somente se, for divisível por 2 e por 3" é 'verdadeira', pois as duas condições são logicamente equivalentes.

2. (Propriedade) — Um triângulo é equilátero se, e somente se, é equiângulo.

Sentenças:

p : "o triângulo é equilátero" q : "o triângulo é equiângulo".

Provar: $p \leftrightarrow q$.

Demonstração:

(I) $p \Rightarrow q$: Se os três lados são iguais, então os três ângulos opostos são iguais.

(II) $q \Rightarrow p$: Se os três ângulos são iguais (60° cada), o triângulo é isósceles em todas as posições, logo seus lados também são iguais.

Assim, a relação é bicondicional: o triângulo é equilátero $\Leftrightarrow$ é equiângulo.

Note que, relação bicondicional poderia também ser visualizada logicamente como:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Assim, a propriedade é recíproca, logo trata-se de uma relação bicondicional verdadeira. ■

Como nas figuras geométricas ambos os enunciados são verdadeiros simultaneamente, a proposição é 'verdadeira'. Trata-se, portanto, de uma equivalência lógica entre duas propriedades do triângulo: igualdade de lados e igualdade de ângulos.

3. (Identidade) — A igualdade $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ é válida se, e somente se, $x \in \mathbb{R}$.

Sentenças:

$$p: \text{“}x \in \mathbb{R}\text{”} \qquad q: \text{“}(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1\text{”}.$$

Provar: $p \leftrightarrow q$.

Demonstração:

(I) $p \Rightarrow q$: Se x é real, pode-se aplicar as propriedades distributivas e obter: $(x-1)^2 = (x-1)(x-1) = x^2 - 2x + 1$.

(II) $q \Rightarrow p$: Se a igualdade é verdadeira, então x deve pertencer ao domínio dos números reais, pois envolve apenas operações válidas em $\mathbb{R}$.

Logo, $p \leftrightarrow q$, e a igualdade é uma equivalência algébrica no conjunto dos reais. ■

4. (Transformação lógica) — A negação de uma disjunção é equivalente à conjunção das negações.

Sentenças:

$$p: \neg(p \vee q) \quad \Leftrightarrow \quad q: (\neg p \wedge \neg q).$$

Provar: $p \leftrightarrow q$.

Demonstração com tabela-verdade:

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$(\neg p \wedge \neg q)$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	**V**	**V**

Observa-se que $\neg(p \vee q)$ e $(\neg p \wedge \neg q)$ têm exatamente o mesmo valor lógico em todas as linhas. Portanto,

$$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q),$$

o que confirma a equivalência lógica conhecida como **primeira lei de De Morgan**. ■

5. (Transformação lógica) — A negação de uma condicional é equivalente à conjunção da hipótese com a negação da tese.

Sentenças:

$$p: \neg(p \to q) \quad \Leftrightarrow \quad q: (p \wedge \neg q).$$

Provar: $p \leftrightarrow q$.

Demonstração com tabela-verdade:

p	q	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$(p \wedge \neg q)$
V	V	V	F	F
V	F	F	**V**	**V**
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F

Observa-se que as colunas de $\neg(p \to q)$ e $(p \wedge \neg q)$ são idênticas, portanto:

$$\neg(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q).$$

■

Essa equivalência é bastante útil na resolução de negações de condicionais em provas matemáticas e na simplificação de argumentos lógicos.

Exercício 1.7

1. Considere as proposições: p: "O número x é par." q: "O número x é divisível por 2."

   a) Escreva simbolicamente a proposição: "Se x é par, então x é divisível por 2."

   b) Determine o valor lógico da implicação quando $x = 6$ e quando $x = 7$.

2. Reescreva a proposição

   "Se um triângulo é equilátero, então ele é isósceles."

   em sua forma contrapositiva. Verifique se a proposição original e sua contrapositiva têm o mesmo valor lógico.

3. Considere: p: "n é múltiplo de 4." q: "n é par." Determine se a implicação $p \Rightarrow q$ é verdadeira para todos os números inteiros n. Justifique com raciocínio lógico, não apenas por exemplos.

4. Mostre, por tabela-verdade, que a implicação

   $$(p \wedge q) \Rightarrow p$$

é sempre verdadeira (isto é, uma tautologia). Qual o significado intuitivo dessa relação?

5. Verifique, por meio de uma tabela-verdade, a equivalência:

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

6. Mostre que:

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

é uma equivalência lógica. Explique em palavras o significado dessa transformação.

7. Considere as sentenças:

- p: "$x > 3$."
- q: "$x^2 > 9$."

Verifique se $p \Leftrightarrow q$ é verdadeira para todo número real x. Explique por que a equivalência não se mantém em todos os casos.

8. Sejam as proposições:

- p: "$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$."
- q: "A igualdade é válida para qualquer valor real de θ."

Discuta se há equivalência lógica entre p e q. Aponte a condição sob a qual a equivalência é verdadeira.

1.8 A lógica dos argumentos

A análise lógica de argumentos tem por objetivo avaliar a validade lógica do raciocínio que o sustenta, isso traduz-se em verificar se a conclusão do argumento decorre necessariamente das premissas apresentadas, sendo essas consistentes.

Definição 1.8.1: Argumento

Um **argumento lógico** é uma estrutura composta por um conjunto de proposições $p_1, p_2, \ldots, p_n$ denominadas *premissas*, as quais sustentam uma proposição final q denominada *conclusão*. Em notação lógica, representa-se:

$$p_1, p_2, \ldots, p_n \vdash q.$$

Lê-se: "$p_1, p_2, \ldots, p_n$ levam a q" ou "q decorre de $p_1, p_2, \ldots, p_n$".
$\vdash$ denota a relação "derivada" ou "consequência lógica" entre as premissas e a conclusão.

Definição 1.8.2: Validade de um argumento

Um **argumento** é **válido** quando a verdade das premissas *garante* necessariamente e suficientemente a verdade da conclusão.

- *Formalmente: se todas as premissas são verdadeiras então a conclusão não pode ser falsa.*

Quando essa condição de garantia lógica não é satisfeita, o argumento é **inválido**. A invalidade decorre de erro no raciocínio, caracterizando um *sofisma* ou *falácia*.

Perceba que...

Não é possível ter conclusão falsa se as premissas são verdadeiras.

Perceba ainda que...

Na análise de um argumento, as premissas são **verdadeiras** ou, pelo menos admitidas como tal.

Lógica dos argumentos

A Lógica preocupa-se apenas com a *validade dos argumentos*, e não com a **verdade** e/ou **falsidade** de suas premissas e/ou conclusão.

Teorema 1.8.1: Validade de um argumento

Um argumento $p_1, p_2, \ldots, p_n \vdash q$ é **válido** se, e somente se, a condicional

$$\bigwedge_{i=1}^{n} p_i \Rightarrow q$$

for **tautologia**.

Demonstração. Para a demonstração, deve-se considerar as duas direções da equivalência.

($\Rightarrow$) (Se o argumento é válido, então a condicional é uma tautologia).

Suponha que o argumento $p_1, p_2, \ldots, p_n \vdash q$ é válido. Pela definição de argumento, não existe nenhuma situação (linha da tabela-verdade) em que as premissas $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são todas verdadeiras e a conclusão q é falsa.

Seja $P = p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$. Considere a tabela-verdade da condicional $P \Rightarrow q$. Uma condicional é falsa **apenas** quando o antecedente P é verdadeiro e o consequente q é falso. No entanto, pela definição de validade, essa situação **nunca ocorre**. Portanto, em todas as linhas da sua tabela-verdade, a proposição $P \Rightarrow q$ é verdadeira. Logo, $P \Rightarrow q$ é uma tautologia.

($\Leftarrow$) (Se a condicional é uma tautologia, então o argumento é válido).

Suponha agora que $(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \Rightarrow q$ é uma tautologia. Isso significa que ela é verdadeira para todas as valorações de suas proposições simples.

Pela tabela-verdade da implicação, a única forma de $P \Rightarrow q$ ser falsa é se P for V e q for F. Como a condicional é *sempre* V (é uma tautologia), essa combinação (P=V e q=F) é impossível. Em outras palavras, **sempre que** todas as premissas $p_1, p_2, \ldots, p_n$ forem verdadeiras (tornando P verdadeiro), a conclusão q **deve ser** verdadeira para evitar que a condicional se torne falsa. Esta é exatamente a definição de um argumento válido. Portanto, o argumento é válido.
Tendo demonstrado ambas as direções, o teorema está provado. □

Interpretação prática

Este teorema permite verificar a validade de qualquer argumento proposicional construindo apenas a tabela-verdade de uma única condicional:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \Rightarrow q.$$

Exercício resolvido 1.8

1. A lamentação do aluno relaxado
Verifique se o argumento abaixo é logicamente sólido:

Premissa 1: Se eu tivesse estudado, teria passado na disciplina.
Premissa 2: Não passei na disciplina.
Conclusão: Logo, não estudei.

Resolução segundo às definições:

i. Tradução para a linguagem lógica:

- Seja p: "Eu estudei para as provas"
- Seja q: "Eu passei na disciplina"

A estrutura argumentativa fica:

$$(p \Rightarrow q),\ \sim q\ \therefore \sim p$$

ou

$$(p \Rightarrow q),\ \sim q\ \mapsto \sim p$$

ou ainda,

$$\underbrace{(p \Rightarrow q \wedge \sim q)}_{\text{premissas}} \Rightarrow \underbrace{\sim p}_{\text{conclusão}}$$

ii. Teste de validade por tabela-verdade:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	**Conjunção das premissas**	**Validade**
V	V	F	F	V	F	**Inválido**
V	F	F	V	F	F	**Inválido**
F	V	V	F	V	F	**Inválido**
F	F	V	V	V	V	**Válido**

iii. Interpretação dos resultados:

- A única situação onde **ambas as premissas são verdadeiras** ocorre na linha 4
- Neste cenário específico, a conclusão $\sim p$ também é verdadeira
- Como não existe caso com premissas verdadeiras e conclusão falsa, o argumento é **válido**

iv. Reconhecimento do padrão lógico: O raciocínio segue a forma clássica do *Modus Tollens*:

$$\text{Se } p \text{ então } q, \text{ mas não } q \Rightarrow \text{ então não } p$$

v. Reflexão crítica: Embora logicamente válido, na prática educacional devemos considerar que:

- Podem existir outros fatores além do estudo que influenciam a aprovação
- O aluno pode ter estudado, mas de forma inadequada ou insuficiente
- A premissa "se estudo então passo" pode ser uma simplificação excessiva

Esse é um argumento válido clássico, conhecido como *Modus Tollens*. Apesar do argumento do aluno ser válido, sua aplicação no mundo real requer cautela e consideração de variáveis adicionais.

Resolução segundo o teorema 1.8.1:
Expandindo a tabela-verdade até o argumento, fazendo proposição por proposição e verificando se o valor lógico do resultado do argumento é uma **tautologia**, pois pelo teorema de validade de um argumento isso garante sua validade.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge \sim q$	$((\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}) \wedge \sim \mathbf{q}) \Rightarrow \sim \mathbf{p}$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V

Essa verificação também pode ser feita com uma tabela-verdade com expansão de colunas para os símbolos lógicos as operações:

p	q	$((p \Rightarrow q)$	$\wedge$	$\sim q)$	$\Rightarrow$	$\sim p$
V	V	V	F	F	V	F
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

2. O Mistério do estudante dedicado

Verifique a validade do seguinte raciocínio:

Premissa 1: Se eu me dedico aos estudos, então domino o conteúdo.
Premissa 2: Não domino o conteúdo.
Conclusão: Portanto, não me dediquei aos estudos.

Resolução:

i. Formalização do problema:

- Seja p: "Eu me dedico aos estudos"
- Seja q: "Eu domino o conteúdo"

O argumento assume a forma:

$$(p \Rightarrow q), \sim q \ \therefore \sim p$$

ii. Construção da tabela-verdade para verificação:

Proposições		**Premissas**		**Conclusão**	**Validade**
p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	**Verificação**
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	V

iii. Análise dos resultados:

- Nas situações onde **ambas as premissas são verdadeiras** (linha 4), a conclusão também é verdadeira
- Não há nenhum caso onde as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa
- Portanto, o argumento é **válido**

iv. Identificação do padrão lógico: Este raciocínio segue a estrutura do *Modus Tollens*, um dos princípios fundamentais da lógica:

$$\text{Se } p \text{ então } q,\ \text{não-}q \ \Rightarrow\ \text{não-}p$$

Aplicação prática: No contexto acadêmico, se aceitarmos que "dedicação implica domínio" e constatamos a falta de domínio, podemos concluir logicamente pela falta de dedicação, assumindo que não há outros fatores interferentes.

3. O dilema entre sair pra jogar bola ou ficar em casa e ver TV

Considere o argumento:

Se chove, a rua fica molhada. A rua está molhada. Logo, choveu.

A forma lógica é:

$$p \Rightarrow q, \quad q \therefore p$$

Esse argumento é inválido, pois a rua pode estar molhada por outro motivo (como uma lavagem). Trata-se de uma falácia conhecida como *afirmação do consequente*.

4. Cachorro é mamífero ou mamífero é cachorro?

Analise o argumento:

Se um animal é cão, então é mamífero. O animal é mamífero. Logo, é cão.

Sua forma lógica é idêntica ao caso anterior, sendo portanto inválido. A proposição "o animal é mamífero" não implica necessariamente que ele seja cão.

5. Argumento inválido com conclusão verdadeira

Premissas:

(a) Se está chovendo, então a rua está molhada.

(b) A rua está molhada.

Conclusão: Portanto, está chovendo.

Resolução:

- **Estrutura lógica:** $(p \rightarrow q) \wedge q \Rightarrow p$
- **Validade: INVÁLIDO** (comete a falácia da afirmação do consequente)

- **Explicação:** A rua pode estar molhada por outros motivos (limpeza, vazamento, irrigação, etc.), não necessariamente porque está chovendo.
- **Cenário possível:** Se na realidade estiver chovendo, teremos:
  - Premissas: **Verdadeiras**
  - Conclusão: **Verdadeira**
  - Argumento: **Inválido**

Isso demonstra que um argumento pode ter premissas e conclusão verdadeiras, mas ser inválido devido a sua estrutura lógica defeituosa.

1.8.1 Exercícios de argumentos

Exercício 1.8.1

1. (**Raciocínio de prova**)
   Premissa 1: Se o número é múltiplo de 6, então é par.
   Premissa 2: O número é múltiplo de 6.
   Conclusão: Logo, o número é par.

   Verifique se o argumento é válido e identifique o tipo de raciocínio.

2. (**Argumento ambiental**)
   Premissa 1: Se chover, o rio subirá.
   Premissa 2: O rio não subiu.
   Conclusão: Portanto, não choveu.

   Traduza o argumento para a linguagem simbólica e determine se é válido.

3. (**Falácia da afirmação do consequente**)
   Premissa 1: Se o solo estiver fértil, a plantação crescerá.
   Premissa 2: A plantação cresceu.
   Conclusão: Logo, o solo estava fértil.

   Identifique a falácia presente e justifique a invalidade do argumento.

4. (**Silogismo hipotético**)
   Premissa 1: Se o estudante revisa o conteúdo, ele compreende melhor.
   Premissa 2: Se compreende melhor, obtém boas notas.
   Conclusão: Logo, se o estudante revisa o conteúdo, obtém boas notas.

Formalize e verifique a validade do argumento.

5. (**Generalização precipitada**)
   Premissa 1: Dois colegas de turma não estudaram e reprovaram.
   Conclusão: Logo, todos que não estudam reprovam.

O argumento é logicamente válido? Que tipo de erro ele comete?

6. (**Argumento matemático**)
   Premissa 1: Se $x > 3$, então $x^2 > 9$.
   Premissa 2: $x^2 > 9$.
   Conclusão: Logo, $x > 3$.

Analise o argumento e comente sobre sua validade lógica e matemática.

7. (**Raciocínio por negação**)
   Premissa 1: Se a lâmpada está queimada, o quarto fica escuro.
   Premissa 2: O quarto não está escuro.
   Conclusão: Logo, a lâmpada não está queimada.

Determine o tipo de inferência e sua validade.

8. (**Silogismo disjuntivo**)
   Premissa 1: Ou o sistema é estável, ou os dados estão incorretos.
   Premissa 2: O sistema não é estável.
   Conclusão: Logo, os dados estão incorretos.

Formalize o argumento e verifique se é válido.

9. (**Falácia da negação do antecedente**)
   Premissa 1: Se estudo, aprendo.
   Premissa 2: Não estudei.
   Conclusão: Logo, não aprendi.

Explique por que o argumento é inválido e indique o tipo de falácia.

10. **Raciocínio com três proposições**)
    Premissa 1: Se um número é múltiplo de 4, é par.
    Premissa 2: Se um número é par, é divisível por 2.
    Premissa 3: O número 12 é múltiplo de 4.
    Conclusão: Logo, o número 12 é divisível por 2.

Mostre o encadeamento lógico que prova a validade do argumento.

11. **Direito Penal**
Em um julgamento por furto qualificado, o advogado de defesa apresentou o seguinte argumento:

Argumento da Defesa:

P1: Se o réu estava em outra cidade no momento do crime, então ele é inocente.

P2: O réu é inocente.

C: Portanto, o réu estava em outra cidade no momento do crime.

O advogado de acusação, rebateu o argumento usando lógica proposicional. Demonstre matematicamente por que o argumento da defesa é inválido, identificando a falácia cometida.

12. **Advogado de defesa esperto**

Durante o julgamento, um advogado de defesa apresenta o seguinte raciocínio em favor de seu cliente:

Premissa 1: Se o réu estivesse no local do crime, suas digitais estariam na arma.
Premissa 2: As digitais do réu não estão na arma.
Conclusão: Logo, o réu não estava no local do crime.

13. **Crise de agenda: um argumento em Ciência Política**
Em um parlamento nacional tramita um projeto de lei polêmico. O partido governista alega publicamente que "se a proposta tivesse maioria clara e estável de apoio na opinião pública (nas pesquisas), então teria conseguido aprovar-se na primavera legislativa". Após votação, o projeto foi rejeitado. O partido aproveita esse resultado para afirmar: "Logo, a proposta não teve, em momento relevante, maioria clara e estável de apoio na opinião pública".

Analise formal e criticamente esse argumento.

Capítulo 2

Conjuntos Numéricos

2.1 Introdução

A Teoria dos Conjuntos, consolidada fundamentalmente por Georg Cantor (1845–1918), é a linguagem universal da matemática moderna. Ela serve de alicerce para a Lógica e impulsionou avanços cruciais na computação, análise de dados e linguagens formais, permitindo organizar com precisão as noções de *coleção*, *relação* e *função*.

A construção dos conjuntos numéricos deve ser entendida como um processo de **expansão do universo de cálculo**: amplia-se o domínio para tornar possível resolver problemas que não admitiam solução no conjunto anterior. Cada novo conjunto surge para suprir uma limitação concreta: contagem, subtração, divisão, medidas contínuas e, por fim, a solução geral de equações algébricas.

Formalmente, essa evolução é expressa pela cadeia de inclusões:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

2.2 Números naturais $\mathbb{N}$

O conjunto dos números naturais formaliza a ideia de **contagem** e ordenação discreta de quantidades. Problemas elementares de inventário, enumeração e medidas por unidades inteiras exigem um universo numérico fechado para a operação de adição e compatível com a noção de "próximo" (sucessor).

Definição 2.2.1: Conjunto dos naturais

Denota-se por $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Propriedades operacionais em $\mathbb{N}$

Para $a, b, c \in \mathbb{N}$, valem:

1. **Fechamento:** $a+b \in \mathbb{N}$ e $ab \in \mathbb{N}$.
2. **Comutatividade:** $a+b = b+a$ e $ab = ba$.
3. **Associatividade:** $(a+b)+c = a+(b+c)$ e $(ab)c = a(bc)$.
4. **Elementos neutros:** $a+0 = a$ e $a \cdot 1 = a$.
5. **Distributividade:** $a(b+c) = ab+ac$.

Limitação

A operação de subtração não é fechada em $\mathbb{N}$. Por exemplo,

$$2-5 \notin \mathbb{N}.$$

A necessidade de modelar **perdas, déficits e variações negativas** conduz ao próximo conjunto.

2.3 Números inteiros $\mathbb{Z}$

Para representar diferenças, saldos negativos, temperaturas abaixo de zero e deslocamentos orientados, introduz-se um conjunto fechado para subtração.

Definição 2.3.1: Conjunto dos inteiros

Denota-se por $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Propriedades operacionais em $\mathbb{Z}$

Para $a, b, c \in \mathbb{Z}$, valem:

1. **Fechamento:** $a \pm b \in \mathbb{Z}$ e $ab \in \mathbb{Z}$.
2. **Elementos neutros:** $a+0 = a$ e $a \cdot 1 = a$.
3. **Inverso aditivo:** para todo $a \in \mathbb{Z}$, existe $-a \in \mathbb{Z}$ tal que $a+(-a) = 0$.
4. **Comutatividade e associatividade** para $+$ e $\cdot$.

5. **Distributividade:** $a(b+c) = ab+ac$.

Limitação

A divisão não é fechada em $\mathbb{Z}$. Por exemplo,

$$1 \div 2 \notin \mathbb{Z}.$$

Problemas de **partilha**, **razões** e **taxas** exigem números fracionários.

Exercício 2.3

1. Classifique cada afirmação abaixo como Verdadeira (V) ou Falsa (F), justificando brevemente as falsas com um contraexemplo ou definição:

   a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ e $0 \in \mathbb{Z}$.

   b) Se $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}$, então a divisão $a \div b$ resulta sempre em um número inteiro.

   c) O conjunto $\mathbb{N}$ é fechado para a operação de subtração (diferença).

   d) Todo número natural possui um antecessor em $\mathbb{N}$.

   e) A equação $x+5=2$ não possui solução em $\mathbb{N}$, mas possui solução única em $\mathbb{Z}$.

2. Represente os seguintes conjuntos listando seus elementos (forma tabular):

   a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}$.

   b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 10\}$.

   c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x-1)(x+2) = 0\}$.

3. A propriedade de **fechamento** é fundamental na álgebra. Verifique se os subconjuntos abaixo são fechados para as operações indicadas:

   a) O conjunto dos números inteiros pares $P = \{\ldots, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$ sob a operação de **adição**.

   b) O conjunto dos números inteiros ímpares $I = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots\}$ sob a operação de **adição**.

   c) O conjunto $M_3 = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (múltiplos de 3) sob a operação de **multiplicação**.

4. Utilize as propriedades operacionais de $\mathbb{Z}$ (distributividade, comutatividade, associatividade, etc.) para justificar passo a passo a expansão do produto notável $(a+b)(a-b)$. Mostre que o resultado é $a^2 - b^2$.

5. Uma das propriedades fundamentais de $\mathbb{Z}$ é a existência do elemento neutro aditivo (0). Prove, utilizando a propriedade distributiva $a(b+c) = ab+ac$, que para todo $a \in \mathbb{Z}$, vale:

   $$a \cdot 0 = 0$$

   Dica: Escreva 0 *como* $(0+0)$ *e desenvolva a equação* $a \cdot 0 = a(0+0)$.

6. Considere a função $s : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $s(n) = n+1$ (função sucessor) e a função $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $p(n) = n-1$ (função antecessor).

   a) Determine o valor de $s(p(5))$ e $p(s(-3))$.

   b) O que se pode concluir sobre a composição dessas operações para qualquer $n \in \mathbb{Z}$?

2.4 Números racionais $\mathbb{Q}$

Situações que envolvem quocientes e proporções (por exemplo, velocidade média, densidade, concentração, porcentagem) requerem a introdução de números expressos como razão de inteiros.

Definição 2.4.1: Conjunto dos racionais

Denota-se por $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

Propriedades operacionais em $\mathbb{Q}$

Para $a, b, c \in \mathbb{Q}$, com $b \neq 0$, valem:

1. **Fechamento:** $a \pm b \in \mathbb{Q}$, $ab \in \mathbb{Q}$ e $a/b \in \mathbb{Q}$.
2. **Inverso multiplicativo:** para todo $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, existe $a^{-1} \in \mathbb{Q}$ tal que $aa^{-1} = 1$.
3. **Comutatividade e associatividade** para $+$ e $\cdot$.
4. **Distributividade:** $a(b+c) = ab + ac$.

Operações com números racionais

Os números racionais permitem representar razões, medidas e proporções de forma exata. O domínio agrícola e das engenharias frequentemente utiliza frações para expressar taxas, dosagens, divisões de área e ajustes finos em experimentos. A seguir apresenta-se um *dashboard* com as operações fundamentais entre racionais, com ênfase na técnica algébrica e em exemplos diversos, incluindo frações positivas e negativas.

Adição e Subtração de Racionais

Para somar ou subtrair frações é necessário reduzir os denominadores a um **mínimo múltiplo comum (mmc)**. Após converter ao mesmo denominador, opera-se numerador com numerador, mantendo o

denominador comum.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \quad \text{(quando } b \text{ e } d \text{ já são comuns)}$$

Exemplo 1:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{19}{12}$$

Exemplo 2:

$$\frac{-7}{8} + \frac{5}{12}$$

$\text{mmc}(8, 12) = 24$.

$$\frac{-7}{8} = \frac{-21}{24}, \qquad \frac{5}{12} = \frac{10}{24}$$

$$\frac{-21}{24} + \frac{10}{24} = \frac{-11}{24}$$

Exemplo 3:

$$\frac{2}{9} - \frac{-4}{15} = \frac{2}{9} + \frac{4}{15}$$

$\text{mmc}(9, 15) = 45$.

$$\frac{2}{9} = \frac{10}{45}, \qquad \frac{4}{15} = \frac{12}{45}$$

$$\therefore \quad \frac{2}{9} - \frac{-4}{15} = \frac{22}{45}$$

Multiplicação de Racionais

A multiplicação entre racionais é direta: multiplica-se numerador com numerador e denominador com denominador. Recomenda-se simplificar previamente quando possível.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Exemplo 1:

$$\frac{9}{14} \cdot \frac{7}{15} = \frac{9\cancel{7}}{14} \cdot \frac{\cancel{7}}{15} = \frac{9}{2 \cdot 15} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

Exemplo 2:

$$\frac{-5}{12} \cdot \frac{18}{7} = \frac{-5 \cdot 18}{12 \cdot 7}$$

Simplificando:

$$\frac{-5 \cdot 3 \cdot \cancel{6}}{\cancel{6} \cdot 2 \cdot 7} = \frac{-5 \cdot 3}{(2) \cdot 7} = \frac{-15}{14}$$

Divisão de Racionais

A divisão de duas frações transforma-se em multiplicação pela inversa (recíproca) da segunda fração.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} \quad = \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Na escrita, recomenda-se destacar a **barra principal** da divisão, mais longa que as barras internas das frações:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Exemplo 1:

$$\frac{\frac{-9}{20}}{\frac{6}{5}} = \frac{-9}{20} \cdot \frac{5}{6}$$

Simplificando:

$$\frac{-9}{20} \cdot \frac{5}{6} = \frac{-9}{\cancel{4} \cdot \cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{6} = \frac{-9}{4 \cdot 6} = \frac{-9}{24} = \frac{-3 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot 8} = \frac{-3}{8}$$

Exemplo 2:

$$\frac{\frac{7}{18}}{\frac{-14}{9}} = \frac{7}{18} \cdot \frac{9}{-14}$$

$$\frac{7}{18} \cdot \frac{9}{-14} = \frac{7}{\cancel{2} \cdot \cancel{9}} \cdot \frac{\cancel{9}}{-14} = \frac{7}{2 \cdot -14} = \frac{7}{-28} = \frac{\cancel{7} \cdot 1}{-4 \cdot \cancel{7}} = -\frac{1}{4}$$

Representações decimais e limitação

Uma caracterização prática dos números racionais é dada por suas expansões decimais: todo número racional possui representação decimal **finita** (por exemplo, 0,125) ou **periódica** (por exemplo, $0,\overline{3} = 0,3333...$).

De modo geral, a representação decimal finita de uma racional $\frac{a}{b}$ é obtida dividindo-se a por b, que resulta em:

decimais exatas, finitas

$$\frac{1}{8} = 0,125 \qquad \frac{1}{4} = 0,25 \qquad \frac{-5}{8} = -0,625 \qquad \frac{4}{5} = 0,8 \qquad \frac{6}{1} = 6,0$$

- decimais ou dízimas periódicas, infinitas:

$$\frac{2}{3} = 0,666... = 0,\overline{6} \qquad \frac{4}{3} = 1,333... = 1,\overline{3} \qquad \frac{832}{33} = 25,2121... = 25,\overline{21} \qquad \frac{5}{9} = 0,555... = 0,\overline{5}$$

Os números decimais exatos ou periódicos podem também ser representados por frações de inteiros $\frac{a}{b}$. Tais números recebem o nome de fração geratriz. Observe os exemplos:

Exemplo 1: Obtenção da fração geratriz de 0,625.

$$0,625 = \frac{625}{1000}$$

Simplificando:

$$\frac{625}{1000} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$$

$$\therefore \quad \boxed{0,625 = \frac{5}{8}}.$$

Exemplo 2: Obtenção da fração geratriz de $0,\overline{7}$.
Considere $x = 0,777....$
Multiplica-se por 10:

$$\begin{aligned} 10x &= 7,777\ldots \\ 10x &= 7 + 0,777\ldots \\ 10x &= 7 + x \\ 10x - x &= 7 \\ 9x &= 7 \quad \rightarrow x = \frac{7}{9} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boxed{0,\overline{7} = \frac{7}{9}}.$$

Exemplo 3: Obtenção da fração geratriz de $0,\overline{36}$.
Considere $x = 0,363636\ldots$
Multiplica-se por 100:

$$\begin{aligned} 100x &= 36,363636\ldots \\ 100x &= 36 + 0,363636\ldots \\ 100x &= 36 + x \\ 100x - x &= 36 \\ 99x &= 36 \quad \rightarrow x = \frac{36}{99} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boxed{0,\overline{36} = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}}.$$

Exemplo 4: Obtenção da fração geratriz de $0,14\overline{3}$.
Considere $x = 0,14333\ldots$
Multiplica-se por 100:

$$\begin{aligned} 100x &= 14,333\ldots \\ 100x &= 14 + 0,333\ldots \\ 100x &= 14 + 0,\overline{3} \end{aligned}$$

Sabendo que $0,\overline{3} = \frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned} 100x &= 14 + \frac{1}{3} \\ 100x &= \frac{42}{3} + \frac{1}{3} \\ 100x &= \frac{43}{3} \quad \rightarrow x = \frac{43}{300} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boxed{0,14\overline{3} = \frac{43}{300}}.$$

Em termos conceituais, os racionais são suficientes para descrever contagens e razões exatas entre inteiros; contudo, ao modelar **medidas geométricas** e **grandezas contínuas**, surgem comprimentos e relações que não podem ser expressos como fração de inteiros.

Um exemplo clássico ocorre na geometria euclidiana: a diagonal de um quadrado de lado 1 é dada pelo Teorema de Pitágoras, isto é,

$$x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{2}.$$

Esse número não admite representação decimal finita nem periódica, e não pertence a $\mathbb{Q}$. Assim, a necessidade de descrever comprimentos, áreas, escalas e constantes de modelos físicos e de engenharia conduz naturalmente ao próximo conjunto.

Exercício 2.4

1. Classifique cada afirmação abaixo como Verdadeira (V) ou Falsa (F), justificando brevemente as falsas:

   a) Todo número inteiro é um número racional, isto é, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

   b) O número 0 não possui inverso multiplicativo em $\mathbb{Q}$.

   c) A soma de dois números racionais é sempre um número racional (propriedade de fechamento).

   d) O número $\sqrt{2}$ pertence ao conjunto $\mathbb{Q}$ pois pode ser escrito como uma fração de inteiros.

   e) A dízima periódica $0,999\ldots$ representa o número racional 1.

2. Realize as operações indicadas e simplifique o resultado para a forma irredutível:

   a) $\dfrac{3}{4} - \dfrac{5}{6} + \dfrac{1}{2}$ b) $\left(\dfrac{-2}{3}\right) \cdot \left(\dfrac{9}{4}\right) \div \left(\dfrac{-3}{2}\right)$ c) $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}}$

3. Encontre a fração geratriz (razão de dois inteiros $\frac{p}{q}$) para as seguintes dízimas periódicas:

   a) $0,\overline{12}$ b) $2,5\overline{4}$ c) $0,1\overline{6} + 0,\overline{3}$

4. Uma propriedade importante de $\mathbb{Q}$ é que entre quaisquer dois números racionais distintos, existe sempre outro número racional. Encontre um número racional que esteja estritamente entre:

   a) $\dfrac{1}{3}$ e $\dfrac{1}{2}$ b) $0,4$ e $0,41$

5. Mostre que não existe nenhum número racional x tal que $x^2 = 2$. *Sugestão: Suponha por absurdo que $x = \frac{p}{q}$ é uma fração irredutível (p e q primos entre si) e mostre que isso leva a uma contradição onde p e q seriam ambos pares.*

6. Em engenharia, frequentemente aproxima-se números irracionais por racionais. Sabendo que $\pi \approx 3,14159$, qual das frações abaixo é a melhor aproximação racional para π? Justifique calculando o erro (diferença em módulo) de cada uma.

   a) $\dfrac{22}{7}$ b) $\dfrac{333}{106}$ c) $\dfrac{355}{113}$ d) $\dfrac{157}{50}$

   (Aprox. de Metius) (Aproximação decimal)

2.5 Números irracionais 𝕀

Necessidade

Os **números irracionais** surgem como resposta a problemas de medida que não admitem solução no universo dos racionais. Eles aparecem em geometria, em relações trigonométricas, em modelos exponenciais e em diversas constantes fundamentais das ciências aplicadas.

Definição 2.5.1: Números irracionais

Um número real é dito **irracional** quando não pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Equivalentemente, um irracional possui expansão decimal **infinita e não periódica**. Denota-se o conjunto dos irracionais por $\mathbb{I}$.

Exemplos e constantes relevantes

A seguir apresentam-se irracionais recorrentes em Ciências e Engenharia.

1. **Raízes quadradas não exatas:** se $n \in \mathbb{N}$ não é quadrado perfeito, então $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$. Em particular,

$$\sqrt{2} \approx 1{,}4142... \qquad \text{e} \qquad \sqrt{3} \approx 1{,}7320\ldots$$

   Esses valores aparecem em geometria (diagonais, distâncias), na decomposição vetorial e em problemas envolvendo simetria.

2. **O número π:**

$$\pi \approx 3{,}14159...$$

   Essa constante está associada à geometria do círculo ($C = 2\pi r$, $A = \pi r^2$), a fenômenos periódicos, à análise de sinais, a modelos de ondas e a transformadas usadas em engenharia.

3. **O número de Euler e:**

$$e \approx 2{,}71828...$$

   Essa constante surge naturalmente em processos de crescimento/decrescimento contínuo, em juros compostos com capitalização contínua e em modelos de decaimento e difusão. Em Cálculo, e caracteriza a função exponencial cuja derivada é ela própria.

4. **O número de ouro φ:**

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803...$$

   Também conhecido como número áureo, essa constante está associada a relações de proporcionalidade em estruturas recursivas e surge em conexões com a sequência de Fibonacci, sendo útil como referência em modelagens e padrões de crescimento em sistemas naturais e artificiais.

Limitação dos racionais e ponte para os reais

Os racionais $\mathbb{Q}$ descrevem bem quantidades discretas e razões, mas não abrangem os irracionais, que são indispensáveis para medidas e constantes fundamentais. Por outro lado, o conjunto $\mathbb{I}$, por si só, não inclui as frações e não é fechado para as operações usuais.

Essa complementaridade conduz ao conjunto dos números reais:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I},$$

i.e., o conjunto que reúne **racionais e irracionais** em um único universo numérico adequado para a maior parte das aplicações em Ciências e Engenharia.

2.6 Números reais $\mathbb{R}$

Para tratar **medidas contínuas** e garantir solução para equações do tipo $x^2 = a$ com $a > 0$, introduz-se o conjunto dos números reais, que inclui racionais e irracionais.

Definição 2.6.1: Conjunto dos reais

Denota-se por $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, isto é, o conjunto que contém $\mathbb{Q}$ e também números irracionais (como $\sqrt{2}$, φ, $\sqrt{3}$, e, π), admitindo representação decimal (finita, periódica ou infinita não periódica).

Propriedades operacionais e de ordem em $\mathbb{R}$

Para $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $b \neq 0$, valem:

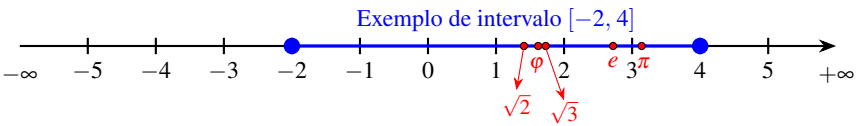
1. **Propriedades algébricas:** fechamento para $+$, $-$, $\cdot$, $/$ (exceto por zero), inversos aditivo e multiplicativo (quando aplicável), comutatividade, associatividade e distributividade.
2. **Ordem:** para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, vale exatamente uma das relações $a < b$, $a = b$ ou $a > b$.
3. **Compatibilidade com operações:**
   (a) se $a < b$, então $a + c < b + c$;
   (b) se $a < b$ e $c > 0$, então $ac < bc$.

Reta real

A **reta real** é a representação geométrica do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Cada ponto da reta corresponde a um único número real e cada número real ocupa uma posição específica na reta. Essa construção fornece uma visualização contínua dos números, permitindo interpretar distância, ordem e intervalos de forma intuitiva.

A reta real é orientada, infinita nos dois sentidos, e possui uma origem marcada por 0. Números positivos

localizam-se à direita da origem; números negativos, à esquerda.



A reta real serve como base gráfica para representar:

- ordem entre números;
- distâncias;
- intervalos abertos, fechados e infinitos;
- soluções de inequações.

Módulo

O *módulo* ou *valor absoluto* de um número n é a distância da origem ao valor n. Diz-se que o módulo de 2 é 2, e que o módulo de -2 também é 2. Usa-se $|\bullet|$ para indicar o "módulo do número $\bullet$", deste modo $|-2| = 2$ e $|2| = 2$. Formalmente:

Definição 2.6.2: Módulo de um número real

Para $x \in \mathbb{R}$, o **módulo** (ou **valor absoluto**) de x é definido por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Perceba que...

A definição evidencia que $|x|$ coincide com x quando x é não negativo e troca o sinal quando x é negativo, garantindo sempre um valor não negativo.

Exemplos:

a) $|7| = 7$;

b) $|-7,3| = -(-7,3) = 7,3$;

c) $|0| = 0$;

d) $\left|-\frac{3}{5}\right| = -\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$;

e) $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$;

f) $|2-\pi| = \pi - 2$, pois $2 - \pi < 0$.

Definição 2.6.3: Distância na reta real

Para $a, x \in \mathbb{R}$, a quantidade

$$|x-a|$$

representa a **distância** entre os valores x e a na reta real.

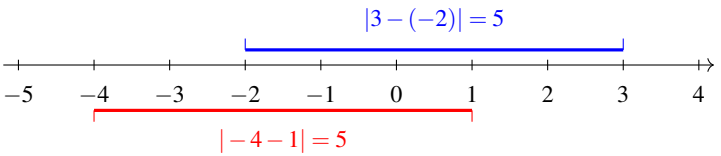
Exercício resolvido 2.6

1. Para calcular a distância de 3 a -2, procede-se do seguinte modo:

$$|3-(-2)| = |5| = 5.$$

Analogamente, a distância de -4 a 1 é:

$$|-4-1| = |-5| = 5.$$



2. Desigualdades Modulares - Descreva o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : |x+2| < 5\}$ na notação de intervalo.

Resolução: A desigualdade $|x+2| < 5$ equivale a $-5 < x+2 < 5$. Subtraindo 2 em todos os membros: $-7 < x < 3$. Portanto, $A = (-7, 3)$.

3. A Linguagem de Distância - Escreva a desigualdade modular que corresponde ao conjunto dos números reais cuja distância ao número 4 é estritamente menor que 0,01.

Resolução: A distância entre x e 4 é dada por $|x-4|$. A condição é $|x-4| < 0{,}01$.

Propriedades fundamentais

Proposição 2.6.1: Propriedades do módulo

Para $x, y \in \mathbb{R}$, valem as propriedades:

1. $|x| \geq 0$ e $|x| = 0 \iff x = 0$;
2. $|-x| = |x|$;
3. $|xy| = |x|\,|y|$;
4. $|x|^2 = x^2$ (equivalentemente, $|x| = \sqrt{x^2}$);
5. **(desigualdade triangular)** $|x+y| \leq |x| + |y|$;
6. **(desigualdade triangular reversa)** $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$.

Demonstração. (1) Segue diretamente da definição por casos: em ambos os casos, obtém-se $|x| \geq 0$. Além disso, $|x| = 0$ implica $x = 0$ (pois x ou $-x$ só podem ser zero se $x = 0$).

(2) Se $x \geq 0$, então $-x \leq 0$, logo $|-x| = -(-x) = x = |x|$; Se $x < 0$, então $-x > 0$, logo $|-x| = -x = |x|$.

(3) Considerem-se os sinais de x e y. Em cada caso (ambos não negativos, um negativo e outro não, ambos negativos), o produto xy tem sinal conhecido e a definição por casos mostra que o módulo do produto coincide com o produto dos módulos.

(4) Se $x \geq 0$, então $|x| = x$ e $|x|^2 = x^2$; se $x < 0$, então $|x| = -x$ e $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$. Logo, $|x| = \sqrt{x^2}$ por definição de raiz quadrada.

(5) Se x e y têm o mesmo sinal, então $|x+y| = |x| + |y|$. Se têm sinais opostos, então $x+y$ fica entre x e y em magnitude, implicando $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\} \leq |x| + |y|$. Em todos os casos, vale $|x+y| \leq |x| + |y|$.

(6) Pela desigualdade triangular aplicada a $(x-y)+y$, tem-se

$$|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y| + |y| \quad \Rightarrow \quad |x| - |y| \leq |x-y|.$$

Trocando-se x por y, obtém-se também $|y| - |x| \leq |x-y|$. Assim,

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|.$$

□

Observação sobre completude (sem demonstração)

Uma propriedade estrutural fundamental de $\mathbb{R}$ é a **completude**: informalmente, não há "falhas" na reta real. Essa característica sustenta a análise matemática (limites, continuidade, derivadas e integrais)[a].

[a] Pesquise essas quatro palavras uma por uma na internet.

Arredondamentos

Os arredondamentos constituem um procedimento essencial quando se trabalha com números reais em forma decimal finita ou aproximada. Como calculadoras e computadores não representam números reais infinitos, pequenas perdas de precisão podem ocorrer e, quando acumuladas, podem produzir erros consideráveis em cálculos extensivos. Sempre que possível, recomenda-se a conversão de dízimas em frações antes das operações. Quando o arredondamento se torna inevitável, utilizam-se regras padronizadas.

Regra 1 —— Algarismos 1, 2, 3 e 4

Arredonda-se **para baixo**. O algarismo imediatamente anterior permanece inalterado.

Exemplo: 34,472 $\longrightarrow$ 34,47

Regra 2 — Algarismos 6, 7, 8 e 9

Arredonda-se **para cima**. O algarismo anterior aumenta de uma unidade.

Exemplo: $28{,}288 \longrightarrow 28{,}29$

Regra 3 — Algarismo final igual a 5

O arredondamento depende da paridade do algarismo anterior:

- Se o algarismo anterior for **par** $\rightarrow$ arredonda-se **para baixo**.
- Se o algarismo anterior for **ímpar** $\rightarrow$ arredonda-se **para cima**.

Exemplos: $7{,}65 \rightarrow 7{,}6 \qquad 3{,}75 \rightarrow 3{,}8$

Por que arredondar com cuidado?

Erros de arredondamento acumulados podem modificar resultados de cálculos sucessivos, especialmente em processos numéricos, simulações e operações iterativas. Quanto maior a precisão exigida, maior deve ser o cuidado com aproximações.

Limitação

Nem toda equação polinomial possui solução em $\mathbb{R}$. Por exemplo,

$$x^2 + 1 = 0$$

não admite solução real, pois $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para resolver equações desse tipo, amplia-se o universo numérico até o conjunto dos números complexos.

Exercício 2.6

1. Classifique cada número abaixo como Racional ($\mathbb{Q}$) ou Irracional ($\mathbb{I}$):

   a) $3{,}14159$ b) $\sqrt{121}$ c) 2π

   d) $0{,}777\ldots$ e) $\sqrt{8}$ f) e^2

   g) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ h) $1{,}232323\ldots$ i) φ (número de ouro)

2. Determine o valor lógico (V ou F) de cada proposição sobre o conjunto dos números reais:

   a) A soma de um número racional com um número irracional é sempre irracional.

   b) O produto de dois números irracionais é sempre irracional.

c) Todo número real possui uma representação decimal finita ou periódica.

d) Entre dois números reais distintos, existem infinitos números racionais e infinitos números irracionais.

e) O conjunto $\mathbb{R}$ é a união disjunta de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$.

3. Resolva as inequações modulares e represente o conjunto solução na notação de intervalo:

a) $|x-3|<5$ b) $|2x+1|\geq 7$

c) $|4-x|\leq 0,1$ d) $|x|>-2$

4. Simplifique as expressões envolvendo módulo, supondo $x\in\mathbb{R}$:

a) $\sqrt{x^2}+|-x|$ b) $|x-5|+|x-2|$, se $2<x<5$

c) $\dfrac{|x|}{x}$, se $x\neq 0$

5. Calcule a distância na reta real entre os seguintes pares de números:

a) -3 e 5 b) $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$

c) π e 3 d) $-1,5$ e $-4,5$

6. Arredonde os seguintes números para duas casas decimais, utilizando as regras padronizadas apresentadas no texto:

a) $12,452$ b) $0,886$ c) $3,14159$

d) $7,325$ e) $9,135$ f) $2,718$

7. Demonstre que se x é racional ($x\neq 0$) e y é irracional, então o produto xy é irracional. *Sugestão: Utilize prova por contradição (redução ao absurdo), supondo que* $xy=r\in\mathbb{Q}$.

8. Verifique se a desigualdade triangular $|a+b|\leq|a|+|b|$ se torna uma igualdade para os seguintes pares de valores:

a) $a=3,\ b=4$ b) $a=-2,\ b=-5$ c) $a=3,\ b=-4$

Conclua: qual a condição necessária sobre os sinais de a e b para que valha a igualdade?

9. Determine o conjunto dos números reais x que satisfazem a condição $\sqrt{x^2}=x$.

10. Encontre um número irracional compreendido entre os racionais $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$.

11. Engenharia Civil / Tolerância - Uma viga de aço deve ter comprimento $L=5,00$ metros com uma tolerância de erro de $0,2\%$. Escreva essa condição como uma desigualdade modular da forma $|x-L|\leq E$ e determine o intervalo de comprimentos aceitáveis.

12. Física / Erro experimental - Em um experimento para medir a aceleração da gravidade g, obteve-se o valor experimental $g_{exp} = 9,78\,m/s^2$. Sabendo que o valor teórico local é $g_{ref} = 9,81\,m/s^2$, calcule o *erro absoluto* $|g_{exp} - g_{ref}|$ e o *erro relativo percentual* $\frac{|g_{exp}-g_{ref}|}{|g_{ref}|} \times 100\%$.

13. Geometria / Irracionais - Um engenheiro precisa projetar uma rampa de acesso formando um triângulo retângulo. Se a base mede 10m e a altura mede 10m, o comprimento da rampa será a hipotenusa.

    a) Calcule o valor exato do comprimento da rampa. O resultado é racional ou irracional?

    b) Para fins de construção, arredonde o valor para duas casas decimais.

14. Computação / Ponto flutuante - Computadores armazenam números reais usando representação de ponto flutuante, que possui precisão limitada. O número $0,1$ (decimal) não possui representação binária finita, comportando-se como uma dízima no sistema binário. Isso gera erros de arredondamento. Se um sistema financeiro soma $0,1$ dez vezes $(0,1+0,1+\ldots)$, o resultado computacional pode ser $0,99999999$. Calcule o erro absoluto dessa operação em relação ao valor matemático exato.

15. Sinais e Sistemas / Energia - A energia de um sinal $x(t)$ em um intervalo discreto pode ser estimada pela soma dos quadrados dos valores absolutos das amostras. Calcule a energia $E = \sum |x_i|^2$ para o sinal amostrado $x = \{-2, 0, 1, -3, \sqrt{5}\}$.

2.7 Números complexos $\mathbb{C}$

O conjunto dos números complexos permite a solução de equações como $x^2 + 1 = 0$ e, em geral, fornece um ambiente no qual polinômios de grau $n \geq 1$ admitem raízes (no sentido do Teorema Fundamental da Álgebra).

Definição 2.7.1: Unidade imaginária e números complexos

Estabelecida uma unidade imaginária i tal que

$$i^2 = -1,$$

o conjunto dos números complexos fica definido como

$$\mathbb{C} = \{a + bi : \ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Propriedades operacionais em $\mathbb{C}$

Para $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, definem-se:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i, \qquad z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Além disso, se $z = a + bi \neq 0$, define-se o inverso multiplicativo por

$$z^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}.$$

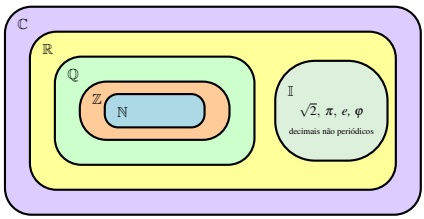
Logo, $\mathbb{C}$ é fechado para as quatro operações (exceto divisão por zero), possuindo propriedades algébricas análogas às de $\mathbb{R}$.

Observação

Em $\mathbb{C}$ não existe uma relação de ordem total compatível com as operações, como ocorre em $\mathbb{R}$. Assim, desigualdades do tipo $z_1 < z_2$ não são adotadas como estrutura padrão em $\mathbb{C}$.

Devido à importância do conjunto dos números complexos para as Engenharias e para outras áreas das Ciências, este livro dedica um capítulo específico ao tema.

Resumo das inclusões e do propósito de cada conjunto



- $\mathbb{N}$: contagem e soma (quantidades discretas).
- $\mathbb{Z}$: diferenças e subtração (déficits, orientações).
- $\mathbb{Q}$: razões e divisão (partilhas, taxas).
- $\mathbb{R}$: medidas contínuas e irracionais (geometria e análise).
- $\mathbb{C}$: solução geral de equações algébricas e modelos oscilatórios (física e engenharia).

2.8 Intervalos reais

Na reta real, um **intervalo** é um subconjunto que corresponde a um segmento de reta, a uma semirreta ou à própria reta. Formalmente, um subconjunto $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo se, para quaisquer $x, y \in I$, todo número z tal que $x < z < y$ também pertence a I.

Diferente dos conjuntos discretos (como os Naturais $\mathbb{N}$ ou Inteiros $\mathbb{I}$), os intervalos reais são conjuntos **contínuos** e, exceto pelo conjunto vazio ($\varnothing$) ou por intervalos degenerados (um único ponto), contêm infinitos elementos.

Representações e tipos de intervalos

Apresenta-se a seguir a classificação dos intervalos, utilizando a representação geométrica (na reta real) à esquerda e a notação de conjuntos à direita.

a) **Intervalo aberto:** Não inclui os extremos a e b.

$$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

b) **Intervalo fechado:** Inclui ambos os extremos a e b.

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

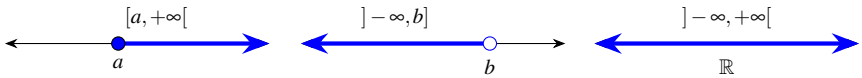
c) **Intervalo fechado à esquerda (ou aberto à direita):**

$$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

d) **Intervalo aberto à esquerda (ou fechado à direita):**

$$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

e) **Intervalos infinitos:** Representam semirretas ou a reta completa.



$$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} \qquad]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \qquad]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$$

Observação

a) $-\infty$ e $+\infty$ **não são** números reais; apenas fazem parte das notações de intervalos ilimitados.

b) Qualquer intervalo de extremos a e b, com $a \neq b$, contém números racionais e irracionais.

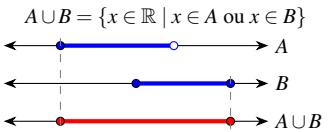
c) Existem representações de intervalos abertos, usando parênteses (a,b) em vez de colchetes]a,b[, no entanto há a real possibilidade de confusão com a representação de ponto (a,b) no plano cartesiano.

Operações com intervalos

A manipulação de intervalos em problemas de Engenharia e Ciências Aplicadas frequentemente exige a combinação de diferentes conjuntos de restrições. Como intervalos são conjuntos de pontos, utiliza-se as operações fundamentais da Teoria dos Conjuntos, auxiliadas por representações geométricas para facilitar a interpretação de tais restrições.

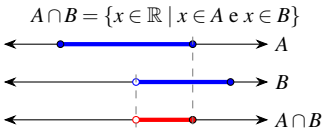
União ($\cup$)

A união de dois intervalos A e B resulta em um conjunto que contém todos os elementos pertencentes a A, a B ou a ambos.
Nota: Nem sempre a união de dois intervalos resulta em um único intervalo (ex.: se forem disjuntos).



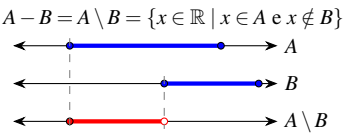
Interseção ($\cap$)

A interseção de dois intervalos A e B é o conjunto dos elementos que pertencem simultaneamente a ambos.
Nota: Esta operação é fundamental para determinar o domínio comum de múltiplas funções ou restrições de um projeto.



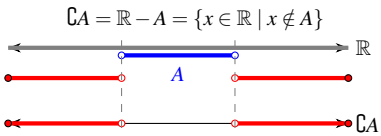
Diferença ($-$ ou $\setminus$)

A diferença entre A e B (nesta ordem) é o conjunto dos elementos que pertencem a A, mas não pertencem a B.



Complementar (A^c)

O complementar de um intervalo A em relação ao conjunto dos números reais é a diferença $\mathbb{R} - A$. Representa todos os valores que estão "fora" do intervalo considerado.



Exercício resolvido 2.8

1. Dados os intervalos $A = [1,5[$ e $B = [3,8]$, determine:

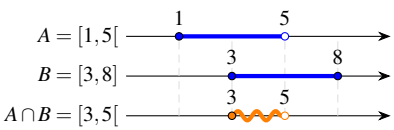
(a) $A \cap B$ (c) $A - B$ (e) $\complement_B A$ (g) $\complement A$ (em $\mathbb{R}$)
(b) $A \cup B$ (d) $B - A$ (f) $\complement_A B$

Resolução:

(a) Interseção: $A \cap B$

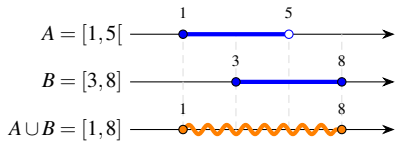
- **Cálculo:** Valores que satisfazem $1 \leq x < 5$ **e** $3 \leq x \leq 8$.
- O limite inferior comum é 3 (fechado) e o superior é 5 (aberto).
- **Resultado:** $A \cap B = [3,5[$

Análise intervalar:



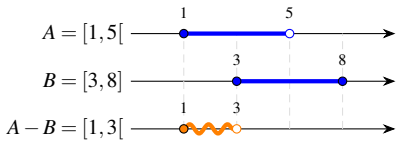
(b) União: $A \cup B$

- **Cálculo:** Valores que satisfazem $1 \leq x < 5$ **ou** $3 \leq x \leq 8$.
- Como os intervalos se sobrepõem, cobre desde o menor extremo (1) até o maior (8).
- **Resultado:** $A \cup B = [1,8]$



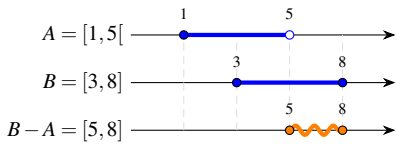
(c) Diferença: $A - B$

- **Cálculo:** Elementos em A que não estão em B.
- $A = [1,5[$, $B = [3,8]$. A parte de A antes de 3.
- **Resultado:** $A - B = [1,3[$



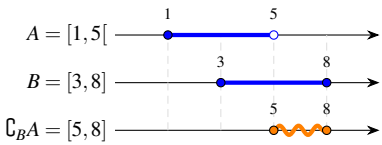
(d) Diferença: $B - A$

- **Cálculo:** Elementos em B que não estão em A.
- $B = [3,8]$, $A = [1,5[$. A parte de B após 5.
- **Resultado:** $B - A = [5,8]$



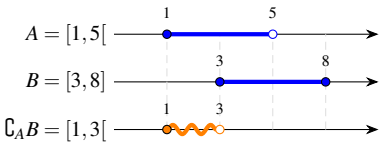
(e) Complementar: $\complement_B A$

- **Cálculo:** Elementos de B que não estão em A.
- É a diferença $B - A$.
- **Resultado:** $\complement_B A = [5,8]$



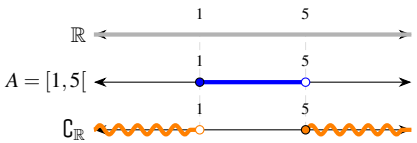
(f) Complementar: $\complement_A B$

- **Cálculo:** Elementos de A que não estão em B.
- É a diferença $A - B$.
- **Resultado:** $\complement_A B = [1,3[$



(g) Complementar: $\complement_{\mathbb{R}} A$

- **Cálculo:** Todos os reais que não estão em $A = [1,5[$.
- **Resultado:** $\complement_{\mathbb{R}} A =]-\infty, 1[\cup [5, +\infty[$



Exercício 2.8

1. Represente os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ utilizando a notação de intervalos (use colchetes invertidos para intervalos abertos):

   a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 5\}$
   b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \sqrt{2}\}$
   c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 4\}$
   d) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 3\}$

2. Dados os intervalos $A = [-2,4]$, $B = [1,6[$ e $C =]-\infty, 3[$, determine o conjunto resultante de cada operação. Represente a resposta na notação de intervalo e graficamente (esboço):

   a) $A \cup B$
   b) $A \cap B$
   c) $A - B$
   d) $B - A$
   e) $A \cap C$
   f) $(A \cup B) \cap C$

3. Determine a quantidade de números **inteiros** pertencentes a cada um dos conjuntos abaixo:

   a) $I_1 = [-3,4[$
   b) $I_2 =]-2,2]$
   c) $I_3 = [\pi, 7]$
   d) $I_4 = A \cap B$, onde $A = [-5,5]$ e $B =]0,10[$

4. Sejam os intervalos $M =]0,10]$ e $N = [4,12[$. Determine o complementar de cada conjunto em relação aos reais ($\mathbb{R}$):

   a) $\complement_{\mathbb{R}} M$
   b) $\complement_{\mathbb{R}} (M \cap N)$

5. Simplifique as expressões intervalares resultantes das operações abaixo:

a) $[2,5] \cup [3,8]$ b) $[2,5] \cap [3,8]$ c) $]-\infty,2] \cap [0,+\infty[$

d) $\mathbb{R} - [0,+\infty[$

6. Determine o conjunto solução das desigualdades abaixo expressando-o como um intervalo ou união de intervalos:

a) $2x-4 \leq 10$ b) $-3 < 2x+1 \leq 7$ c) $x^2 > 9$

7. Engenharia Mecânica / Tolerância Dimensional - Um eixo cilíndrico deve ser fabricado com diâmetro ideal de $d = 50$ mm. A norma técnica especifica uma tolerância de $\pm 0,05$ mm.

   a) Escreva o intervalo I de diâmetros aceitáveis para o eixo.

   b) Se um lote de eixos possui diâmetros no intervalo $L = [49,98; 50,02]$, verifique se todo o lote é aceitável (isto é, se $L \subset I$).

8. Engenharia Elétrica / Faixa de Operação - Um sensor de temperatura opera corretamente apenas no intervalo de temperatura $T_{op} = [-20,80]$ (em graus Celsius). Por questões de segurança do material, o sensor não deve ser exposto a temperaturas fora do intervalo $T_{seg} = [-40,100]$.

   a) Determine o intervalo de temperaturas onde o sensor opera corretamente E é seguro ($T_{op} \cap T_{seg}$).

   b) Determine o intervalo de temperaturas onde o sensor é seguro, mas NÃO opera corretamente ($T_{seg} - T_{op}$).

9. Química / Controle de pH - Para que uma certa reação química ocorra com eficiência máxima, o pH da solução deve estar estritamente entre 4,5 e 6,0. Para que a reação seja apenas segura (sem risco de explosão), o pH deve estar no intervalo fechado $[3,0; 8,0]$.

   a) Represente o intervalo de eficiência máxima E e o intervalo de segurança S.

   b) Um sensor indica que o pH atual da solução está no intervalo $L = [5,0; 6,5]$. Determine o intervalo de pH onde a reação é, simultaneamente, segura, eficiente e compatível com a leitura do sensor ($S \cap E \cap L$).

10. Engenharia Civil / Cronograma - Em um canteiro de obras, a equipe de fundação trabalhará do dia 1 ao dia 15 do mês (intervalo $F = [1,15]$). A equipe de estrutura trabalhará do dia 10 ao dia 25 ($E = [10,25]$). A equipe de acabamento só pode entrar na obra nos dias em que NÃO houver ninguém trabalhando na fundação nem na estrutura. Considerando o mês comercial de 30 dias ($M = [1,30]$), determine o intervalo de dias disponível para a equipe de acabamento. *Dica: Calcule* $M - (F \cup E)$.

11. Análise de Dados / Filtragem - Um algoritmo de filtragem de dados deve aceitar apenas valores que estejam fora da faixa de ruído. A faixa de ruído é definida pelo intervalo $R = [-1,5; 1,5]$. Se o domínio total dos dados é $D = [-10,10]$, determine o conjunto de dados válidos ($V = D - R$) na notação de união de intervalos.

12. Segurança do Trabalho - Uma norma regulamentadora exige que a distância d de um operador a uma máquina perigosa satisfaça $d \geq 2$ metros. Por limitações físicas da sala, a distância também deve satisfazer $d \leq 5$ metros. Além disso, há uma zona de manutenção entre 3 e 4 metros onde o operador não pode ficar ($3 < d < 4$). Escreva o conjunto de posições permitidas para o operador como união de dois intervalos.

2.9 Vizinhanças

No estudo do Cálculo, frequentemente não se está interessado no valor exato de um ponto, mas sim no que acontece *próximo* a ele. Para formalizar a ideia de "proximidade", utilizamos o conceito de vizinhança, que une a noção geométrica de intervalo com a noção algébrica de valor absoluto (distância).

Definição e Notação

Uma vizinhança é, essencialmente, um intervalo aberto centrado em um ponto específico. O "tamanho" dessa vizinhança é determinado por um raio, que na matemática superior é tradicionalmente denotado pelas letras gregas δ (delta) ou ε (epsilon).

Definição 2.9.1: Vizinhança simétrica

Seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto central e $\delta > 0$ um número real positivo (o raio). Chama-se de **vizinhança de centro a e raio δ**, denotada por $V_\delta(a)$, o conjunto de todos os números reais x cuja distância até a é menor que δ.

$$V_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \delta\}$$

Em termos de intervalos, isso é equivalente a:

$$V_\delta(a) =]a-\delta, a+\delta[$$

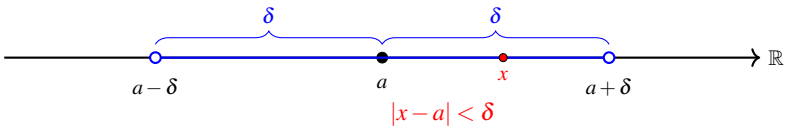
Propriedades

A transição entre a linguagem de desigualdades modulares e a linguagem de intervalos é a chave para entender limites de um conjunto de valores ou intervalos. Para qualquer $\delta > 0$:

$$|x-a| < \delta \iff -\delta < x-a < \delta \iff a-\delta < x < a+\delta$$

Interpretação Geométrica

Visualmente, $V_\delta(a)$ representa um segmento da reta real estendendo-se δ unidades para a esquerda e δ unidades para a direita do centro a.



Vizinhança reduzida (ou perfurada)

Em muitas situações no Cálculo (especialmente na definição de limite), estuda-se o comportamento de uma função *ao redor* de a, mas não necessariamente *no* ponto a. Para isso, excluí-se o centro da vizinhança.

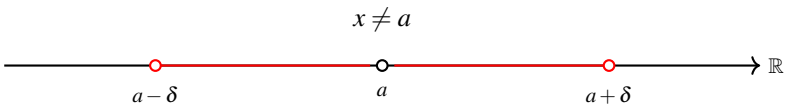
Definição 2.9.2: Vizinhança reduzida

A vizinhança reduzida de centro a e raio δ, denotada por $\dot{V}_\delta(a)$ ou $V^*_\delta(a)$, é o conjunto:

$$0 < |x-a| < \delta.$$

A condição $|x-a| > 0$ implica que $x \neq a$. Portanto:

$$\dot{V}_\delta(a) =]a-\delta, a[\cup]a, a+\delta[$$



A linguagem ε-δ (epsilon-delta)

Na matemática do nível superior, é convenção utilizar:

- δ (delta) para representar o raio de uma vizinhança no domínio (eixo x).
- ε (epsilon) para representar o raio de uma vizinhança na imagem (eixo y).

Perceba que...

Dizer que "x está arbitrariamente próximo de a" é equivalente a dizer que "para qualquer raio $\delta > 0$, por menor que seja, x pertence à vizinhança $V_\delta(a)$".

Exercício resolvido 2.9

1. Descreva o conjunto de números reais que distam menos de 0,01 unidades do número 5 usando notação de módulo e notação de intervalo.

Resolução: Aqui, o centro é o ponto $a = 5$ e o raio (erro tolerável) é $\delta = 0,01$.

- Notação de Módulo: $\boxed{|x-5|<0,01}$.
- Desenvolvimento:

$$-0,01 < x-5 < 0,01$$

Somando 5 em todos os termos:

$$5-0,01 < x < 5+0,01 \implies 4,99 < x < 5,01$$

- Notação de Intervalo: $\boxed{x \in]4,99;\,5,01[}$ ou $\boxed{\{x \in \mathbb{R} : 4,99 < x < 5,01\}}$.

2. Vizinhanças e Intervalos - Expresse o intervalo aberto $]-3,7[$ na forma de uma vizinhança simétrica $V_\delta(a)$, determinando explicitamente o centro a e o raio δ.

Resolução:

O centro a é o ponto médio: $a = \frac{-3+7}{2} = 2$.

O raio δ é a metade do comprimento: $\delta = \frac{7-(-3)}{2} = 5$.

Logo, tem-se a vizinhança $V_5(2)$, que corresponde a $|x-2|<5$.

3. Pertinência a Vizinhanças - Considere a vizinhança $V = V_{0,5}(3)$. Verifique se os números $2,6$ e $3,5$ pertencem a V e determine se o intervalo $B = (2,8;\,3,2)$ está contido em V.

Resolução: V é o intervalo $]3-0,5;3+0,5[=]2,5;3,5[$.

- $2,6 \in V$ pois $2,5 < 2,6 < 3,5$.
- $3,5 \notin V$ pois o intervalo é aberto (não inclui extremos).
- $B \subset V$ pois $2,5 < 2,8$ (extremo inferior de B) e $3,2 < 3,5$ (extremo superior de B).

4. Seja $V(3) = [1,\ 5]$ uma **vizinhança completa** do número 3. Determine uma **vizinhança completa simétrica** do número 3, $V(3;\delta)$, tal que $V(3;\delta) \subset V(3)$.

Resolução:

A vizinhança completa $V(3) = [1,5]$ significa o intervalo $]1,5[$. Para que uma vizinhança simétrica $V(3;\delta) =]3-\delta, 3+\delta[$ esteja contida em $V(3)$, deve-se ter:

$$3-\delta > 1 \quad \text{e} \quad 3+\delta < 5$$

Da primeira desigualdade: $\delta < 2$

Da segunda desigualdade: $\delta < 2$

Portanto, $\delta \leq \min\{2,2\} = 2$. Mas para que seja **contida propriamente**, toma-se $\delta = 2$, obtendo:

$$\boxed{V(3;2) =]1,5[\subset [1,5] = V(3)}$$

5. Seja $T = \{2\} \cup]3,4[$ e $b \in \mathbb{R}$. Determine, se possível, uma vizinhança de b contida em T.

Resolução:

Analisamos os casos para $b \in \mathbb{R}$:

- Se $b \in]3,4[$, então existe uma vizinhança de b contida em T. Por exemplo, para $b = 3,5$, pode-se tomar $\delta = 0,2$ e ter $V(3,5;0,2) =]3,3;3,7[\subset T$.
- Se $b = 2$, qualquer vizinhança de 2 contém pontos menores que 2 que não pertencem a T, pois T só contém 2 e números entre 3 e 4. Portanto, não existe vizinhança de 2 contida em T.
- Se $b = 3$ ou $b = 4$, estes são extremos do intervalo aberto, então qualquer vizinhança contém pontos fora de $]3,4[$ e diferentes de 2. Logo, não existe vizinhança contida em T.
- Se $b \notin [2,4]$, claramente não existe vizinhança contida em T.

6. Seja $y_0 \in \mathbb{R}$. Prove que a interseção de três **vizinhanças completas simétricas de** y_0 é também uma **vizinhança completa simétrica de** y_0.

Resolução:

Sejam $V(y_0;\delta_1)$, $V(y_0;\delta_2)$ e $V(y_0;\delta_3)$ três vizinhanças completas simétricas de y_0, com raios $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$. Tem-se:

$$V(y_0;\delta_i) =]y_0 - \delta_i, y_0 + \delta_i[, \quad i = 1,2,3$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Então:

$$\begin{aligned} V(y_0;\delta_1) \cap V(y_0;\delta_2) \cap V(y_0;\delta_3) &=]y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_1[\cap]y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2[\cap]y_0 - \delta_3, y_0 + \delta_3[\\ &=]y_0 - \delta, y_0 + \delta[\\ &= V(y_0;\delta) \end{aligned}$$

Portanto, a interseção das três vizinhanças é uma vizinhança completa simétrica de y_0 com raio δ.

7. Seja $V(1) =]-\frac{1}{2}, 3[$, uma **vizinhança completa** do número 1. Determine a vizinhança completa simétrica do número 1, $V(1;\delta)$ de maior raio, tal que $V(1;\delta) \subset V(1)$.

Resolução:

Deseja-se ter $V(1;\delta) =]1-\delta, 1+\delta[\subset]-\frac{1}{2}, 3[= V(1)$.

Para isso, devemos ter:

$$1 - \delta > -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad 1 + \delta < 3$$

Da primeira desigualdade: $\delta < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Da segunda desigualdade: $\delta < 2$

Portanto, $\delta \leq \min\left\{\frac{3}{2}, 2\right\} = \frac{3}{2}$.

O maior raio possível é $\delta = \frac{3}{2}$, resultando em:

$$\boxed{V\left(1; \frac{3}{2}\right) = \left]-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right[\subset \left]-\frac{1}{2}, 3\right[}$$

8. Seja $B = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid -2 \leq x \leq 2\}$. Quais pontos de B possuem ao menos uma **vizinhança completa** contida em B? Há algum ponto que não pertence a B que possui uma **vizinhança reduzida** contida em B?

Resolução:

Primeiro, note que $B = [-2,2] \setminus \{0\} = [-2,0[\cup]0,2]$.

- Para pontos no interior de B, ou seja, $x \in]-2,0[\cup]0,2[$, existe uma vizinhança completa contida em B. Por exemplo, para $x = 1,5$, pode-se tomar $\delta = 0,2$ e ter $V(1,5;0,2) =]1,3;1,7[\subset B$.
- Para os pontos de fronteira $x = -2$ e $x = 2$, qualquer vizinhança completa contém pontos fora de B. Portanto, não possuem vizinhança completa contida em B.
- Para o ponto $x = 0$, que não pertence a B, consideram-se vizinhanças reduzidas $V^*(0;\delta) =]-\delta, \delta[\setminus \{0\}$. Para $\delta \leq 2$, tem-se $V^*(0;\delta) \subset [-2,2]$. Mas como $0 \notin B$, precisa-se verificar se $V^*(0;\delta) \subset B$. De fato, para qualquer $\delta > 0$, $V^*(0;\delta)$ contém pontos negativos e positivos próximos de zero, todos diferentes de zero, portanto pertencentes a B. Logo, existe vizinhança reduzida de 0 contida em B, por exemplo, $V^*(0;1) =]-1,1[\setminus \{0\}$.

Importância matemática de vizinhanças

A desigualdade $|x-a| < \delta$ é a ferramenta mais poderosa da Análise Real (estudo no conjunto reta real ou $\mathbb{R}$). Ela traduz a ideia vaga de "proximidade" para uma desigualdade algébrica precisa que pode ser manipulada e resolvida.

Exercício 2.9

1. Descreva o conjunto dos números reais cuja distância ao número -2 é menor que $0,05$. Apresente a resposta usando notação de módulo e, em seguida, notação de intervalo.

2. Expresse o intervalo aberto $(1,9)$ na forma de uma vizinhança simétrica $V_\delta(a)$. Determine explicitamente o valor do centro a e do raio δ.

3. Considere a vizinhança $V = V_{1,2}(4)$.

a) Escreva V como um intervalo aberto.

b) Verifique se os números $2,9$ e $5,1$ pertencem a V.

c) O intervalo $[3,5]$ está contido em V? Justifique.

4. Determine a vizinhança simétrica $V_\delta(a)$ definida pela desigualdade $|3x-12|<6$. (Dica: manipule a desigualdade para deixar o x isolado com coeficiente 1).

5. Seja $V(2)=[-1,7]$ uma vizinhança completa (não simétrica) do número 2. Encontre o maior raio δ possível tal que a vizinhança simétrica $V_\delta(2)$ esteja totalmente contida em $V(2)$.

6. Considere o conjunto $A=\{x\in\mathbb{R}:1\leq|x-3|<4\}$.

a) Represente A como a união de dois intervalos.

b) Determine, se existirem, $\sup A$ e $\inf A$.

7. Para cada conjunto abaixo, determine o supremo, o ínfimo e indique se possuem máximo ou mínimo:

a) $B=(-5,2]$

b) $C=\{x\in\mathbb{R}:x^2\leq 25\}$

c) $D=\{1+\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N},n\geq 1\}$

8. Seja $S=[0,1)\cup\{3\}$.

a) Existe alguma vizinhança de 3 contida em S? Justifique.

b) Existe alguma vizinhança de $0,5$ contida em S? Justifique.

9. Prove que a interseção de duas vizinhanças simétricas de um ponto p, digamos $V_{\delta_1}(p)$ e $V_{\delta_2}(p)$, é também uma vizinhança simétrica de p. Qual será o raio dessa nova vizinhança?

10. **[Desafio]** Seja A um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$ e $c>0$ uma constante real. Definido o conjunto $cA=\{c\cdot x:x\in A\}$. Mostre intuitivamente ou prove que $\sup(cA)=c\cdot\sup A$.

Vizinhanças do Infinito

Até agora, tratou-se de vizinhanças ao redor de um número real finito a. No entanto, para estudar o comportamento de funções quando x cresce indefinidamente (limites no infinito), é necessário estender esse conceito para os "extremos" da reta real.

Embora $+\infty$ e $-\infty$ não sejam números reais, pode-se definir vizinhanças para eles com base na ideia de "superar qualquer barreira".

Definição 2.9.3: Vizinhança de $+\infty$ e $-\infty$

Seja $M > 0$ um número real arbitrariamente grande.

i. Uma **vizinhança de** $+\infty$ é qualquer intervalo aberto da forma:

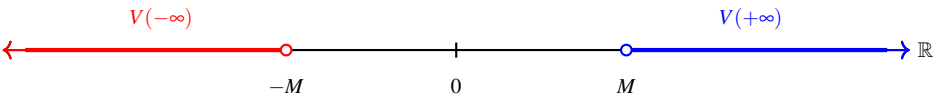
$$V(+\infty) = (M, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > M\}$$

Isso significa que x está "próximo" de $+\infty$ se ele for maior que qualquer barreira M escolhida.

ii. Uma **vizinhança de** $-\infty$ é qualquer intervalo aberto da forma:

$$V(-\infty) = (-\infty, -M) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -M\}$$

Interpretação Geométrica: Diferente das vizinhanças finitas que são simétricas e limitadas, as vizinhanças do infinito são semirretas ilimitadas.



Perceba que...

Enquanto nas vizinhanças finitas o "controle" de proximidade é feito por um número pequeno δ (quanto menor, mais perto), nas vizinhanças do infinito o controle é feito por um número grande M (quanto maior, mais "perto" do infinito).

Exercício resolvido 2.9

1. Determine a barreira M tal que o intervalo $(M, +\infty)$ seja a vizinhança de $+\infty$ definida pela desigualdade $x^2 > 100$ (para $x > 0$).

Resolução: Deseja-se encontrar M tal que $x > M \implies x^2 > 100$. Resolvendo a desigualdade para x positivo:

$$x^2 > 100 \implies \sqrt{x^2} > \sqrt{100} \implies |x| > 10$$

Como se está analisando $x \to +\infty$ (logo $x > 0$), temos $x > 10$. Portanto, a barreira é $M = 10$. A vizinhança é $V(+\infty) = (10, +\infty)$.

2. Verifique se o número $x = 10^6$ pertence à vizinhança de $+\infty$ definida por $V = (5000, +\infty)$.

Resolução: A vizinhança é o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5000\}$. Comparando o valor dado com a barreira $M = 5000$:

$$1.000.000 > 5.000$$

A desigualdade é verdadeira. Logo, $10^6 \in V$. ■

3. Encontre uma vizinhança de $-\infty$, na forma $(-\infty, -M)$, que contenha todos os números reais x tais que $2x + 10 < -40$.

Resolução: Precisa-se isolar x para encontrar a forma $x < -M$.

$$2x + 10 < -40$$

$$2x < -40 - 10$$

$$2x < -50$$

$$x < -25$$

Comparando com a forma padrão $x < -M$, tem-se $-M = -25$, logo $M = 25$. A vizinhança é $V(-\infty) = (-\infty, -25)$.

4. Determine um valor de $M > 0$ para que a vizinhança $V(+\infty) = (M, +\infty)$ satisfaça a condição: "Para todo $x \in V(+\infty)$, tem-se $\frac{1}{x} < 0,01$".

Resolução: Espera-se que $\frac{1}{x} < 0,01$. Como $x \in V(+\infty)$, assume-se $x > 0$. Invertendo a desigualdade (lembrando que inverter inverte o sinal da desigualdade para números positivos):

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{100} \implies x > 100$$

Portanto, basta tomar $M = 100$. A vizinhança é $(100, +\infty)$.

5. Mostre que a interseção das vizinhanças $V_1 = (10, +\infty)$ e $V_2 = (50, +\infty)$ é também uma vizinhança de $+\infty$. Qual é a nova barreira M?

Resolução: A interseção $V_1 \cap V_2$ contém os elementos que satisfazem simultaneamente $x > 10$ e $x > 50$. Para satisfazer ambas, x deve ser maior que o maior dos dois limites.

$$x > \max\{10, 50\} \implies x > 50$$

Logo, $V_1 \cap V_2 = (50, +\infty)$, que é uma vizinhança de $+\infty$ com barreira $M = 50$. ■

Exercício 2.9

11. Escreva na forma de intervalo $(M, +\infty)$ a vizinhança de $+\infty$ determinada pela desigualdade $x - 5 > 12$. Qual é o valor da barreira M?

12. Determine a vizinhança de $-\infty$, na forma $(-\infty, -M)$, que satisfaz a condição $3x < -21$.

13. Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Encontre um valor real $M > 0$ tal que, para todo x na vizinhança $(M, +\infty)$, tenhamos $f(x) < 0{,}0001$.

14. Sejam $V_1 = (100, +\infty)$ e $V_2 = (1000, +\infty)$ duas vizinhanças de $+\infty$.

    a) Determine o conjunto $A = V_1 \cup V_2$. Ele é uma vizinhança de $+\infty$?

    b) Determine o conjunto $B = V_1 \cap V_2$. Ele é uma vizinhança de $+\infty$?

15. **(Desafio)** Dado um número real arbitrário $K > 0$, determine a barreira M (em função de K) tal que, se $x \in (M, +\infty)$, então $x^3 > K$.

Capítulo 3

Relações e Funções

3.1 Introdução

O Conceito de Função e a modelagem da realidade busca a compreensão dos fenômenos naturais e o desenvolvimento tecnológico nas ciências agrárias e engenharias, que dependem fundamentalmente da capacidade de identificar padrões e estabelecer relações de causa e efeito entre grandezas físicas. Assim, o conceito de **função** surge como a ferramenta matemática primordial para descrever como uma variável se comporta em resposta a alterações em outra, permitindo-nos resumir informações complexas em estruturas compreensíveis e previsíveis.

Uma função é útil tanto para resumo quanto para visualização de dados, uma vez que o objetivo central do estudo das funções é facilitar a visualização e a interpretação de dados. Em um experimento de campo, por exemplo, a coleta de dados brutos sobre a produtividade de uma cultura em relação à dosagem de fertilizante pode resultar em uma massa de informações de difícil leitura. Ao estruturar esses dados sob a forma de uma função, transformamos o caos informacional em um **modelo matemático** capaz de:

- **Resumir:** Condensar milhares de observações em uma única lei de correspondência.
- **Interpretar:** Identificar regimes de crescimento, pontos de saturação ou decaimento.
- **Prever:** Estimar resultados para cenários que não foram testados experimentalmente.

Uma função matemática não é apenas uma equação; ela é uma relação que pode ser expressa de diversas formas complementares. Na prática da engenharia, utiliza-se o que se conhece como a *Regra dos Quatro*, onde uma função é representada por:

1. **Palavras (Verbal):** Uma descrição qualitativa da relação.

   Exemplo: "A evapotranspiração de uma cultura aumenta linearmente com a radiação solar incidente."

2. **Tabelas (Numérica):** Uma lista de pares ordenados que mostram valores específicos.

   Exemplo: Dados de um sensor de umidade do solo coletados a cada hora.

3. **Gráficos (Visual):** A representação geométrica da relação no plano cartesiano, permitindo a percepção imediata de tendências, concavidades e descontinuidades.

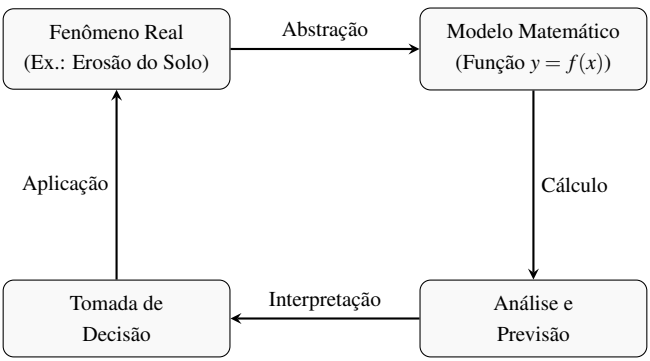
4. **Equações (Analítica):** A fórmula matemática explícita que define a regra de associação.

   Exemplo: $P(t) = P_0 e^{kt}$, descrevendo o crescimento de uma população de pragas em uma lavoura ao longo do tempo.

No que diz respeito a variáveis e modelagem matemática, no cerne de qualquer função $y = f(x)$, reside a distinção entre dois papéis fundamentais:

- **Variável independente (x):** É a grandeza que sofre alteração ou controle (a "causa"). No contexto agrícola, pode ser o tempo de irrigação ou a concentração de um nutriente.
- **Variável dependente (y):** É a grandeza que responde às alterações de x (o "efeito"). Representa o resultado de interesse, como o peso seco da planta ou a vazão de um bocal.

A transição da observação de um fenômeno para a sua escrita matemática é o processo de **modelagem**. Um modelo matemático é uma representação simplificada da realidade, construída através de funções, que busca capturar a essência de um processo biológico ou físico para fins de análise e otimização.



3.2 Plano cartesiano

O Plano cartesiano é um sistema composto por duas retas numéricas perpendiculares que se interceptam em um ponto denominado **origem** $O(0,0)$.

- **Eixo das Abscissas (Eixo x):** A reta horizontal. Valores à direita da origem são positivos; à esquerda, negativos.
- **Eixo das Ordenadas (Eixo y):** A reta vertical. Valores acima da origem são positivos; abaixo, negativos.
- **Par Ordenado (x,y):** Cada ponto P no plano é identificado por um par único, onde x representa a distância horizontal em relação ao eixo y, e y a distância vertical em relação ao eixo x.

Divisão em Quadrantes

A intersecção dos eixos divide o plano em quatro regiões denominadas **quadrantes**, numerados no sentido anti-horário:

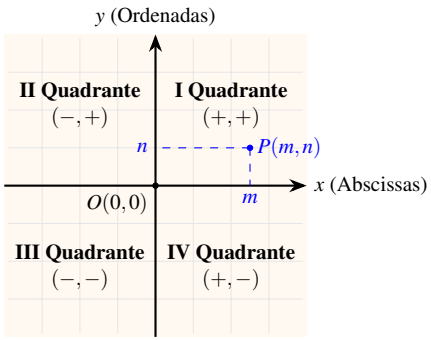
I Quadrante: $x > 0$ e $y > 0$ (Sinais: $+,+$).

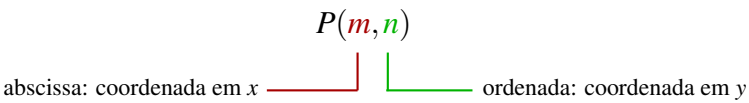
II Quadrante: $x < 0$ e $y > 0$ (Sinais: $-,+$).

III Quadrante: $x < 0$ e $y < 0$ (Sinais: $-,-$).

IV Quadrante: $x > 0$ e $y < 0$ (Sinais: $+,-$).

Nos quadrantes há infinitos pontos $P(m,n)$ com coordenadas m (abscissas) e n (ordenadas).





Distância entre dois pontos no plano

Na engenharia, o plano cartesiano é frequentemente utilizado para calcular distâncias e trajetórias. Dados dois pontos $P_1(x_1,y_1)$ e $P_2(x_2,y_2)$, a distância d entre eles é derivada do Teorema de Pitágoras por:

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Esta métrica é fundamental para o georreferenciamento de dados agrícolas e para a análise de deslocamentos em sistemas de irrigação automatizados.

Produto cartesiano

Definição 3.2.1: Produto Cartesiano

Sejam A e B dois conjuntos. O **produto cartesiano** de A por B, denotado por

$$A \times B,$$

é o conjunto formado por todos os pares ordenados cujo primeiro elemento pertence a A e o segundo a B:

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Exemplo Se $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{1,2,3\}$, então

$$A \times B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}.$$

Observe que **a ordem dos elementos importa**: $(1,3) \neq (3,1)$. O par ordenado $(1,3)$ significa "primeiro elemento de A, terceiro elemento de B", enquanto $(3,1)$ significa "terceiro elemento de A, primeiro elemento de B". Geometricamente, em um plano cartesiano, o ponto $(1,3)$ está na linha horizontal $y = 3$ e coluna vertical $x = 1$, enquanto $(3,1)$ está na linha horizontal $y = 1$ e coluna vertical $x = 3$ — são pontos simétricos em relação à reta $y = x$.

Exercício 3.2

1. Um agrônomo está estudando a relação entre a quantidade de água aplicada na irrigação (I, em mm) e a produtividade de uma lavoura de milho (P, em sacas/ha). Após coletar dados experimentais, ele propôs o modelo matemático $P(I) = -0{,}02I^2 + 12I - 800$.

   a) Identifique a variável independente e a variável dependente nesse contexto.

   b) Explique, com suas palavras, por que o modelo sugere que existe uma quantidade ideal de água e que o excesso pode ser prejudicial (dica: analise o sinal do termo quadrático).

   c) Calcule a produtividade esperada para uma irrigação de $I = 250$ mm.

2. Um sistema de irrigação por pivô central tem sua base localizada na origem $O(0,0)$ de um sistema de coordenadas cartesianas (medidas em metros). Um sensor de umidade foi instalado no ponto $S(-300,400)$.

   a) Em qual quadrante o sensor S está localizado?

   b) Calcule a distância em linha reta do sensor até a base do pivô (origem).

   c) Se um segundo sensor T for colocado simetricamente a S em relação ao eixo y (ordenadas), quais serão as coordenadas de T?

3. Considere dois conjuntos que representam opções de tratamento para um experimento agrícola: $A = \{\text{Adubo X}, \text{Adubo Y}\}$ e $B = \{\text{Dose 1}, \text{Dose 2}, \text{Dose 3}\}$.

   a) Escreva, por extensão, o conjunto $A \times B$ que representa todas as combinações possíveis de adubo e dose.

   b) Quantos tratamentos distintos (pares ordenados) existem nesse experimento?

   c) Se adicionarmos uma terceira opção de adubo ao conjunto A, quantas combinações o novo produto cartesiano terá?

4. Uma caixa d'água cilíndrica está vazando. O volume V (em litros) de água restante na caixa em função do tempo t (em horas) é descrito pela tabela abaixo:

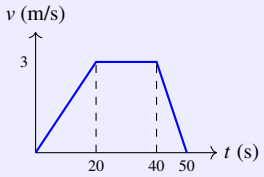
t (h)	0	1	2	3	4
V (L)	1000	950	900	850	800

a) Descreva a relação verbalmente (o que acontece com o volume a cada hora?).

b) Determine a equação (fórmula) $V(t)$ que modela essa situação.

c) Esboce o gráfico dessa função no plano cartesiano, identificando os eixos e o intercepto vertical.

5. O gráfico abaixo mostra a velocidade v (em m/s) de um trator em função do tempo t (em s) durante uma operação de aragem.



a) Em qual intervalo de tempo o trator manteve velocidade constante?

b) O que ocorre com a velocidade no intervalo entre $t = 40$ e $t = 50$ segundos?

c) Qual foi a velocidade máxima atingida pelo trator?

3.3 Relação

Definição 3.3.1: Relação

Uma **relação** R entre dois conjuntos A e B é qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times B$. Assim,

$$R \subseteq A \times B.$$

Diz-se que um elemento $x \in A$ está **relacionado** a um elemento $y \in B$ quando $(x,y) \in R$.

Exemplo Sendo $A = B = \mathbb{R}$ pode-se definir

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\},$$

então R é uma relação que associa a cada número real x o seu quadrado $y = x^2$. Aqui, $(-2,4) \in R$ e $(2,4) \in R$, mas $(2,3) \notin R$, i.e, $2 \in A = \mathbb{R}$ não está relacionado a $3 \in B = \mathbb{R}$ pela relação $y = x^2$.

Exercício 3.3

1. Considere os conjuntos $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{2,4\}$. O produto cartesiano $A \times B$ possui $3 \times 2 = 6$ elementos. Verifique quais dos conjuntos abaixo são **relações** de A em B (isto é, subconjuntos de $A \times B$) e justifique:

   a) $R_1 = \{(1,2),(2,4),(3,2)\}$ b) $R_2 = \{(1,4),(2,2),(4,2)\}$

   c) $R_3 = \{(x,y) \in A \times B \mid y = 2x\}$

2. Uma relação R entre números reais é definida por $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 25\}$.

   a) Verifique se os pares $(3,4)$, $(0,5)$ e $(-3,-4)$ pertencem à relação R.

   b) Esboce geometricamente essa relação no plano cartesiano. Que figura geométrica ela representa?

3. Dada uma relação $R \subseteq A \times B$, a relação inversa $R^{-1} \subseteq B \times A$ é formada invertendo-se a ordem dos pares ordenados, ou seja, $R^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$. Seja $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ e a relação $R = \{(x,y) \in A \times A \mid y = x^2\}$.

   a) Liste os elementos de R (forma tabular).

   b) Liste os elementos de R^{-1}.

   c) O par $(4,-2)$ pertence a R^{-1}? Justifique.

3.4 Função

Definição 3.4.1: Função —- Noção intuitiva e aplicada

Uma função é uma **relação** especial que descreve uma lei ou regra que **atribui a cada elemento de entrada um único valor de saída**. Ela representa a ideia de dependência entre grandezas, permitindo modelar fenômenos naturais, comportamentos físicos ou processos mecânicos.

Definição 3.4.2: Função —- Definição Formal

Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma **função** de A em B é uma **relação** $f \subseteq A \times B$ tal que:

i. para todo $x \in A$ existe pelo menos um $y \in B$ com $(x,y) \in f$;

ii. para cada $x \in A$ existe **no máximo um** $y \in B$ tal que $(x,y) \in f$.

Quando $(x,y) \in f$, escreve-se $y = f(x)$ e diz-se que y é a **imagem** de x por f.

Perceba que...

- A condição i garante que não há elementos de (A) “sem imagem”. I.é., cada $x \in A$ participa de pelo menos um par ordenado da relação.
- A condição ii garante a unicidade, i.e.: não podem existir pares (x, y_1) e (x, y_2) com $y_1 \neq y_2$. Essa é exatamente a propriedade fundamental de uma função: cada elemento de entrada tem uma única saída.

Exemplos:

1. Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x - 2$.

$$f = \{(x, 3x-2) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

   Para $x = 1$, tem-se $f(1) = 1$; para $x = -2$, tem-se $f(-2) = -8$. Cada valor de entrada possui uma única saída.

2. Seja a relação

$$R = \{(1,3), (1,4), (2,5)\}.$$

   Embora $R \subseteq \{1,2\} \times \{3,4,5\}$, ela **não é uma função**, pois o mesmo elemento 1 está associado a dois valores distintos (3 e 4). Assim, a condição de unicidade é violada!

Exercício 3.4

1. Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, verifique quais das relações abaixo representam uma **função** de A em B. Caso não seja função, justifique apontando qual condição da definição formal foi violada.

   a) $R_1 = \{(-1,1), (0,0), (1,1), (2,4)\}$

   b) $R_2 = \{(-1,0), (0,2), (0,3), (1,4), (2,1)\}$

   c) $R_3 = \{(-1,1), (1,1), (2,4)\}$

2. Construa diagramas com flechas, de modo que o conjunto de partida seja A e o de chegada seja B. Depois classifique cada caso como “É função” ou “Não é função” segundo as condições abaixo.

   a) De cada elemento de A sai exatamente uma flecha.

   b) De um elemento de A saem duas flechas para elementos distintos de B.

   c) Sobra um elemento em A do qual não sai nenhuma flecha.

   d) Sobra um elemento em B que não recebe nenhuma flecha (mas todos de A têm correspondente único).

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela lei $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Calcule os valores das imagens solicitadas:

   a) $f(0)$ b) $f(-2)$ c) $f(\sqrt{3})$ d) $f(h+1)$

4. Uma forma geométrica de verificar se um gráfico representa uma função $y = f(x)$ é o "Teste da Reta Vertical". Baseado na definição formal (unicidade da imagem), responda:

   a) Se uma reta vertical interceptar o gráfico em dois ou mais pontos, a relação é uma função? Por quê?

   b) A equação da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ define y como função de x em todo o seu domínio $[-1, 1]$? Justifique.

5. Um agrônomo observa que a altura h (em cm) de uma muda de eucalipto varia com o tempo t (em semanas) de acordo com a função $h(t) = 5t + 10$.

   a) Qual é a altura inicial da muda (no tempo $t = 0$)?

   b) Qual é a altura da muda após 8 semanas?

   c) Em quanto tempo a muda atingirá 60 cm de altura?

3.5 Domínio, contradomínio e imagem de uma função

Dada uma função $f : A \to B$, define-se três conjuntos fundamentais:

Definição 3.5.1: Elementos associados a uma função

Naturalmente, toda função possui:

i. Domínio (D_f): É o conjunto de partida A. Contém todos os valores de x para os quais a função está definida.

ii. Contradomínio (CD_f): É o conjunto de chegada B. Contém todos os valores possíveis que a função *poderia* assumir, além de outros que podem não ser atingidos.

iii. Imagem (Im_f): É o subconjunto de B formado apenas pelos valores que efetivamente são correspondentes de algum $x \in A$.

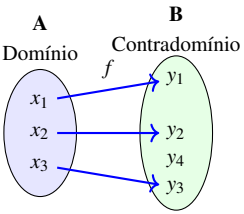
$$Im_f = \{y \in B \mid \exists x \in A, f(x) = y\}$$

Perceba que...

A imagem está contida no contradomínio: $Im_f \subseteq CD_f$.

Diagrama de flechas

O diagrama de flechas (ou diagrama de Venn-Euler para funções) é uma representação visual intuitiva da relação entre dois conjuntos. Nele, uma função $f : A \to B$ é ilustrada por flechas que partem de elementos do domínio A e chegam aos seus respectivos correspondentes no contradomínio B.



Observação

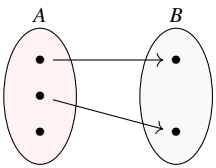
Para que a relação seja uma **função**, duas condições visuais devem ser satisfeitas no diagrama:

1ª de **todo** elemento de A deve partir uma flecha;

2ª de cada elemento de A deve partir **apenas uma** flecha.

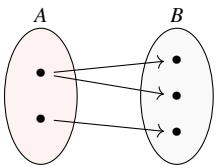
A compreensão da definição de função e a verificação de sua existência entre dois conjuntos A e B podem ser auxiliadas pelo uso de diagramas de Venn-Euler, analisando-se quatro casos distintos:

Caso 1: Não é função (Violação da existência)



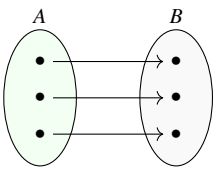
O elemento inferior de A não possui correspondente.

Caso 2: Não é função (Violação da unicidade)



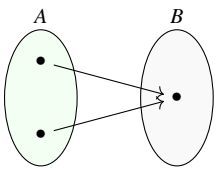
O elemento superior de A possui duas imagens distintas.

Caso 3: É função (Injetora)



Cada elemento de A associa-se a um único de B. Esse processo denomina-se injeção.

Caso 4: É função (Não injetora)



Dois elementos de A convergem para o mesmo em B. Isso é permitido .

3.6 Determinação de domínio e imagem de uma função

Quando uma função é dada apenas por sua lei de formação $y = f(x)$, sem explicitação dos conjuntos A e B, adota-se o **domínio real máximo**. Ou seja, o domínio será o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual as operações matemáticas em $f(x)$ sejam válidas.

Propriedades

Para determinar o domínio, deve-se atentar para as seguintes condições de existência em $\mathbb{R}$:

1. **Denominadores:** Não podem ser nulos.

$$\frac{1}{g(x)} \implies g(x) \neq 0$$

2. **Radicais de índice par:** O radicando deve ser não negativo.

$$\sqrt[2n]{g(x)} \implies g(x) \geq 0$$

3. **Radicais de índice par no denominador:** Deve-se mesclar as duas condições anteriores (não negativo e não nulo), resultando em estritamente positivo.

$$\frac{1}{\sqrt[2n]{g(x)}} \implies g(x) > 0$$

Diferentemente do domínio, a determinação analítica do conjunto imagem (Im_f) nem sempre é trivial. O procedimento mais comum consiste em analisar o comportamento da variável dependente y. Em funções algébricas inversíveis ou simples, busca-se isolar a variável x em função de y ($x = g(y)$) e aplicar as mesmas restrições de existência citadas acima para a variável y. Em funções quadráticas, analisa-se o vértice da parábola.

Exercício resolvido 3.6

1. Determine o domínio (D_f) da função $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x-5}$.

Resolução: Identificam-se duas restrições simultâneas:

- O termo dentro da raiz deve ser não negativo: $x - 2 \geq 0 \implies x \geq 2$.
- O denominador deve ser diferente de zero: $x - 5 \neq 0 \implies x \neq 5$.

A interseção dessas condições resulta em:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2 \text{ e } x \neq 5\} \text{ ou } D_f = [2,5) \cup (5,+\infty)$$

2. Determine o domínio (D_f) da função $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{2x-6}}$.

Resolução: Aplica-se a condição de radical no denominador (estritamente positivo):

$$2x-6>0 \implies 2x>6 \implies x>3$$

Logo, tem-se:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x>3\}$$

3. Determine o domínio (D_f) da função $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

Resolução:

- **Domínio:** O denominador não pode ser nulo.

$$x-1 \neq 0 \implies x \neq 1. \quad \text{Logo, } D_f = \mathbb{R} - \{1\}.$$

- **Imagem:** Para encontrar os valores possíveis de y, isola-se x em função de y:

$$y = \frac{2x+1}{x-1} \implies y(x-1) = 2x+1 \implies yx - y = 2x+1$$

Agrupam-se os termos com x:

$$yx - 2x = y+1 \implies x(y-2) = y+1 \implies x = \frac{y+1}{y-2}$$

Para que x exista, o novo denominador $(y-2)$ não pode ser nulo. Portanto, $y \neq 2$ e $\boxed{Im_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}.}$

4. Determine o imagem (Im_f) da função $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Resolução: Trata-se de uma parábola com concavidade voltada para cima ($a>0$). O valor mínimo da função ocorre no vértice $V(x_v, y_v)$. Calcula-se a ordenada do vértice (y_v):

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(3) = 16 - 12 = 4 \quad \rightarrow \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4}{4(1)} = -1$$

Como a função possui um valor mínimo em $y=-1$ e cresce infinitamente, conclui-se que a imagem é o conjunto de valores maiores ou iguais a -1.

$$Im_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\} \text{ ou } Im_f = [-1, +\infty[$$

Exercício 3.6

1. Em relação à definição de função $f : A \to B$, classifique as afirmações abaixo como Verdadeiras (V) ou Falsas (F):

   a) O conjunto A é chamado de contradomínio da função.

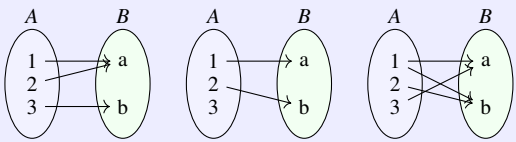
   b) Todos os elementos do domínio A devem ter um correspondente em B.

   c) Um elemento do domínio pode ter mais de uma imagem no contradomínio.

   d) O conjunto imagem é sempre um subconjunto do contradomínio ($Im_f \subseteq B$).

   e) Podem sobrar elementos no contradomínio B sem que deixem de ser função.

2. Observe os diagramas de flechas abaixo, que relacionam o conjunto $A = \{1,2,3\}$ ao conjunto $B = \{a,b,c,d\}$. Identifique quais representam uma função de A em B e justifique os que não são.



3. Seja a função $f : A \to B$ definida por $f(x) = x^2 - 1$, onde o domínio é $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ e o contradomínio é $B = \{-2,-1,0,1,2,3,4\}$.

   a) Calcule $f(x)$ para cada elemento de A.

   b) Liste os elementos do conjunto Imagem (Im_f).

   c) Sobraram elementos no contradomínio B? Se sim, quais?

4. Determine o domínio máximo de validade em $\mathbb{R}$ para as seguintes funções (atente para denominadores e raízes):

   a) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-4}$

   b) $g(x) = \sqrt{x-7}$

   c) $h(x) = \dfrac{5}{\sqrt{2x+6}}$

   d) $p(x) = \sqrt[3]{x-2}$

5. Para a função $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x-3}$, determine o domínio analisando simultaneamente a condição do radical e a do denominador. Apresente a resposta na notação de intervalo.

6. Considere a função $f(x) = x^2 - 6x + 5$ definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

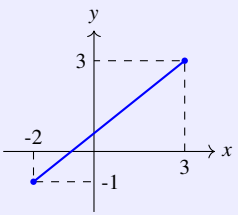
a) Determine as coordenadas do vértice $V(x_v, y_v)$ da parábola.

b) A parábola tem concavidade para cima ou para baixo? Ela possui valor máximo ou mínimo?

c) Escreva o conjunto imagem Im_f com base no valor do vértice.

7. Para a função $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+1}$, determine o conjunto imagem encontrando qual valor de y é impossível de ser atingido. *Dica: Isole x em função de y e analise o novo denominador.*

8. Observe o gráfico da função $y = f(x)$ abaixo e determine:



a) O domínio D_f (intervalo no eixo x). b) A imagem Im_f (intervalo no eixo y).

9. Um fazendeiro deseja cercar uma área retangular usando 100 metros de cerca. Se um dos lados mede x, o outro lado medirá $50 - x$. A função área é dada por $A(x) = x(50-x)$.

a) Qual é o domínio prático dessa função? (Dica: medidas de lado devem ser positivas).

b) Qual é a área máxima que ele pode cercar?

10. Dadas as funções $f(x) = 2x+1$ e $g(x) = x^2$, determine a lei de formação das funções compostas:

a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$

3.7 Gráfico de uma função

O gráfico de uma função f é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y), onde $y = f(x)$, representados no plano cartesiano. Visualmente, ele permite analisar o comportamento global da função, (crescimento, raízes, e ocorrências de extremos — máximos e mínimos).

Para esboçar um gráfico manualmente, utiliza-se frequentemente o método de tabulação de pontos, seguido pela interpolação (ligação) desses pontos, conforme ilustrado no exemplo a seguir.

Exercício resolvido 3.7

1. Esboce o gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x - 1$ no intervalo $[-1, 3]$.

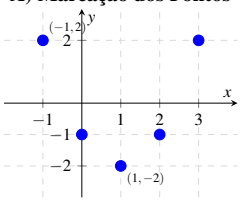
Resolução:

Passo 1: Construção da Tabela Atribuem-se valores arbitrários para x dentro do intervalo desejado e calculam-se as respectivas imagens $y = f(x)$.

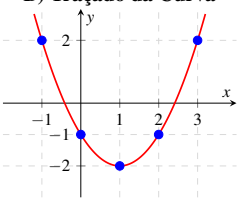
x	**Cálculo** $x^2 - 2x - 1$	y	**Par** (x, y)
-1	$(-1)^2 - 2(-1) - 1 = 1 + 2 - 1$	2	$(-1, 2)$
0	$(0)^2 - 2(0) - 1 = -1$	-1	$(0, -1)$
1	$(1)^2 - 2(1) - 1 = 1 - 2 - 1$	-2	$(1, -2)$
2	$(2)^2 - 2(2) - 1 = 4 - 4 - 1$	-1	$(2, -1)$
3	$(3)^2 - 2(3) - 1 = 9 - 6 - 1$	2	$(3,\ 2)$

Passo 2: Representação Gráfica Primeiramente, marcam-se os pontos obtidos no plano cartesiano. Em seguida, traça-se a curva suave que conecta esses pontos, respeitando o comportamento esperado da função.

A) Marcação dos Pontos



B) Traçado da Curva



Observação

Uma curva no plano cartesiano representa uma função se, e somente se, qualquer reta vertical interceptar a curva em **no máximo um ponto**. Se uma reta vertical tocar a curva em dois ou mais pontos, isso implica que um mesmo x possui múltiplas imagens, violando a definição de unicidade exigida para funções.

Exercício 3.7

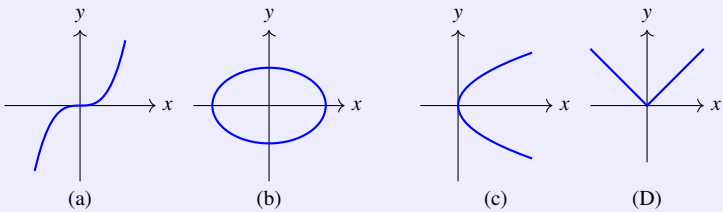
1. Considere a função $f(x) = x^2 - 4$ definida no domínio $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

   a) Construa uma tabela de valores calculando $y = f(x)$ para cada elemento do domínio.

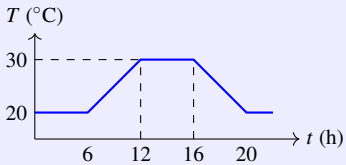
   b) Marque os pares ordenados obtidos no plano cartesiano.

   c) Se o domínio fosse expandido para $\mathbb{R}$ (todos os reais), qual seria o formato da curva que conecta esses pontos?

2. Analise as curvas abaixo e determine quais representam o gráfico de uma função $y = f(x)$. Justifique sua resposta aplicando o teste da reta vertical.



3. O gráfico a seguir representa a temperatura T (em °C) de uma estufa ao longo de um dia, onde t é o tempo em horas ($0 \leq t \leq 24$).



   a) Qual foi a temperatura máxima atingida e por quanto tempo ela permaneceu constante?

   b) Em quais intervalos de tempo a temperatura estava subindo?

   c) Qual a temperatura no início ($t = 0$) e no final ($t = 24$) do registro?

4. Esboce o gráfico de uma função f que satisfaça simultaneamente todas as condições abaixo:

   • Domínio $D = [-2, 4]$.

   • $f(-2) = 1$ e $f(4) = -1$.

   • A função é crescente no intervalo $[-2, 0]$ e decrescente no intervalo $[0, 4]$.

   • O valor máximo da função é 3 (ocorrendo em $x = 0$).

5. Determine algebricamente os pontos onde o gráfico da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$ intercepta os eixos coordenados.

   a) Interseção com o eixo y (faça $x = 0$).

   b) Interseção com o eixo x (faça $y = 0$ e resolva a equação).

   c) Esboce o gráfico marcando esses pontos.

3.8 Função par e função ímpar

A paridade de uma função refere-se à simetria do seu gráfico em relação ao eixo vertical ou à origem.

Definição 3.8.1: Paridade de funções

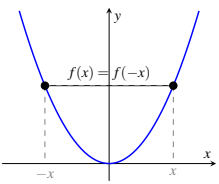
Seja f uma função com domínio simétrico em relação à origem.

- **Função Par:** $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in D_f$.
  Simetria: O gráfico é simétrico em relação ao eixo y (eixo das ordenadas). Ex.: $f(x) = x^2, \cos(x)$.

- **Função Ímpar:** $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in D_f$.
  Simetria: O gráfico é simétrico em relação à origem $(0,0)$. Ex.: $f(x) = x^3, \operatorname{sen}(x)$.

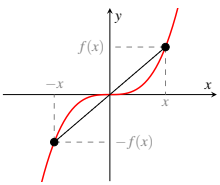
Função Par ($y = x^2$)

Simetria no Eixo y



Função Ímpar ($y = x^3$)

Simetria na Origem

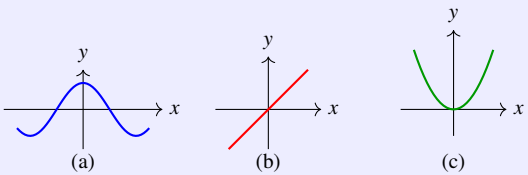


Exercício 3.8

1. Verifique a paridade das seguintes funções, calculando $f(-x)$ e comparando com $f(x)$ e $-f(x)$. Classifique-as como Par, Ímpar ou Nem Par Nem Ímpar.

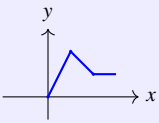
   a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5$ b) $g(x) = 2x^3 - 5x$ c) $h(x) = x^2 + x$ d) $p(x) = \dfrac{1}{x}$

2. Observe os gráficos abaixo e determine se representam funções pares, ímpares ou sem paridade definida. Justifique sua resposta com base na simetria.



3. Sejam f e g duas funções pares. Mostre que a soma $h(x) = f(x) + g(x)$ também é uma função par. *Dica: Calcule $h(-x)$ usando a definição de paridade para f e g.*

4. O gráfico abaixo mostra apenas a parte de uma função $f(x)$ para $x \geq 0$.



a) Copie o gráfico e complete-o assumindo que f é uma função **par**.

b) Copie o gráfico e complete-o assumindo que f é uma função **ímpar**.

5. Um resultado interessante em matemática afirma que qualquer função $f(x)$ definida em um domínio simétrico pode ser escrita como a soma de uma função par $P(x)$ e uma função ímpar $I(x)$, onde:

$$P(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{e} \quad I(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

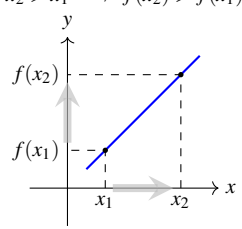
Para a função $f(x) = e^x$ (exponencial), determine as expressões de sua parte par $P(x)$ e de sua parte ímpar $I(x)$. *Nota: Essas funções são conhecidas como Cosseno Hiperbólico e Seno Hiperbólico.*

3.9 Função crescente e função decrescente

O comportamento de crescimento descreve como a saída da função (y) reage a um aumento na entrada (x).

Função Crescente

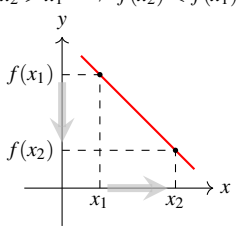
$x_2 > x_1 \implies f(x_2) > f(x_1)$



Ao aumentar-se x, o valor de y também aumenta.

Função Decrescente

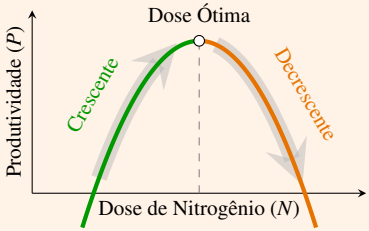
$x_2 > x_1 \implies f(x_2) < f(x_1)$



Ao aumentar-se x, o valor de y diminui.

Observação

Algumas funções são crescentes e decrescentes em intervalos diferentes. No contexto agronômico, isso é comum em curvas de resposta, onde o excesso de um fator (como temperatura ou fertilizante) causa declínio na resposta.



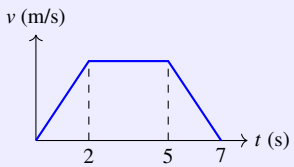
Exercício 3.9

1. Determine os intervalos em que a função quadrática $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ é crescente e onde é decrescente.

   a) Encontre o vértice da parábola $V(x_v, y_v)$.

   b) Esboce o gráfico e identifique o intervalo de crescimento ($x < x_v$) e o de decrescimento ($x > x_v$).

2. O gráfico abaixo representa a velocidade $v(t)$ de um carro em função do tempo t.



   a) Em qual intervalo de tempo a velocidade é crescente (aceleração positiva)?

   b) Em qual intervalo a velocidade é decrescente (frenagem)?

   c) O que significa o trecho horizontal entre $t = 2$ e $t = 5$?

3. Considere a função $f(x) = |x - 2|$.

   a) Esboce o gráfico dessa função.

   b) Determine o intervalo onde a função é estritamente decrescente.

   c) Determine o intervalo onde a função é estritamente crescente.

4. Seja $f(x) = 2x+1$ (crescente) e $g(x) = -x+3$ (decrescente). Analise o crescimento da função composta $h(x) = f(g(x))$.

   a) Determine a lei de formação de $h(x)$.

   b) Verifique se $h(x)$ é crescente ou decrescente.

   c) Conclua: a composição de uma função crescente com uma decrescente resulta em qual tipo de função?

5. A produção P de uma cultura em função da quantidade de fertilizante x é dada por $P(x) = -x^2 + 10x$.

   a) Determine a quantidade de fertilizante x que maximiza a produção.

   b) Em qual intervalo o aumento de fertilizante resulta em aumento de produção (função crescente)?

   c) A partir de qual quantidade o fertilizante passa a ser prejudicial (função decrescente)?

3.10 Função injetora, sobrejetora e bijetora

A classificação quanto ao mapeamento de elementos é crucial para entender a inversibilidade de funções.

Definição 3.10.1: Tipologia de funções

i. Injetora: Elementos distintos do domínio têm imagens distintas.

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

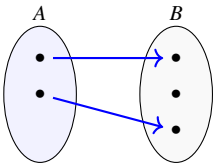
Teste visual: Nenhuma reta horizontal corta o gráfico mais de uma vez.

ii. Sobrejetora: O conjunto imagem é igual ao contradomínio ($Im_f = B$). Todo elemento de B recebe pelo menos uma flecha.

iii. Bijetora: É simultaneamente injetora e sobrejetora. A correspondência é "um para um" e perfeita. Somente funções bijetoras admitem inversa.

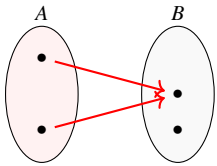
Exemplificação geométrica

É Injetora



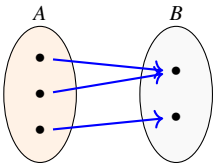
Cada flecha chega em um destino único

Não é Injetora



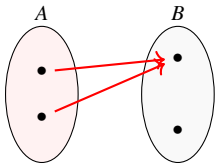
Dois elementos vão para o mesmo destino

É Sobrejetora



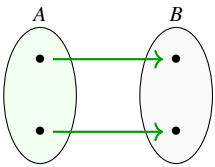
Não sobra ninguém em B

Não é Sobrejetora



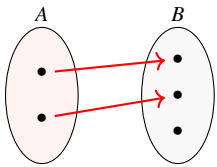
Sobra elemento em B sem flecha

É Bijetora



Correspondência perfeita 1 para 1

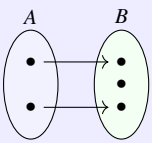
Não é Bijetora



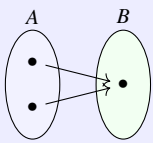
Falha na sobrejeção ou injeção

Exercício 3.10

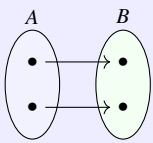
1. Observe os diagramas de flechas abaixo, que representam funções de A em B. Classifique cada função como Injetora, Sobrejetora, Bijetora ou Nenhuma das anteriores.



(a)



(b)



(c)

2. Analise os gráficos das funções reais abaixo e determine se são injetoras ou não, aplicando o teste da

reta horizontal.

a) $f(x) = x^2$ (Parábola)

b) $g(x) = x^3$ (Cúbica)

c) $h(x) = e^x$ (Exponencial)

d) $p(x) = \text{sen}(x)$ (Senóide)

3. Zootecnia - Um zootecnista está monitorando o peso de bovinos em confinamento. A função $P(t)$ descreve o peso do animal em função do tempo. Se dois animais diferentes atingirem o mesmo peso em tempos diferentes, a função $P(t)$ pode ser considerada injetora nesse intervalo? Justifique sua resposta com base na definição de injetividade ($t_1 \neq t_2 \implies P(t_1) \neq P(t_2)$).

4. Engenharia de Produção) - Uma fábrica de peças automotivas possui uma máquina que produz exatamente 100 peças por hora. A função $N(t) = 100t$ relaciona o número de peças produzidas com o tempo em horas. Se o domínio for $D = [0,8]$ horas e o contradomínio for o conjunto de todas as quantidades possíveis de peças $CD = [0,1000]$, a função é sobrejetora? Justifique.

5. Para que uma função admita inversa, ela precisa ser bijetora. Verifique se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x - 2$ é bijetora.

   a) É injetora? (Verifique se $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$).

   b) É sobrejetora? (Verifique se para todo $y \in \mathbb{R}$, existe um x tal que $f(x) = y$).

3.11 Função inversa

Dada uma função bijetora $f : A \to B$, a função inversa $f^{-1} : B \to A$ é aquela que faz o "caminho de volta". Se f leva x em y, então f^{-1} leva y em x. Deste modo:

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

Propriedade Fundamental

A composição de uma função com sua inversa resulta na função identidade:

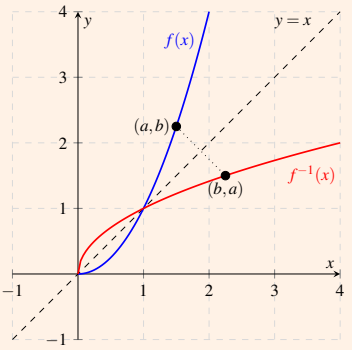
$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{e} \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

Perceba que...

Para que função f admita inversa f^{-1} ela deve satisfazer as condições de existência e unicidade no sentido de volta (de B para A), i.e., f deve ser, necessariamente, bijetora.

Observação

Simetria Gráfica: O gráfico de uma função e o de sua inversa são sempre **simétricos** em relação à reta $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares).



Procedimento prático para determinação da função inversa

Para obter a lei de formação da função inversa $f^{-1}(x)$ a partir de $f(x)$, adota-se o seguinte algoritmo:

1. **Notação:** Substitui-se $f(x)$ por y na equação original.
2. **Troca de Variáveis:** Troca-se x por y e y por x. Este passo representa a inversão dos papéis de domínio e imagem.
3. **Isolamento:** Isola-se a "nova" variável y em função de x através de manipulações algébricas.
4. **Finalização:** Substitui-se o y isolado por $f^{-1}(x)$.

Exercício resolvido 3.11

1. Determine a expressão analítica da função inversa para os casos abaixo:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x - 5$.

b) $f : \mathbb{R} - \{1/3\} \to \mathbb{R} - \{1/3\}$ definida por $f(x) = \dfrac{x+2}{3x-1}$.

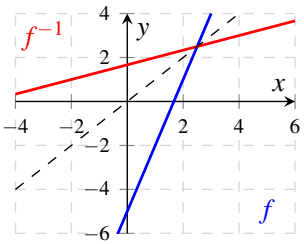
Resolução:

a) Seja $y = 3x - 5$.

- Troca-se as variáveis: $x = 3y - 5$
- Isola-se o y:

$$x + 5 = 3y \implies y = \frac{x+5}{3}$$

- Por fim: $\boxed{f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}.}$



b) Seja $y = \frac{x+2}{3x-1}$.

- Troca-se as variáveis:

$$x = \frac{y+2}{3y-1.}$$

- Isola-se o y (multiplica-se cruzado):

$$x(3y-1) = y+2 \implies 3xy - x = y + 2.$$

- Agrupam-se os termos que contêm y no mesmo lado:

$$3xy - y = x + 2$$

- Fatora-se o y (passo crucial): $y(3x-1) = x+2 \implies y = \frac{x+2}{3x-1}$
- Por fim: $\boxed{f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3x-1}.}$

Nota: Neste caso particular, observa-se que a função é igual à sua inversa ($f = f^{-1}$).

Exercício 3.11

1. Determine a lei de formação da função inversa $f^{-1}(x)$ para as seguintes funções bijetoras:

   a) $f(x) = 4x + 7$

   b) $g(x) = \frac{x-3}{2}$

   c) $h(x) = \sqrt[3]{x-1}$

   d) $p(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

2. O gráfico de uma função f passa pelo ponto $P(2,5)$.

   a) Por qual ponto o gráfico da função inversa f^{-1} obrigatoriamente passará?

   b) Se a função f é crescente, o que se pode afirmar sobre o crescimento da função inversa f^{-1}?

3. Em um processo de filtragem, a concentração C de um soluto (em mg/L) em função do tempo t (em min) é dada por $C(t) = 100 - 2t$.

   a) Determine a função inversa $t(C)$, que expressa o tempo necessário para atingir uma determinada concentração.

   b) Qual o tempo necessário para que a concentração caia para 40 mg/L?

4. O número de bactérias em uma cultura é dado por $N(t) = 1000 \cdot 2^t$, onde t é o tempo em horas.

   a) Isole a variável t em função de N (função inversa). *Dica: Use logaritmo na base 2.*

   b) Interprete o significado físico dessa função inversa.

5. Seja $f(x) = \sqrt{x-2}$ definida para $x \geq 2$. O conjunto imagem de f é $[0, +\infty)$.

   a) Determine a expressão da inversa $f^{-1}(x)$.

   b) Qual deve ser o domínio da função inversa f^{-1}? (Lembre-se: $D_{f^{-1}} = Im_f$).

6. (UFC) Seja P o conjunto dos números naturais primos e enumerados em ordem crescente e $\mathbb{N}^*$ o conjunto dos inteiros positivos excluído zero. Defina a função f de $\mathbb{N}^*$ em P pondo $f(n)$ igual ao n-ésimo número primo de P. Sobre f e f^{-1}, pode-se afirmar:

   (A) $f^{-1}(11) < f^{-1}(7)$

   (B) $f^{-1}(3) + f^{-1}(5)$ é um elemento de P

   (C) $f^{-1}(7)$ é um elemento de P

   (D) $f^{-1}(13) = 5$

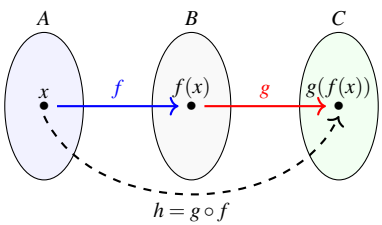
   (E) $f(7) \cdot f(1) = 17$

3.12 Função composta

A composição de funções consiste em aplicar uma função sobre o resultado de outra. Dadas $f : A \to B$ e $g : B \to C$, a função composta $h : A \to C$, denotada por $g \circ f$ (lê-se: "g composta com f" ou "g bola f" ou ainda "g círculo f"), é definida por:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Isso significa que primeiro aplica-se f em x para obter $y = f(x)$, e em seguida aplica-se g em y para obter $z = g(y)$.



Perceba que...

A função composta $h = g \circ f$ tem a finalidade de transportar elementos do conjunto A diretamente para o conjunto C. Embora o conjunto B atue como um intermediário necessário para a construção algébrica, a função composta estabelece um vínculo direto entre o início e o fim do processo, como se o conjunto B fosse "ignorado" no mapeamento final $A \mapsto C$.

Exercício resolvido 3.12

1. Sejam $f(x) = 2x+1$ e $g(x) = x^2$. Determine:

a) $(g \circ f)(x)$

b) $(f \circ g)(x)$

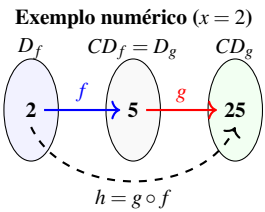
Resolução:

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+1)$. Substitui-se $(2x+1)$ no lugar de x em g:

$$g(2x+1) = (2x+1)^2$$

Desenvolvendo o produto notável:

$$\boxed{4x^2+4x+1}$$

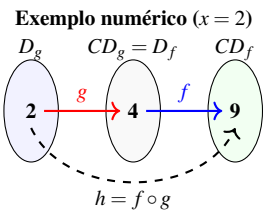


b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2)$. Substitui-se x^2 no lugar de x em f:

$$f(x^2) = 2(x^2)+1$$

Logo:

$$\boxed{2x^2+1}$$



Nota: Observe que, em geral, $g \circ f \neq f \circ g$.

2. Sejam as funções $f(x) = x+4$ e $g(x) = 2x-1$. Determine a lei de formação da função inversa da composta, ou seja, $(g \circ f)^{-1}(x)$.

Resolução: Primeiramente, determina-se a função composta $h(x) = (g \circ f)(x)$:

$$h(x) = g(f(x)) = g(x+4) = 2(x+4)-1$$

$$h(x) = 2x + 8 - 1 \implies h(x) = 2x + 7$$

Em seguida, calcula-se a inversa de $h(x)$. Seja $y = 2x + 7$:

- Troca-se as variáveis: $x = 2y + 7$.
- Isola-se o y: $2y = x - 7 \implies y = \dfrac{x-7}{2}$.

Portanto:

$$\boxed{(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x-7}{2}.}$$

3. Engenharia Ambiental - Um navio petroleiro sofre um acidente e vaza óleo no oceano, formando uma mancha circular. O raio r da mancha (em metros) cresce em função do tempo t (em minutos) conforme a lei $r(t) = 5t$. A área A da mancha (em metros quadrados) é função do raio, dada por $A(r) = \pi r^2$. Determine a função $(A \circ r)(t)$ e interprete seu significado físico.

Resolução: A função composta é dada por:

$$(A \circ r)(t) = A(r(t)) = A(5t)$$

Substitui-se $5t$ na variável r da função área:

$$A(5t) = \pi(5t)^2 = \pi(25t^2)$$

$$\boxed{(A \circ r)(t) = 25\pi t^2.}$$

A função obtida expressa a área da mancha de óleo diretamente em função do tempo decorrido desde o vazamento, eliminando a necessidade de calcular o raio intermediário.

4. Termodinâmica - Em processos industriais, é comum a conversão entre escalas termométricas. Sabe-se que a temperatura em graus Celsius (C) em função da temperatura em Fahrenheit (F) é dada por $C(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$. Sabe-se também que a temperatura em Kelvin (K) em função de Celsius é $K(C) = C + 273$. Obtenha a função que converte Fahrenheit diretamente para Kelvin.

Resolução: Busca-se a composta $K(C(F))$. Substitui-se a expressão de $C(F)$ na função $K(C)$:

$$(K \circ C)(F) = K\left(\frac{5}{9}(F - 32)\right)$$

$$(K \circ C)(F) = \frac{5}{9}(F - 32) + 273$$

Para simplificar a expressão algébrica:

$$(K \circ C)(F) = \frac{5F - 160}{9} + \frac{2457}{9} = \boxed{\frac{5F + 2297}{9}.}$$

Assim, tem-se a conversão direta $T_K = f(T_F)$.

5. Hidráulica e Vazão - Baseando-se no estudo de vazão em canais de concreto, sabe-se que a velocidade de escoamento V (em m/s) pode ser modelada em função do raio hidráulico R (em m) pela equação:

$$V(R) = 0,0298 \cdot R^{2/3}$$

Suponha que, durante uma tempestade, o nível da água no canal suba de modo que o raio hidráulico aumente em função do tempo t (em minutos), conforme a lei $R(t) = 0,5t$.

a) Determine a função composta $(V \circ R)(t)$, que expressa a velocidade da vazão diretamente em função do tempo.

b) Calcule a velocidade de escoamento após $t = 8$ minutos de chuva.

Resolução:

a) Busca-se a lei $V(R(t))$. Substitui-se a expressão de $R(t)$ na variável R da função V:

$$(V \circ R)(t) = V(0,5t) = 0,0298 \cdot (0,5t)^{2/3}$$

Pode-se simplificar a expressão distribuindo o expoente (opcional, mas elegante):

$$(V \circ R)(t) = 0,0298 \cdot (0,5)^{2/3} \cdot t^{2/3}$$

Calculando $(0,5)^{2/3} \approx 0,63$:

$$(V \circ R)(t) \approx 0,0298 \cdot 0,63 \cdot t^{2/3} \approx \boxed{0,0188 \cdot t^{2/3}}$$

b) Para $t = 8$ minutos, aplica-se o valor na função composta obtida:

$$V(8) = 0,0188 \cdot (8)^{2/3}$$

Sabendo que $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$:

$$V(8) = 0,0188 \cdot 4 = \boxed{0,0752 \text{ m/s}}$$

Nota: A composição permitiu prever a velocidade do fluxo em um instante futuro sem a necessidade de medir o raio hidráulico naquele momento.

Exercício 3.12

1. Dadas as funções $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = 3x - 2$, determine as leis de formação das compostas:

   a) $(f \circ g)(x)$ b) $(g \circ f)(x)$

   c) $(f \circ f)(x)$ d) $(g \circ g)(x)$

2. Considere a função composta $h(x) = \sqrt{x^2 + 5}$. Identifique duas funções f e g tais que $h(x) = f(g(x))$. *Dica: Pense em uma função "de fora"e uma "de dentro".*

3. Engenharia Florestal - Um engenheiro florestal modela o diâmetro D (em cm) do tronco de uma árvore em função de sua idade t (anos) por $D(t) = 2\sqrt{t}$. O volume de madeira comercializável V (em m^3) é dado em função do diâmetro por $V(D) = 0,5D^2$.

   a) Determine a função composta $V(t)$ que fornece o volume diretamente pela idade.

   b) Qual o volume estimado para uma árvore de 25 anos?

4. Biologia Marinha - A população de peixes P em um lago depende da quantidade de algas x (em kg) segundo $P(x) = 100x$. Por sua vez, a quantidade de algas depende da temperatura da água T (°C) segundo $x(T) = 2T + 10$.

   a) Obtenha a função composta $P(T)$ que relaciona a população de peixes com a temperatura.

   b) Se a temperatura aumentar 5°C, qual será o aumento na população de peixes?

5. Física/Cinemática - A posição de uma partícula é dada por $S(t) = t^2 + 2t$. Um sensor mede a posição e converte para um sinal de voltagem V dado por $V(S) = 3S + 5$. Determine a função $V(t)$ que fornece a voltagem em função do tempo e calcule a voltagem no instante $t = 2$ s.

Capítulo 4

Funções Elementares

4.1 Introdução

O estudo das funções elementares é um passo fundamental para o domínio do Cálculo Diferencial e Integral, disciplinas presentes nos cursos de Engenharia, Ciências Naturais e Tecnológicas. Essas funções constituem a base para a modelagem de fenômenos físicos, químicos, biológicos e econômicos, permitindo representar relações entre grandezas de forma precisa e funcional.

Compreender o comportamento das funções potenciais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas é essencial para o desenvolvimento da intuição matemática e para a construção de soluções analíticas em diversas áreas. Elas são frequentemente utilizadas na descrição de movimentos, variações populacionais, reações químicas, sistemas elétricos e fluxos de energia, entre outros.

No contexto do Cálculo I ao IV, as funções elementares aparecem como objetos de estudo e também como ferramentas indispensáveis para a análise de limites, derivadas, integrais, séries e equações diferenciais. Portanto, conhecê-las bem é condição necessária para a aprendizagem fluente e aplicada do conteúdo posterior.

Este capítulo apresenta uma visão sistematizada das principais funções elementares, com foco em suas propriedades algébricas e gráficas, contextualizações práticas e exemplos que servirão como alicerce para os capítulos e disciplinas subsequentes.

4.2 Funções potência

4.2.1 Função polinomial de grau 1

Motivação

A partir de um conjunto de dados, um dos primeiros aspectos a ser investigado é se há *crescimento* ou *decrescimento* e, sobretudo, se esse crescimento ocorre de forma *regular*. Em muitas situações, particularmente em problemas econômicos básicos, supõe-se que a variação de uma grandeza responde de maneira aproximadamente constante quando a variável explicativa é incrementada em passos iguais. Hipóteses dessa característica conduz naturalmente a um *modelo linear*.

Na Economia, um exemplo simples e bastante útil é o de *custo total* com *custo marginal constante* em uma determinada linha de produção, por exemplo de uma fazenda.

Seja q a quantidade produzida (em unidades) e seja $C(q)$ o custo total (em unidades monetárias). Admite-se que exista um **custo fixo** (variável independente q) e que, além disso, cada unidade produzida acrescente sempre o mesmo custo variável (hipótese de *custo marginal constante* na linha de produção analisada).

Considere os dados hipotéticos a seguir:

q	0	100	200	300
$C(q)$	8000	11000	14000	17000

Para verificar se a variação do custo é regular, compara-se a variação do custo com a variação da quantidade. Entre $q = 0$ e $q = 100$, tem-se:

$$\frac{\Delta C}{\Delta q} = \frac{C(100) - C(0)}{100 - 0} = \frac{11000 - 8000}{100} = 30.$$

Entre $q = 100$ e $q = 200$:

$$\frac{\Delta C}{\Delta q} = \frac{C(200) - C(100)}{200 - 100} = \frac{14000 - 11000}{100} = 30.$$

Entre $q = 200$ e $q = 300$:

$$\frac{\Delta C}{\Delta q} = \frac{C(300) - C(200)}{300 - 200} = \frac{17000 - 14000}{100} = 30.$$

Observa-se, portanto, que a razão $\dfrac{\Delta C}{\Delta q}$ permanece constante (igual a 30) para incrementos iguais de q. Isso indica que o custo total cresce de forma regular com a produção e portanto pode ser modelado por uma função do 1° grau.

Além disso, nota-se que $C(0) = 8000$, o que corresponde ao custo fixo: mesmo sem produção, há um custo associado à operação.

Em termos de modelo, os dados sugerem uma equação na forma

$$C(q) = 30q + 8000,$$

na qual o número 30 representa o acréscimo no custo total por unidade adicional produzida (na linha de produção analisada) e o número 8000 representa o custo quando $q = 0$.

Esse tipo de modelagem é elementar, mas extremamente útil: aparece como primeira aproximação (*linearização local*) em modelos mais complexos e serve de base para tópicos posteriores, como otimização, análise marginal, elasticidades aproximadas e métodos numéricos.

A função polinomial de grau 1 (função linear/afim)

Definição 4.2.1: Função do 1° grau

Uma **função polinomial de grau 1** é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = ax + b, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \qquad a \neq 0.$$

O coeficiente a é chamado **coeficiente angular** (ou **taxa de variação**) e b é o **coeficiente linear** (ou **intercepto** em y).

Propriedades algébricas essenciais

a. **Constância da taxa de variação:** a é constante para quaisquer incrementos de x (com $\Delta x \neq 0$), i.e.,

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = a.$$

Esta propriedade é o que distingue uma função do primeiro grau.

b. **Domínio e imagem:** para $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$, tem-se

$$\mathrm{D}(f) = \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

c. **Monotonicidade:**

- se $a > 0$, então f é **crescente**;
- se $a < 0$, então f é **decrescente**.

d. **Raiz (zero) da função:** o valor de x_0 tal que $f(x) = 0$ é

$$ax + b = 0 \;\Rightarrow\; x_0 = -\frac{b}{a}.$$

e. **Sinal:** como o gráfico é uma reta, o sinal de $f(x)$ muda exatamente ao atravessar a raiz $x = -\frac{b}{a}$.

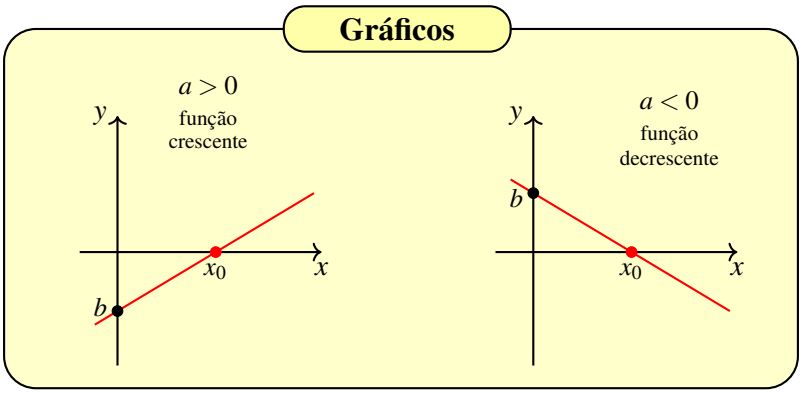
Gráfico

O gráfico de $f(x) = ax + b$ é uma **reta** no plano cartesiano. O número b indica o ponto onde a reta intercepta o eixo y (pois $f(0) = b$), e o número a determina a inclinação: a cada incremento unitário em x, a saída varia em a unidades.

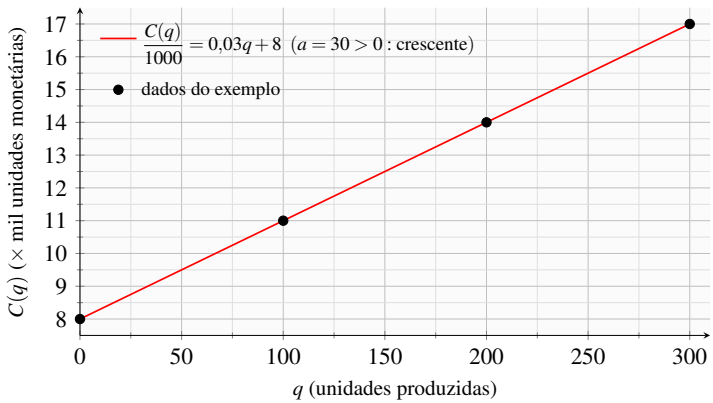
Em aplicações econômicas, é comum interpretar:

- b como um **nível autônomo** (por exemplo, custo fixo, demanda autônoma etc.);

- a como um **efeito marginal constante** (por exemplo, custo marginal constante, variação constante de receita, impacto marginal constante de uma variável explicativa).



Retomando o exemplo do custo de produção C em função da quantidade produzida q, tem-se o gráfico:



Vê-se que 8 é o coeficiente linear b, $0,03$ é o coeficiente angular a e que o custo C cresce a medida que o número de unidades produzidas q cresce.

A linha do gráfico dá uma noção de estimativa para valores de y correspondentes a valores de x que não estão na tabela, mas fazem parte do domínio $D = [0, 300]$. Observando o gráfico, para 50 unidades produzidas, isso enseja um custo de R$9500. Visivelmente, $x = 225$ unidades produzidas geram custos y em torno de 1450 a 1500. Nesse caso, para se obter um valor exato, basta aplicar 250 na equação, de onde obtém-se R1475.

Exercício resolvido 4.2.1

1. Adaptado de Fátima Sviercoski (2008). Uma estação de tratamento utiliza semanalmente dois tipos de aditivos químicos para neutralizar resíduos em seus tanques:

- aditivo biológico padrão, ao custo de **R$ 20,00 por litro**;
- aditivo químico concentrado, ao custo de **R$ 200,00 por litro**.

O orçamento disponível para a semana é de **R$,1.200,00**. Pergunta-se:

i Quais as possibilidades para a aplicação dos dois aditivos com esse orçamento?

ii Suponha agora que, para não saturar o tanque, a empresa só consiga aplicar no máximo 8 litros de aditivos semanalmente. Quais as quantidades dos dois produtos que a estação deve utilizar considerando essa restrição?

Resolução:

Situação i -— Restrição de custo

Sejam:

$$x = \text{volume do aditivo padrão (L)}, \qquad y = \text{volume do aditivo concentrado (L)}.$$

O modelo matemático associado ao custo é

$$20x + 200y = 1200.$$

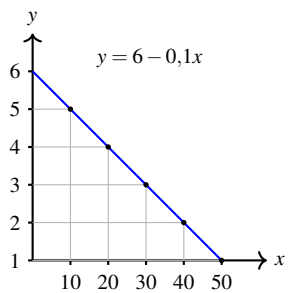
Diz-se que y é uma *função implícita* de x. Isolando y, obtém-se

$$y = 6 - 0{,}1x.$$

A partir da equação pode-se expressar a função como uma tabela de valores ou gráfico:

x	10	20	30	40	50
y	5	4	3	2	1

O gráfico representa todas as combinações de volumes que respeitam exatamente o orçamento disponível.



Situação ii —- Restrição de volume

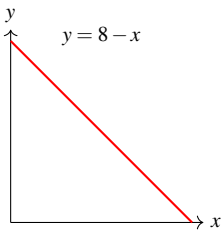
Agora, além do orçamento, a estação só consegue operar no máximo 8 litros de volume total, assim, o modelo que descreve essa restrição logística é

$$x + y = 8,$$

ou, explicitamente,

$$y = 8 - x.$$

Graficamente, isso é uma função de grau 1 decrescente:



Encontrar uma solução que satisfaça *simultaneamente* as exigências de custo e logística equivale a resolver o sistema:

$$\begin{cases} 20x + 200y = 1200, \\ x + y = 8. \end{cases}$$

Substituindo $y = 8 - x$ na primeira equação, obtém-se

$$20x + 200(8 - x) = 1200,$$

$$20x + 1600 - 200x = 1200,$$

$$-180x = -400,$$

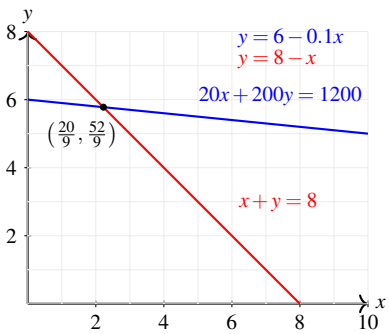
$$x \approx 2{,}22 \quad \text{e} \quad y \approx 5{,}78.$$

A solução indica que a estação deve misturar, aproximadamente,

$x \approx 2{,}22$ L de aditivo padrão e
$y \approx 5{,}78$ L de aditivo concentrado

para atender às restrições de custo e volume máximo do tanque.

Representação Gráfica



Interseção: $x \approx 2{,}22$, $y \approx 5{,}78$

2. Adaptado de Fátima Sviercoski (2008). O custo de produção de uma fazenda é composto por uma parcela fixa e outra variável. O custo fixo inclui manutenção de equipamentos e salários administrativos, enquanto o custo variável depende da quantidade de sacas de soja que se deseje produzir. Sabendo que o custo fixo é de R$12.500,00 e o custo variável é de R$85,00 por saca produzida, e considerando x o número de sacas de soja, determine a equação do custo total, esboce seu gráfico e explique como identificar graficamente o custo fixo e o custo variável.

Resolução:

A equação do custo total C em função do número de sacas x é dada por:

$$C(x) = 85x + 12500$$

O gráfico é uma reta com coeficiente angular 85 e intercepto 12500 no eixo das ordenadas (custo). Graficamente:

- O custo fixo corresponde ao valor de C quando $x = 0$, ou seja, $C(0) = 12500$, representado pelo ponto em que a reta corta o eixo vertical.
- O custo variável para uma quantidade x é dado por $85x$. No gráfico, essa parcela corresponde à distância vertical entre o ponto da reta do custo total e a linha horizontal $C = 12500$.

3. A relação entre a temperatura medida em graus Fahrenheit (F) e a medida em graus Celsius (C) é expressa por uma função linear. Sabe-se que, sob certas condições de pressão, uma temperatura de $10°C$ corresponde a $50°F$ e uma temperatura de $50°C$ corresponde a $122°F$. Determine a equação que define essa função e utilize-a para converter $30°C$ para F e $86°F$ para C.

Resolução: O problema diz que a relação entre as escalas é uma função linear, i.e., $F = aC + b$.

Pelos dados fornecidos: $(10,50) \implies 50 = a \cdot 10 + b$ e $(50,122) \implies 122 = a \cdot 50 + b$. Subtraindo a primeira equação da segunda, tem-se: $122 - 50 = a(50 - 10) \implies 72 = 40a \implies a = 1{,}8$. Substituindo a na primeira equação $50 = 1{,}8 \cdot 10 + b \implies 50 = 18 + b \implies b = 32$.

Assim, obtém-se:

$$F = 1{,}8C + 32$$

Para $C = 30$: $F = 1{,}8 \times 30 + 32 = 54 + 32 = \mathbf{86°F}$.

Para $F = 86$: $86 = 1{,}8C + 32 \implies 1{,}8C = 54 \implies C = \dfrac{54}{1{,}8} = \mathbf{30°C}$.

4. Adaptado de Fátima Sviercoski (2008). Considere dois tipos de solução química: a primeira contém em cada litro 16 g de cloreto de sódio e 20 g de açúcar, e a segunda contém 24 g de cloreto de sódio e 12 g de açúcar por litro. Quantos litros de cada solução devem ser misturados para obter uma mistura com 20 g de cloreto de sódio e 18 g de açúcar? Explique a solução geometricamente.

Resolução:

Sejam x a quantidade, em litros, da primeira solução e y a quantidade, em litros, da segunda solução. O sistema de equações lineares que modela o problema é:

$$\begin{cases} 16x + 24y = 20 & \text{(cloreto de sódio)} \\ 20x + 12y = 18 & \text{(açúcar)} \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por 2, obtém-se: $40x + 24y = 36$. Subtraindo a primeira equação dessa resultante, tem-se:

$$(40x+24y)-(16x+24y)=36-20\ 24x=16 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x=\frac{2}{3}}.$$

Substituindo o valor de x na primeira equação:

$$16\cdot\frac{2}{3}+24y=20 \Longrightarrow \frac{32}{3}+24y=20 \Longrightarrow 24y=20-\frac{32}{3}=\frac{60-32}{3}=\frac{28}{3} \Longrightarrow \boxed{y=\frac{28}{72}=\frac{7}{18}}.$$

Geometricamente, cada equação do sistema representa uma reta no plano xy. A solução do sistema corresponde ao ponto de interseção dessas duas retas, que determina a quantidade exata de cada solução necessária para atender às concentrações desejadas de cloreto de sódio e açúcar. Faça você o gráfico!

5. Em Estatística, a Distribuição Uniforme contínua modela situações onde todos os valores dentro de um intervalo são igualmente plausíveis. Considere uma variável aleatória contínua X com distribuição uniforme no intervalo $[a,b]$, denotada por $X \sim U(a,b)$.

(a) Escreva a função densidade de probabilidade $f(x)$ para $X \sim U(a,b)$.

(b) Suponha que o erro de arredondamento E de uma leitura seja modelado por $E \sim U(-0{,}5, 0{,}5)$. Calcule a probabilidade de o erro estar entre $-0{,}1$ e $0{,}1$.

Resolução:

(a) A densidade de probabilidade de uma distribuição uniforme contínua no intervalo $[a,b]$ é dada por uma função de grau 1 composta por duas sentenças, do seguinte modo:

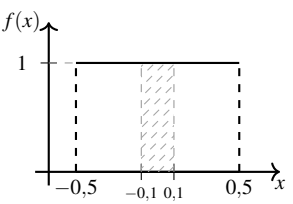
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

No intervalo $[a,b]$, a densidade é uma **função constante**.

(b) Para $E \sim U(-0{,}5, 0{,}5)$, tem-se $a=-0{,}5$, $b=0{,}5$, logo $b-a=1$. Portanto:

$$f(e)=\begin{cases}1, & -0{,}5\le e\le 0{,}5,\\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

A probabilidade desejada é a área do retângulo hachurado, fatia do todo:



$$\text{Área} = \text{base} \times \text{altura}$$

Base: $0{,}1-(-0{,}1)=0{,}2$
Altura: $f(e)=1$
Portanto: $\mathbb{P}(-0{,}1\le E\le 0{,}1)=0{,}2\times 1=0{,}2$.

A densidade constante traduz o princípio de **equiprobabilidade** no intervalo: intervalos de mesmo comprimento têm a mesma probabilidade.

Ao estudar Estatística (Distribuições de probabilidade contínua), tendo passado por Cálculo Integral (Teorema Fundamental do Cálculo), o leitor verá que esta mesma probabilidade é obtida através da integral:

$$\mathbb{P}(-0{,}1 \leq E \leq 0{,}1) = \int_{-0{,}1}^{0{,}1} 1\,de = \big[e\big]\Big|_{-0{,}1}^{0{,}1} = 0{,}1 - (-0{,}1) = 0{,}2.$$

A integral calcula exatamente a área sob a curva $f(e)$ entre os limites $-0{,}1$ e $0{,}1$, demonstrando uma ligação direta entre o estudo de funções de probabilidade e o Cálculo Integral.

6. Em Cinética Química, reações de ordem zero apresentam taxas de reação constantes, independentes da concentração dos reagentes na faixa considerada.

(a) Escreva a expressão para a taxa de reação $r(t)$ em uma reação de ordem zero.

(b) Dada uma reação de ordem zero com concentração inicial $[A]_0 = 0{,}50$ mol/L e constante de taxa $k = 0{,}020$ mol/(L·min), determine o tempo necessário para que a concentração do reagente A atinja 0,10 mol/L.

Resolução:

(a) Em uma reação de ordem zero, a taxa de reação é constante e pode ser descrita por:

$$r(t) = k, \qquad k > 0,$$

onde k é a constante de taxa e, $r(t)$ é uma **função constante** no intervalo de validade do modelo.

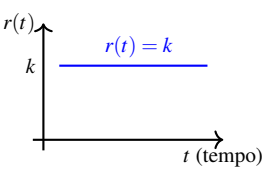
(b) Para uma reação de ordem zero, o modelo integrado que descreve a concentração do reagente A em função do tempo é:

$$[A](t) = [A]_0 - kt.$$

Substituindo os valores dados $[A]_0 = 0{,}50$ mol/L, $k = 0{,}020$ mol/(L·min) e $[A](t) = 0{,}10$ mol/L:

$$0{,}10 = 0{,}50 - 0{,}020t \longrightarrow 0{,}020t = 0{,}50 - 0{,}10 \longrightarrow t = \frac{0{,}40}{0{,}020} = 20 \text{ min}.$$

A interpretação é direta: como $r(t) = k$ é constante, o reagente é consumido a uma taxa fixa, produzindo uma queda linear de $[A](t)$ com o tempo. Este comportamento característico das reações de ordem zero é utilizado em diversas aplicações industriais e laboratoriais.



Exercício 4.2.1

1. Classifique cada função abaixo como crescente, decrescente ou constante e identifique seus coeficientes angular (a) e linear (b):

   a) $f(x) = -3x + 5$ b) $g(x) = \frac{x}{2} - 1$ c) $h(t) = 4$ d) $p(z) = 10 - z$

2. Determine a equação da reta que passa pelos pontos $A(-1, 3)$ e $B(2, -3)$. Em seguida, encontre a raiz da função associada.

3. Engenharia Elétrica / Lei de Ohm - A diferença de potencial V (em V – volts) em um resistor ôhmico é uma função linear da corrente elétrica i (em A – ampères), dada por $V(i) = R \cdot i$, onde R é a resistência (em Ω – ohms). Se um resistor de $100\,\Omega$ é submetido a uma corrente que varia de 0 a 5 A, esboce o gráfico de $V(i)$ e determine a tensão quando $i = 3,5$ A.

4. Termodinâmica / Dilatação Linear - O comprimento L de uma barra metálica varia linearmente com a temperatura T segundo a equação $L(T) = L_0(1 + \alpha\Delta T)$, onde L_0 é o comprimento inicial e α é o coeficiente de dilatação linear. Uma barra de aço tem $L_0 = 10,000$ m a 20°C e $\alpha = 11 \times 10^{-6}\,°\text{C}^{-1}$. Escreva a função $L(T)$ para $T \geq 20$ e determine o comprimento da barra a 120°C.

5. Uma função afim $f(x) = ax + b$ satisfaz as condições $f(1) = 5$ e $f(-2) = -4$. Determine os valores de a e b e calcule $f(10)$.

6. Cinemática / MRU – Monitoramento Viário - Um automóvel trafega por uma rodovia plana e reta com velocidade constante (movimento retilíneo uniforme). No instante $t = 0$ s, o sensor de monitoramento indica que o veículo está na posição 50 m da entrada de um túnel. Após 10 s de percurso, o veículo atinge a posição 250 m em relação ao mesmo referencial. Considere que a posição $S(t)$ em metros evolui linearmente com o tempo t em segundos.

   a) Determine a função horária da posição $S(t)$ deste automóvel.

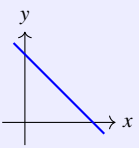
   b) Qual é a velocidade escalar do veículo? Interprete esse valor como a taxa de variação da posição em relação ao tempo.

7. Economia / Depreciação Linear - Uma máquina industrial foi comprada por R$ 500.000,00 e deprecia-se linearmente até atingir um valor de sucata de R$ 50.000,00 após 10 anos.

   a) Escreva a função $V(t)$ que expressa o valor da máquina em função do tempo t (em anos).

   b) Qual será o valor contábil da máquina após 6 anos de uso?

8. Analise o gráfico da função $f(x) = ax + b$ ao lado e determine os sinais dos coeficientes a e b, justificando sua resposta.



9. Conversão de Escalas - A escala Kelvin (K) relaciona-se com a escala Celsius (C) pela função linear $K(C) = C + 273,15$. Existe alguma temperatura em que o valor numérico em Kelvin seja o dobro do valor em Celsius? Se sim, determine-a.

10. Engenharia Civil / Lei de Hooke - Uma mola helicoidal tem comprimento natural de 20 cm. Quando submetida a uma força de tração F, ela se deforma linearmente segundo a Lei de Hooke $F = k \cdot \Delta x$, onde Δx é a deformação. Sabendo que uma força de 40 N estica a mola até 25 cm:

    a) Determine a constante elástica k da mola (em N/cm).

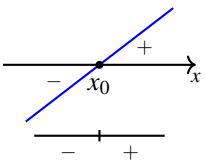
    b) Escreva a função que relaciona o comprimento total L da mola com a força aplicada F.

Estudo do sinal da função do 1° grau

A determinação do **sinal** de $f(x)$ é central para a resolução de inequações e para a interpretação de modelos lineares. Como o gráfico é uma reta, o sinal é constante em cada lado da raiz x_0.

Caso $a > 0$ (função crescente)

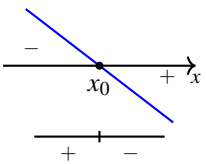
Para $a > 0$, a função é **crescente**. Logo, ao atravessar o zero x_0 da esquerda para a direita, os valores de $f(x)$ passam de negativos para positivos:



$$x < x_0 \Rightarrow f(x) < 0, \qquad x = x_0 \Rightarrow f(x) = 0, \qquad x > x_0 \Rightarrow f(x) > 0.$$

Caso $a < 0$ (função decrescente)

Para $a < 0$, a função é **decrescente**. Portanto, ao atravessar o zero x_0 da esquerda para a direita, os valores de $f(x)$ passam de positivos para negativos:



$$x < x_0 \Rightarrow f(x) > 0, \qquad x = x_0 \Rightarrow f(x) = 0, \qquad x > x_0 \Rightarrow f(x) < 0.$$

Observação

Em aplicações, é frequente definir a função auxiliar

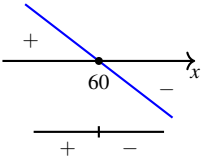
$$g(x) = f(x) - k,$$

e estudar o sinal de $g(x)$ para decidir quando $f(x)$ está acima/abaixo de um nível de referência k (limite técnico, meta, tolerância etc.).

Exemplo:

Estude do sinal, via zero, da $f(x) = -0,1x + 6$.

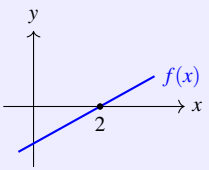
O zero é obtido por $-0{,}1x+6=0$, isto é, $x_0=60$. Como $a=-0{,}1<0$, conclui-se que:



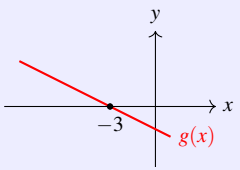
$$x<60 \Rightarrow f(x)>0, \qquad x=60 \Rightarrow f(x)=0, \qquad x>60 \Rightarrow f(x)<0.$$

Exercício 4.2.1

11. Determine o sinal das funções representadas graficamente abaixo. Para cada caso, escreva os intervalos onde $f(x)>0$ e onde $f(x)<0$.



(a)



(b)

12. Realize o estudo do sinal das seguintes funções reais, construindo uma grade de sinais para cada uma:

(A) $f(x)=3x-12$ (B) $g(x)=-2x+5$ (C) $h(t)=\dfrac{1}{2}t+4$

13. O estudo do sinal é fundamental para resolver inequações que envolvem produtos. Utilizando o estudo do sinal de cada fator separadamente, determine o conjunto solução da inequação:

$$(2x-6)\cdot(-x+4)\geq 0$$

Dica: Estude o sinal de $y_1=2x-6$ e $y_2=-x+4$, e depois faça o quadro de sinais.

14. Engenharia - Uma peça metálica é submetida a um processo de resfriamento. Sua temperatura T (em °C) varia com o tempo t (em minutos) segundo a função $T(t)=-4t+80$.

a) Determine o instante t em que a temperatura atinge 0°C.

b) Faça o estudo do sinal da função $T(t)$ e interprete o significado físico do intervalo onde $T(t)<0$, assumindo que o modelo matemático continua válido.

15. Considere a função linear $f(x)=(k-3)x+5$. Para quais valores da constante real k a função $f(x)$ é positiva para todo $x<0$ e negativa para todo $x>0$ (considerando que a raiz seja $x=0$ para simplificação ou focando apenas no comportamento da inclinação)?

(A) $k>3$ (B) $k<3$ (C) $k=3$ (D) $k\geq 0$ (E) $k<0$

Dica: Para $f(x)$ mudar de positivo (esquerda) para negativo (direita), ela deve ser estritamente decrescente.

Inequações do 1° grau

Definição 4.2.2: Inequação de grau 1

Uma **inequação do 1° grau** em x é uma sentença aberta do tipo

$$ax+b \ \gtrless \ 0,$$

em que $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$. O conjunto solução é o subconjunto de $\mathbb{R}$ formado por todos os valores de x que tornam a sentença verdadeira.

A resolução de inequações lineares pode ser sistematizada por transformação algébrica, com atenção ao seguinte princípio.

Regra de sinal ao multiplicar/dividir

Ao multiplicar (ou dividir) uma inequação por um número negativo, o sentido da desigualdade é invertido.

Procedimento padrão

Para resolver $ax+b \ \gtrless \ 0$:

i. isola-se ax no lado esquerdo: $ax \ \gtrless \ -b$;

ii. divide-se por a, invertendo o sinal se $a < 0$;

iii. expressa-se a solução em notação de intervalo e, quando útil, interpreta-se pelo estudo do sinal.

Exemplo:

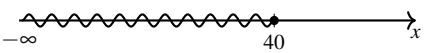
Determine os x tais que $-0{,}1x+6 \geq 2$.
Tem-se $-0{,}1x \geq -4$. Dividindo por $-0{,}1$ (número negativo), inverte-se o sinal, assim:

$$x \leq 40.$$

Logo o conjunto solução da inequação é:

$$\boxed{S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 40\} \quad \text{ou} \quad S =]-\infty, 40].}$$

Geometricamente:



Exercício 4.2.1

16. Determine o conjunto solução da inequação abaixo, atentando para a inversão do sinal da desigualdade quando necessário:
$$\frac{2x-5}{3} - \frac{x+1}{2} < \frac{3x-2}{4}$$
Apresente a resposta na notação de intervalo.

17. Erro / Tolerância - Em processos de controle de qualidade, é comum exigir que uma medida x esteja dentro de uma faixa de tolerância. Resolva a inequação simultânea a seguir e represente a solução geometricamente na reta real:
$$-3 \leq 2x-7 < 5$$

18. Engenharia Econômica Simples / Modelagem - Uma empresa de locação de equipamentos para engenharia oferece dois planos para uma máquina de terraplanagem:

    - **Plano A:** Taxa fixa de R$ 300,00 mais R$ 40,00 por hora de uso.
    - **Plano B:** Taxa fixa de R$ 100,00 mais R$ 60,00 por hora de uso.

    Determine o intervalo de horas de uso (h) para o qual o **Plano A** é economicamente mais vantajoso que o Plano B (ou seja, quando o custo de A é menor que o custo de B).

19. Considere a inequação $ax+b>0$, onde a e b são constantes reais e $a \neq 0$. Analise as afirmações abaixo e assinale a alternativa correta sobre o conjunto solução S:

    (A) Se $a>0$, então $S =]-\infty, -b/a]$.

    (B) Se $a<0$, então $S =]-b/a, +\infty[$.

    (C) Se $a>0$, então $S =]-b/a, +\infty[$.

    (D) Se $a<0$, o sentido da desigualdade se mantém ao isolar x.

    (E) O valor $-b/a$ nunca é o extremo do intervalo solução.

20. Física do Movimento / Logística e Monitoramento - Um veículo de resgate desloca-se em linha reta, tendo sua posição (em metros, com t em segundos) descrita por: $s(t) = 50 - 10t$ Determine para quais instantes $t \geq 0$ a distância do veículo até a base é **inferior a 20 metros**.

    Dica: A distância até a base é dada pelo módulo da posição, isto é, $|s(t)|$. Analise o intervalo em que $-20 < s(t) < 20$.

21. Aplicação em Processos Industriais / Limite de Segurança/Qualidade - Numa linha de produção, o tempo de residência t (minutos) de uma peça em um forno é modelado por $t = 0{,}8x + 2$,onde x é a velocidade da esteira (em m/min). Por especificação de qualidade, exige-se que o tempo de residência esteja entre 10 e 14 minutos, i. e., $10 \leq t \leq 14$.
    Determine o intervalo de valores de x que atende à especificação. Apresente a resposta como intervalo.

Inequações produto e inequações quociente

Definição 4.2.3

Sejam f e g funções reais.

Uma **inequação produto** é da forma

$$f(x)\cdot g(x) \gtrless 0,$$

e uma **inequação quociente** é da forma

$$\frac{f(x)}{g(x)} \gtrless 0, \qquad \text{com } g(x)\neq 0.$$

O método padrão para resolução é baseado em **análise de sinal por intervalos**.

Roteiro de solução para inequações produto

Para resolver $f(x)\,g(x) \gtrless 0$:

i. determinam-se os pontos críticos, i.e., as raízes de f e de g;

ii. ordenam-se esses pontos na reta real, particionando $\mathbb{R}$ em intervalos;

iii. determina-se o sinal de f e de g em cada intervalo (por inspeção ou por teste de ponto);

iv. combina-se o sinal para obter o sinal do produto e selecionam-se os intervalos que satisfazem a inequação.

Roteiro para solução para inequações quociente

Para resolver $\dfrac{f(x)}{g(x)} \gtrless 0$:

i. determinam-se os pontos críticos: raízes de f (onde o quociente zera) e raízes de g (onde o quociente não existe);

ii. faz-se a tabela de sinais por intervalos;

iii. selecionam-se os intervalos que satisfazem a desigualdade, respeitando obrigatoriamente $g(x)\neq 0$.

Exercício resolvido 4.2.1

7. Resolva $(x-2)(-x+5)\geq 0$.

Resolução:

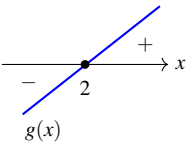
Define-se

$$g(x)=x-2, \qquad h(x)=-x+5.$$

Avaliação do sinal de $g(x)=x-2$:

O zero é $x=2$. Como g é crescente, tem-se $g(x)<0$ para $x<2$ e $g(x)>0$ para $x>2$.

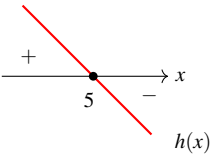
$$g(x) = x - 2 \Rightarrow \begin{cases} x < 2 \Rightarrow g(x) < 0, \\ x = 2 \Rightarrow g(x) = 0, \\ x > 2 \Rightarrow g(x) > 0. \end{cases}$$



Estudo do sinal de $h(x) = -x + 5$:

O zero é $x = 5$. Como h é decrescente, tem-se $h(x) > 0$ para $x < 5$ e $h(x) < 0$ para $x > 5$.

$$h(x) = -x + 5 \Rightarrow \begin{cases} x < 5 \Rightarrow h(x) > 0, \\ x = 5 \Rightarrow h(x) = 0, \\ x > 5 \Rightarrow h(x) < 0. \end{cases}$$



Grade de sinais para $g(x) \cdot h(x)$:

Os pontos críticos são $x = 2$ e $x = 5$. Analisa-se o sinal em cada intervalo: $(-\infty, 2)$, $(2, 5)$ e $(5, +\infty)$.

		2		5	
g	−		+		+
h	+		+		−
$g \cdot h$	−	0	+	0	−

Como se deseja $g(x) \cdot h(x) \geq 0$, selecionam-se os intervalos em que o produto é positivo e incluem-se os pontos em que o produto é zero.

O produto é não-negativo nos intervalos em que os fatores têm o mesmo sinal. Conclui-se:

$$x \in [2, 5].$$

Logo,

$$\boxed{S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5\} \quad \text{ou} \quad S = [2, 5]}.$$

8. Resolva $\dfrac{x-1}{x+2} < 0$.

Resolução:

Define-se

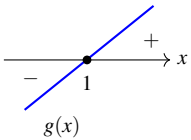
$$g(x) = x - 1, \qquad h(x) = x + 2, \qquad \frac{x-1}{x+2} = \frac{g(x)}{h(x)}.$$

Estudo do sinal de $g(x) = x - 1$:

O zero é $x = 1$. Como g é crescente

$$g(x) < 0 \text{ se } x < 1, \qquad g(x) = 0 \text{ se } x = 1 \qquad \text{e} \qquad g(x) > 0 \text{ se } x > 1.$$

$$g(x) = x - 1 \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \Rightarrow g(x) < 0, \\ x = 1 \Rightarrow g(x) = 0, \\ x > 1 \Rightarrow g(x) > 0. \end{cases}$$

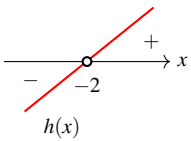


Estudo do sinal de $h(x) = x + 2$. Uma vez que $h(x)$ está no denominador, ela deve ser diferente de zero.

O zero é $x = -2$. Como h é crescente

$$h(x) < 0 \text{ se } x < -2, \qquad h(x) = 0 \text{ se } x = -2 \qquad \text{e} \qquad h(x) > 0 \text{ se } x > -2.$$

$$h(x) = x + 2 \Rightarrow \begin{cases} x < -2 \Rightarrow h(x) < 0, \\ x = -2 \Rightarrow h(x) = 0, \\ x > -2 \Rightarrow h(x) > 0. \end{cases}$$



Grade de sinais para $\dfrac{g(x)}{h(x)}$:

Pontos críticos:

$$x = -2 \text{ (não definido, pois } h(x) \neq 0), \qquad x = 1 \text{ (zera, pois } g(x) = 0).$$

Analisa-se o sinal em cada intervalo: $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$ e $(1, +\infty)$.

		-2		1	
g	$-$		$-$		$+$
h	$-$		$+$		$+$
g/h	$+$	$\exists$	$-$	0	$+$

Como se deseja $\dfrac{g(x)}{h(x)} < 0$, seleciona-se o intervalo em que numerador e denominador têm sinais opostos, excluindo-se obrigatoriamente $x = -2$ (ponto proibido) e também $x = 1$ (onde o quociente é 0). Assim,

$$\boxed{S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\} \quad \text{ou} \quad S =]-2, 1[}.$$

Exercício 4.2.1

22. Resolva as seguintes inequações produto, apresentando o conjunto solução na notação de intervalo:

    a) $(x-3)(2x+8) \geq 0$

    b) $(5-x)(3x-6) < 0$

    c) $x(x+4)(2-x) \leq 0$

    d) $(x^2-1)(x+2) > 0$

23. Determine o conjunto solução das inequações quociente abaixo. Atente-se à condição de existência do denominador:

    a) $\dfrac{2x-6}{x+1} \leq 0$

    b) $\dfrac{3-x}{2x+5} > 0$

    c) $\dfrac{x^2-9}{x} \geq 0$

    d) $\dfrac{1}{x-2} \leq \dfrac{1}{3}$

24. Engenharia de Produção / Lucro - O lucro mensal $L(x)$ de uma fábrica, em função da quantidade x de peças vendidas, é modelado por $L(x) = (x-20)(100-x)$. Determine o intervalo de vendas x para o qual a fábrica opera com lucro positivo ($L(x) > 0$). Interprete o significado das raízes no contexto do problema.

25. Física do Movimento / Agricultura de Precisão - Um drone de pulverização agrícola se move em linha reta e sua velocidade $v(t)$ em função do tempo $t \geq 0$ é dada por $v(t) = \dfrac{t^2-4t+3}{t+1}$. Determine os intervalos de tempo em que a velocidade é negativa (movimento retrógrado).

26. Análise de Sinais - Considere a função racional $f(x) = \dfrac{(x-1)^2(x+3)}{x-4}$.

    a) Estude o sinal de $f(x)$ construindo o quadro de sinais.

    b) Determine o conjunto solução da inequação $f(x) \leq 0$.

Aplicação da Função de 1° Grau a dados experimentais

Considera-se o uso de funções lineares como **modelo de primeira aproximação** para descrever a relação entre duas variáveis observáveis. A verificação inicial da adequação de um modelo linear pode ser feita pela inspeção de **taxas de variação** (diferenças sucessivas) e por análise gráfica, como foi feito na motivação sobre economia de produção e custo no início da seção.

Definição 4.2.4: Modelagem com equação do 1° grau

Um fenômenos é modelado ou explicado por uma função linear (ou do primeiro grau) se a primeira variação $\dfrac{\Delta x}{\Delta y}$ dos dados experimentais for uma constante não nula.

Exercício resolvido 4.2.1

9. Em Engenharia Mecânica, bombas centrífugas apresentam relações importantes entre variáveis operacionais. As **leis de afinidade** indicam que, mantendo-se o rotor e o fluido (regime semelhante), a **vazão volumétrica** Q varia aproximadamente de forma **diretamente proporcional** à rotação N, ou seja,

$$Q \propto N.$$

Um modelo linear do tipo $Q(N) = kN$ é uma primeira aproximação plausível em uma faixa de operação.[1]

Considere uma bomba centrífuga para a qual foram registrados os seguintes dados experimentais:

N (rpm)	1500	2000	2500	3000
Q (m^3/h)	45	60	75	90

Verifique se os dados confirmam a relação de proporcionalidade direta $Q \propto N$.

Resolução:

Para testar linearidade por diferenças sucessivas, calcula-se:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta N} = \frac{14{,}4 - 12{,}0}{1200 - 1000} = \frac{2{,}4}{200} = 0{,}012,$$

e do mesmo modo para os demais intervalos (obtendo-se novamente 0,012). Isso sugere fortemente o modelo

$$Q(N) = 0{,}012 \cdot N.$$

Em seguida, a validação pode ser complementada por gráfico e por ajuste de mínimos quadrados (quando houver ruído experimental).

10. Considere o modelo $Q(N) = 0{,}012 \cdot N$ do item anterior e suponha que, por requisito de projeto, a bomba deva operar com vazão entre 17 e 22 m^3/h. Determinar os valores de N que atendem ao requisito.

Resolução:

Define-se a função auxiliar

$$g(N) = Q(N) - 17 = 0{,}012N - 17.$$

O requisito inferior $Q(N) \geq 17$ equivale a $g(N) \geq 0$. O zero de g é

$$0{,}012N - 17 = 0 \Rightarrow N = \frac{17}{0{,}012} \approx 1416{,}67.$$

Como $0{,}012 > 0$, conclui-se (pelo estudo do sinal) que $g(N) \geq 0$ quando $N \geq 1416{,}67$.

[1] Relação amplamente reportada em textos técnicos e materiais de fabricantes sobre *affinity laws* de bombas centrífugas.

Analogamente, o requisito superior $Q(N) \leq 22$ equivale a

$$0{,}012N - 22 \leq 0 \Rightarrow N \leq \frac{22}{0{,}012} \approx 1833{,}33.$$

Portanto, os valores de rotação que satisfazem simultaneamente as duas restrições são:

$$1416{,}67 \leq N \leq 1833{,}33.$$

Observa-se ainda que o requisito pode ser escrito como uma **inequação produto**:

$$(Q(N) - 17) \cdot (Q(N) - 22) \leq 0,$$

pois uma função linear está entre dois níveis exatamente quando o produto dos desvios em relação a esses níveis é não-positivo.

Exercício 4.2.1

27. Lei de Charles e Gay-Lussac / Termodinâmica - Em um experimento clássico para determinar o zero absoluto, mede-se o volume de uma massa fixa de gás ideal sob pressão constante em diferentes temperaturas. Considere os seguintes dados experimentais obtidos em laboratório para o volume V (em mL) em função da temperatura T (em °C):

T (°C)	0	25	50	100
V (mL)	100,0	109,2	118,3	136,6

Dados simulados com base no coeficiente de expansão térmica dos gases ideais $\alpha \approx 1/273$.

a) Verifique se a variação do volume em relação à temperatura ($\Delta V/\Delta T$) é aproximadamente constante.

b) Determine a função linear $V(T) = aT + b$ que modela o experimento.

c) Extrapole o modelo para encontrar a temperatura teórica na qual o volume do gás seria zero (o zero absoluto).

28. Lei de Hooke / Engenharia de Materiais - Em um ensaio de tração de uma mola helicoidal de aço, foram registradas as forças aplicadas F (em Newtons) e os respectivos comprimentos totais L (em cm) da mola:

F (N)	0	2	4	6	8
L (cm)	15,0	15,8	16,6	17,4	18,2

a) Mostre que o comportamento da mola é linear nessa faixa de operação.
Determine a constante elástica da mola k (em N/cm) e o comprimento natural L_0.

b) Escreva a equação $L(F)$ e determine qual força causaria uma deformação total de 5 cm (ou seja, $L = 20$ cm).

29. Cinética Enzimática / Gráfico de Lineweaver-Burk - Em bioquímica, a equação de Michaelis-Menten descreve a velocidade de reações enzimáticas. Para determinar parâmetros cinéticos, essa equação é frequentemente linearizada (duplo recíproco). Considere os dados inversos de velocidade $1/V$ e concentração de substrato $1/[S]$:

$x = 1/[S]$ (10^4 M^{-1})	2,0	4,0	8,0
$y = 1/V$ (min/μM)	0,25	0,35	0,55

Linearização padrão da equação $1/V = (K_m/V_{\max}) \cdot (1/[S]) + 1/V_{\max}$.

a) Determine a equação da reta $y = ax + b$ que se ajusta a esses dados.

b) Sabendo que o intercepto y (b) equivale a $1/V_{\max}$, calcule a velocidade máxima da reação $V_{\max}$.

30. Resistividade Elétrica e Temperatura - A resistência elétrica de metais puros aumenta linearmente com a temperatura em faixas moderadas. Um fio de cobre apresenta os seguintes valores de resistência R (em Ohms) em função da temperatura T (em °C):

T (°C)	20	40	60
R (Ω)	50,00	53,93	57,86

Dados baseados no coeficiente de temperatura do cobre $\alpha \approx 0{,}00393$ °C^{-1} a 20°C.

Determine o coeficiente angular da reta $R(T)$ e interprete seu significado físico (sensibilidade térmica da resistência).

31. Pressão Hidrostática / Oceanografia - Um mergulhador registra a pressão absoluta P (em atm) em função da profundidade h (em metros) durante uma descida:

h (m)	0	10	20	30
P (atm)	1,0	2,0	3,0	4,0

a) Obtenha a função $P(h)$.

b) O mergulhador possui um relógio resistente até 15 atm. Usando o modelo linear, determine a profundidade máxima teórica que o equipamento suporta.

4.2.2 Função polinomial de grau 2

Motivação

A equação do segundo grau – também chamada de equação quadrática – ocupa lugar central na matemática elementar e em inúmeras aplicações científicas e de engenharia. Do ponto de vista geométrico, as soluções de uma equação quadrática estão diretamente relacionadas à interseção de uma parábola com o eixo das abscissas; do ponto de vista físico, muitas situações de movimento sob aceleração constante (por exemplo, a trajetória de um projétil) são descritas por funções quadráticas, o que torna o estudo dessa classe de funções imprescindível para a modelagem e interpretação de fenômenos reais.

Uma motivação clássica e intuitiva é a "trajetória de uma bola": desprezando-se a resistência do ar, o movimento de um projétil lançado com velocidade inicial v_0 e ângulo θ ao plano horizontal tem coordenadas

$$x(t) = v_0 \cos\theta\, t, \qquad y(t) = v_0 \sin\theta\, t - \tfrac{1}{2} g t^2,$$

onde g é a aceleração da gravidade. Eliminando o tempo t entre essas duas expressões obtém-se uma relação da forma

$$y(x) = Ax^2 + Bx + C,$$

i.e., uma função quadrática cuja curva é uma parábola — daí a ligação direta entre equações do segundo grau e trajetórias balísticas, arcos de lançamento e problemas de otimização (alcance máximo, altura máxima, etc.).

Historicamente, a compreensão das funções quadráticas está intimamente ligada à história da Geometria Analítica, fundamentada principalmente por **René Descartes** (1596–1.650) e **Pierre de Fermat** (1601–1.665) no século XVII. No entanto, métodos para resolver equações que hoje chamamos quadráticas aparecem já nas tabelas matemáticas babilônicas (mesopotâmia, c. 1800–1600 a.C.), em problemas práticos que hoje reconhecemos como equações quadráticas, frequentemente relacionadas a questões de dimensionamento de terras e construção de estruturas. Textos matemáticos do mundo islâmico e da Índia medieval desenvolveram técnicas algébricas para tratar desses problemas; entre os nomes destacados está Bháskara II (século XII), que descreveu fórmulas e métodos de resolução em termos bem próximos aos que usamos hoje — por isso, no Brasil, muitas vezes a fórmula pela qual se resolve a equação quadrática é referida popularmente como "fórmula de Bháskara". Mais tarde, no Renascimento europeu, François Viète (1.540–1.603) contribuiu para o uso sistemático de símbolos e para a estruturação da álgebra em formas que facilitaram a formulação geral das equações e o estudo de suas propriedades, dando origem à notação e a estrutura algébrica moderna da equação.

Na presente seção será explorada a equação do segundo grau em profundidade: inicia-se por uma definição formal e da expressão padrão

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0.$$

Também será estudado as raízes (ou zeros) e sua dependência pelo discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, o qual será analisado graficamente em seus três casos possíveis (duas raízes reais distintas, uma raiz real dupla, e raízes complexas não reais) e suas implicações para o sinal da função quadrática. Será abordado ainda o vértice da parábola, técnicas práticas para construir o gráfico a partir de coeficientes, e a resolução de inequações quadráticas — incluindo métodos por estudo de sinal, fatoração e análise de quocientes – mostrando sempre a interpretação geométrica correspondente. E o mais importante, aplicações.

Função do segundo grau

Definição 4.2.5: Função do 2° grau

Uma **equação do segundo grau** (ou **equação quadrática**) é toda **sentença algébrica** definida de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ escrita na forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

em que a, b e c são números reais, denominados coeficientes, com a obrigatoriedade de $a \neq 0$.

Perceba que...

A exigência $a \neq 0$ garante que o termo x^2 realmente apareça na equação; caso contrário, a expressão se reduziria a uma equação de primeiro grau.

Exercício resolvido 4.2.2

1. Identifique corretamente os coeficientes a, b e c de cada equação do segundo grau.

a) $3x^2 - 5x + 1 = 0$
Resolução: $a = 3,\ b = -5,\ c = 1.$

b) $-2x^2 + \frac{7}{3}x - 4 = 0$
Resolução: $a = -2,\ b = \frac{7}{3},\ c = -4.$

c) $-4x^2 + 16 = 0$
Resolução: $a = -4,\ b = 0,\ c = 16.$

d) $\frac{5}{2}x^2 - x = 0$
Resolução: $a = \frac{5}{2},\ b = -1,\ c = 0.$

e) $-\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2} = 0$
Resolução: $a = -\frac{3}{4},\ b = 0,\ c = \frac{1}{2}.$

f) $9x^2 + 4x = 0$
Resolução: $a = 9,\ b = 4,\ c = 0.$

Raízes e Fórmula de Bháskara

Aqui será tratado daquilo que, de tão clássico, virou quase um símbolo do ensino de Matemática: as *raízes* da equação do segundo grau e a famosa *fórmula de Bháskara*, como ficou conhecida no Brasil. Mas, apesar de ser um velho conhecido das aulas de escola, aqui segue-se um caminho mais cuidadoso e um pouco mais sofisticado – como convém a um livro destinado ao ensino superior.

O problema das raízes

Dada a equação

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0,$$

deve-se determinar os valores de x que tornam a sentença verdadeira. Tais valores são chamados de **raízes** (ou **zeros**) do polinômio quadrático.

Demonstração didática da Fórmula de Bháskara

A ideia aqui é *isolar* a variável x para "desembrulhar" a equação até que ela mostre sua estrutura interna.

Dividindo toda a equação por a, é possível trabalhar com coeficiente líder 1:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Agora, reorganiza-se o termo linear de modo a "separar" a variável x:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

A ideia-chave da demonstração é a seguinte: *se for possível transformar o lado esquerdo em um quadrado perfeito, então será possível extrair uma raiz quadrada dos dois lados*. Em vez de simplesmente completar o quadrado imediatamente, será "forçado" a equação a assumir a forma desejada.

Observa-se que qualquer expressão da forma $(x+\lambda)^2$ se expande para:

$$(x+\lambda)^2 = x^2 + 2\lambda x + \lambda^2.$$

Comparando com $x^2 + \frac{b}{a}x$, precisa-se de:

$$2\lambda = \frac{b}{a} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{b}{2a}.$$

Logo,

$$x^2 + \frac{b}{a}x = x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Substituindo esse resultado na equação anterior:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a}.$$

Agora isola-se o quadrado perfeito:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Aplicando raiz quadrada dos dois lados,

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Por fim, isola-se x:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou, reunindo tudo no mesmo denominador:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Chama-se

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

de **discriminante** ou **Delta** — letra grega, pois é ele que "decide" quantas e quais raízes existirão.

Classificação das raízes segundo o sinal do discriminante

A expressão

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

revela imediatamente os três cenários possíveis:

- **Caso 1:** $\Delta > 0$ **(duas raízes reais e distintas)**
  A raiz quadrada é positiva, logo:

  $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

  Isso significa que o gráfico da função corta o eixo x em dois pontos distintos.

- **Caso 2:** $\Delta = 0$ **(uma raiz real dupla)**
  Aqui $\sqrt{\Delta} = 0$, então:

  $$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}.$$

  Isso significa que o gráfico da função toca o eixo x exatamente no seu vértice.

- **Caso 3:** $\Delta < 0$ **(nenhuma raiz real)**
  A raiz quadrada não é real e, portanto, a equação não possui soluções em $\mathbb{R}$. Isso significa que o gráfico da função não corta o eixo x.

  Soluções existem, porém em $\mathbb{C}$, e assumem a forma:

  $$x = \frac{-b}{2a} \pm i\,\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Estes três casos, dizem que toda a teoria das raízes de uma equação quadrática gira em torno do discriminante Δ, que é o verdadeiro "oráculo" da equação: ele diz se há raízes, quantas são e qual o formato delas.

Gráfico da Função Quadrática

A função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0,$$

possui como gráfico uma **parábola**, cuja forma e posição no plano cartesiano dependem exclusivamente dos coeficientes a, b e c, e, em especial, do discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

O estudo gráfico consiste em determinar:

- a concavidade da parábola ($a > 0$ ou $a < 0$);
- o número de pontos de interseção com o eixo x, dados pelas raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$;
- a posição do vértice;
- o ponto de interseção com o eixo y, correspondente a $f(0) = c$.

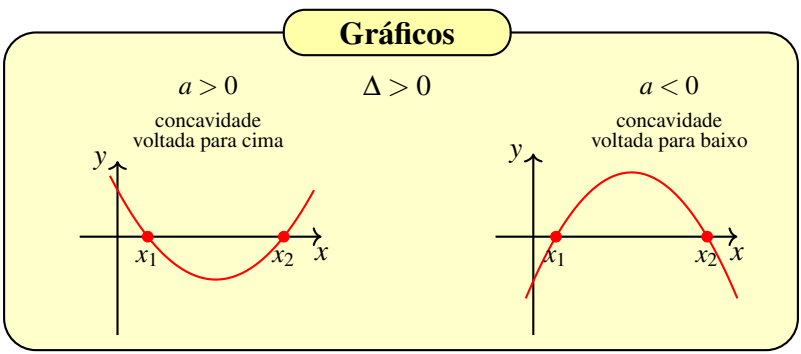
As três possibilidades para o discriminante apresentam comportamentos qualitativamente diferentes, tratados separadamente a seguir.

Caso 1: $\Delta > 0$ – Duas raízes reais e distintas

Quando $\Delta > 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui duas soluções reais distintas:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

A parábola intercepta o eixo x em dois pontos.

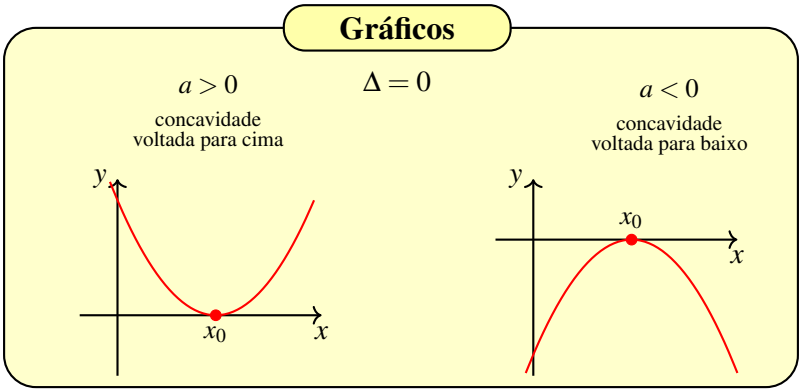


Caso 2: $\Delta = 0$ – Raiz real dupla

Há uma raiz real dupla:

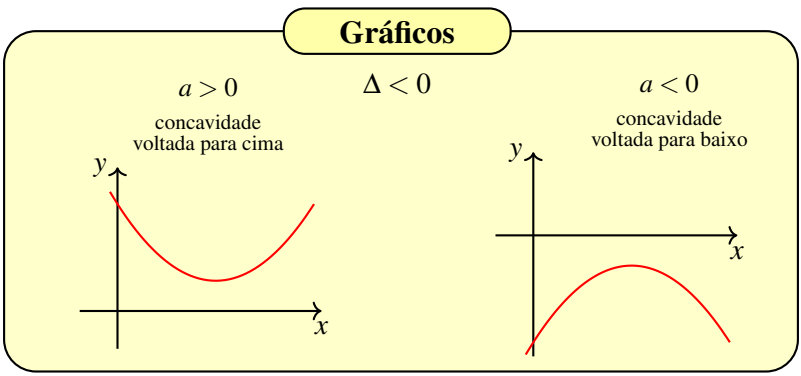
$$x_0 = -\frac{b}{2a},$$

que corresponde ao ponto em que a parábola apenas *tangencia* o eixo x. Esse ponto é exatamente a abscissa do vértice.



Caso 3: $\Delta < 0$ – Nenhuma raiz real

Nesse caso, a parábola não possui interseções com o eixo x. A análise apenas determina se a parábola está completamente acima ou completamente abaixo do eixo, dependendo do sinal de a.



Exercício resolvido 4.2.2

2. Para cada função, determine suas raízes (zeros), o ponto de interseção com o eixo y e esboce o gráfico, indicando esses pontos.

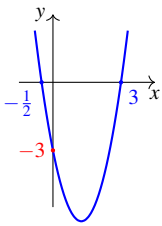
a) $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$ (Raízes: fracionária negativa e natural positiva; $a > 0$)

Resolução:

- **Raízes:** $\Delta = (-5)^2 - 4(2)(-3) = 25 + 24 = 49$.

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{12}{4} = \boxed{3}, \quad x_2 = \frac{-2}{4} = \boxed{-\frac{1}{2}}.$$

- **Interseção com y:** $f(0) = c = -3$.
- **Esboço:**



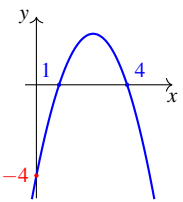
b) $f(x) = -x^2 + 5x - 4$ (Duas raízes positivas; $a < 0$)

Resolução:

- **Raízes:** $\Delta = 5^2 - 4(-1)(-4) = 25 - 16 = 9$.

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{-2} = \frac{-5 \pm 3}{-2} \Rightarrow x_1 = \frac{-2}{-2} = \boxed{1}, \quad x_2 = \frac{-8}{-2} = \boxed{4}.$$

- **Interseção com y:** $f(0) = c = -4$.
- **Esboço:**



c) $f(x) = x^2 - \sqrt{2}x - \frac{3}{2}$ (Raízes em função de $\sqrt{2}$; $a > 0$)

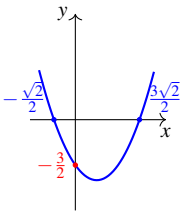
Resolução:

- **Raízes:** $\Delta = (-\sqrt{2})^2 - 4(1)(-\frac{3}{2}) = 2 + 6 = 8$.

$$x = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_1 = \boxed{\frac{3\sqrt{2}}{2}}, \quad x_2 = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

- **Interseção com y:** $f(0) = c = -1.5$.

- **Esboço:**



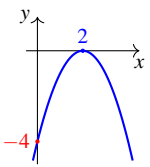
d) $f(x) = -x^2 + 4x - 4$ (Raiz dupla; $a < 0$)

Resolução:

- **Raízes:** $\Delta = 4^2 - 4(-1)(-4) = 16 - 16 = 0$.

$$x = \frac{-4 \pm 0}{-2} = \boxed{2}.$$

- **Interseção com y:** $f(0) = c = -4$.
- **Esboço:**



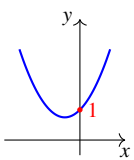
e) $f(x) = x^2 + x + 1$ (Raízes complexas)

Resolução:

- **Raízes Reais:** $\Delta = 1^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$. Não há raízes reais. O gráfico não intercepta o eixo x.
- **Raízes Complexas:** A "fuga" para os números complexos permite encontrar soluções:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3 \cdot (-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3 \cdot i^2}}{2} = \boxed{\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}}.$$

- **Interseção com y:** $f(0) = c = 1$.
- **Esboço:**



3. Para a equação $x^2 - 4x + k = 0$, determine os valores de k para que a equação tenha:

a) duas raízes reais e distintas;

b) duas raízes reais e iguais (raiz dupla);

c) nenhuma raiz real.

Resolução: O discriminante é $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(k) = 16 - 4k$.

a) Duas raízes distintas $\Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow 16 - 4k > 0 \Rightarrow 16 > 4k \Rightarrow \boxed{k < 4}$.

b) Raiz dupla $\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow 16 - 4k = 0 \Rightarrow \boxed{k = 4}$.

c) Nenhuma raiz real $\Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow 16 - 4k < 0 \Rightarrow 16 < 4k \Rightarrow \boxed{k > 4}$.

4. Para a função $f(x) = (k-3)x^2 + 2x - 1$, determine os valores de k para que a parábola tenha:

a) concavidade voltada para cima; b) concavidade voltada para baixo.

Resolução: A concavidade é definida pelo coeficiente $a = k - 3$. Para ser uma função quadrática, $a \neq 0$, ou seja, $k \neq 3$.

a) Concavidade para cima $\Rightarrow a > 0 \Rightarrow k - 3 > 0 \Rightarrow \boxed{k > 3}$.

b) Concavidade para baixo $\Rightarrow a < 0 \Rightarrow k - 3 < 0 \Rightarrow \boxed{k < 3}$.

5. Determine uma equação do segundo grau com coeficientes inteiros que possua as seguintes raízes:

a) $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$.

Resolução:

Pela forma fatorada: $a(x-0)(x-3) = 0$. Com $a = 1$, temos $x(x-3) = x^2 - 3x = 0$.

b) $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ e $x_2 = 1 - \sqrt{2}$.

Resolução:

Usando soma e produto: $S = (1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2}) = 2$. $P = (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = 1^2 - (\sqrt{2})^2 = 1 - 2 = -1$. A equação é $x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$.

c) $x_1 = \sqrt{5}$ e $x_2 = 2\sqrt{5}$.

Resolução:

$S = \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$. $P = (\sqrt{5})(2\sqrt{5}) = 2 \cdot 5 = 10$. A equação é $x^2 - (3\sqrt{5})x + 10 = 0$.

6. (Funec-MG) Qual é o valor de m na equação $x^2 - (m+5)x + m + 1 = 0$, para que as raízes sejam simétricas?

Resolução: Raízes simétricas (ou opostas) significam que sua soma é zero ($x_1 + x_2 = 0$). Na equação quadrática, a soma das raízes é dada por $-b/a$.

$$S = -\frac{-(m+5)}{1} = m + 5.$$

Como $S = 0$, tem-se que $m + 5 = 0 \Rightarrow \boxed{m = -5}$.

7. (UFMA) Determine os valores de x e y sabendo-se que $x, y \in \mathbb{N} - \{1\}$ e satisfazem à equação $x^2y^2 - 4xy = 12$.

Resolução: Esta é uma equação quadrática "disfarçada". Seja $z = xy$. A equação se torna:

$$z^2 - 4z - 12 = 0.$$

Resolvendo para z: $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(-12) = 16 + 48 = 64$.

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2} \Longrightarrow \boxed{z_1 = 6 \quad \text{e} \quad z_2 = -2}.$$

Como x, y são números naturais, seu produto xy deve ser positivo. Logo, $z = xy = 6$. Os pares de números naturais (x, y) maiores que 1 cujo produto é 6 são $(2, 3)$ e $(3, 2)$.

8. (Ucsal-BA) Um professor dispunha de 144 doces para dividir igualmente entre os alunos de sua classe. Como no dia da distribuição faltaram 12 alunos, ele dividiu os 144 doces igualmente entre os presentes, cabendo a cada aluno um doce a mais. Quantos alunos estavam presentes no dia da distribuição? **Resolução:** Seja n o número total de alunos da classe e p o número de alunos presentes.

Resolução:

Temos $p = n - 12$. A quantidade de doces por aluno no plano original seria $144/n$. A quantidade de doces por aluno no dia foi $144/p = 144/(n-12)$. A condição do problema é:

$$\frac{144}{n-12} = \frac{144}{n} + 1.$$

Multiplicando tudo por $n(n-12)$ para eliminar os denominadores:

$$144n = 144(n-12) + n(n-12)$$

$$144n = 144n - 1728 + n^2 - 12n$$

$$0 = n^2 - 12n - 1728.$$

Resolvendo por Bháskara: $\Delta = (-12)^2 - 4(1)(-1728) = 144 + 6912 = 7056$. $\sqrt{7056} = 84$.

$$n = \frac{12 \pm 84}{2}.$$

Como n deve ser positivo, $n = \frac{12+84}{2} = \frac{96}{2} = 48$. O número total de alunos era 48. A questão pede o número de alunos **presentes**:

$$p = n - 12 = 48 - 12 = 36.$$

Estavam presentes 36 alunos.

Exercício 4.2.2

1. Resolva as equações abaixo, praticando a manipulação de diferentes tipos de coeficientes e raízes.

   a) $x^2 - 2x - 2 = 0$ (Raízes irracionais)
   b) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ (Quadrado perfeito)
   c) $x^2 - \sqrt{5}x - 10 = 0$ (Coeficiente irracional)
   d) $3x(x-2) = -4$ (Sem raízes reais)

2. Engenharia de materiais / Aquecimento de material - A estabilidade de uma liga metálica em função da temperatura x é modelada por $f(x) = kx^2 + 4x + 1$. Para ser considerada estável, a função não pode ter valores negativos. Determine o valor de k para o qual a função possui apenas um ponto de contato com o eixo x (tangência), representando o limiar da estabilidade.

3. Um sistema de controle possui um comportamento oscilatório cujos pontos de equilíbrio são as raízes de uma equação quadrática. Se esses pontos são $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ e $x_2 = 2 - \sqrt{3}$, determine a equação do segundo grau (com coeficientes inteiros) que descreve o sistema.

4. Dada a função $f(x) = -x^2 + 2x + 8$, determine:

   a) A concavidade da parábola.
   b) Os zeros (raízes) da função.
   c) O ponto de interseção com o eixo y.

5. Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, qual das seguintes condições garante **necessariamente** a existência de duas raízes reais e distintas?

   (A) $b > 0$ e $c > 0$.
   (B) a e c possuem sinais opostos.
   (C) $b = 0$.
   (D) $c < 0$.
   (E) a, b, c são todos positivos.

6. Em um problema de vibrações mecânicas, surge a equação $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. Encontre todas as quatro soluções reais para x, utilizando uma substituição de variável para transformá-la em uma equação quadrática.

7. Deseja-se projetar um campo retangular para testes agronômicos com uma área de 24 m^2. O comprimento do campo deve ser 5 metros maior que a sua largura. Determine as dimensões (comprimento e largura) do campo.

8. Na equação $2x^2 - (k+1)x + 5 = 0$, sabe-se que a soma das raízes é igual a 3. Determine o valor do parâmetro k.

9. Assinale a afirmação correta a respeito da função $f(x) = ax^2 + bx + c$:

   (A) A "fórmula de Bháskara" é o nome universalmente adotado para a solução da equação quadrática.
   (B) Se $a = 0$, a função ainda representa uma parábola, porém degenerada.
   (C) O discriminante Δ determina a concavidade da parábola.

(D) O coeficiente c representa o valor da função quando $x = 0$, ou seja, a ordenada do ponto onde o gráfico intercepta o eixo y.

(E) Viète foi um matemático babilônico que primeiro resolveu problemas quadráticos.

10. Física / Lançamento de projétil - A altura h (em metros) de um sinalizador de emergência lançado de um penhasco, em função do tempo t (em segundos), é dada por $h(t) = -5t^2 + 40t + 45$.

a) De qual altura inicial o sinalizador foi lançado?

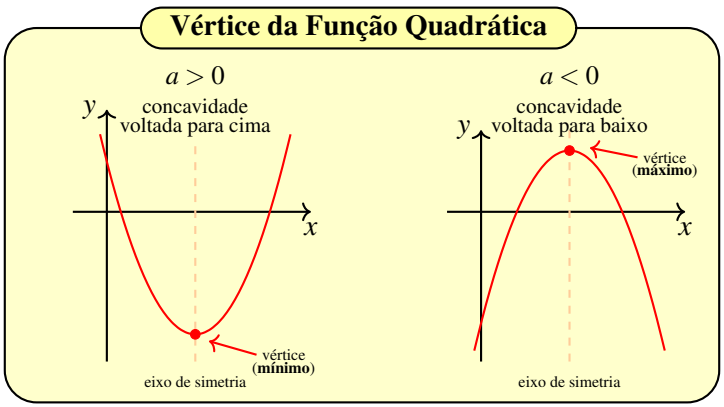
b) Após quantos segundos o sinalizador atinge o solo (nível do mar, $h = 0$)?

Vértice da Função Quadrática e Interpretação de Máximo e Mínimo

Considere a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0.$$

O gráfico dessa função é uma parábola, cuja concavidade depende do sinal de a. Um elemento fundamental desse gráfico é o *vértice*, ponto que determina o valor extremo da função.



O vértice da parábola será:

- **ponto de mínimo** se ela tiver a concavidade voltada para cima ($a > 0$);
- **ponto de máximo** se ela tiver a concavidade voltada para baixo ($a < 0$);

A reta que passa pelo vértice e é paralela ao eixo Oy chama-se **eixo de simetria**.

Determinação analítica do vértice

A determinação do vértice pode ser realizada sem recorrer a ferramentas mais avançadas, bastando observar a própria expressão da função. A ideia central é completar o quadrado para reescrever $f(x)$ de modo que a "parte

variável" apareça em forma de quadrado perfeito.

Inicia-se fatorando o coeficiente a dos dois primeiros termos:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c.$$

O próximo passo consiste em transformar a expressão dentro dos parênteses em um quadrado perfeito. Para isso, adiciona-se e subtrai-se o termo necessário:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Substituindo essa igualdade na função:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c.$$

Distribuindo a:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c.$$

Como

$$a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a},$$

obtém-se:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

Finalmente, substituindo $c = \frac{4ac}{4a}$, observa-se que:

$$-\frac{b^2}{4a} + c = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Portanto, a função fica na forma canônica:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

O vértice pode ser lido diretamente dessa forma: ele ocorre quando a expressão quadrática assume o valor mínimo (ou máximo) possível, isto é, quando $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, logo:

$$x_V = -\frac{b}{2a}, \qquad y_V = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Assim, as coordenadas do vértice são dadas por:

$$\boxed{V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)}.$$

Perceba que...

O único termo que faz $f(x)$ variar é $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$. Quando ele se anula, sobra apenas a parte constante da expressão, o que fornece o valor mínimo (se $a>0$) ou máximo (se $a<0$) da função. É justamente esse fato que determina as coordenadas do vértice.

Vértice como ferramenta para expressar o conjunto imagem

A forma canônica

$$f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

mostra que o termo variável é sempre um quadrado, portanto é sempre não negativo:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0.$$

Com isso, o menor (ou maior) valor que a função pode assumir depende do sinal de a:

- Se $a>0$, a parábola possui concavidade voltada para cima. O valor mínimo de $f(x)$ ocorre quando o quadrado é zero, produzindo

  $$f_{\min} = -\frac{\Delta}{4a}.$$

  Assim, o conjunto imagem é

  $$\mathrm{Im}(f) = [-\tfrac{\Delta}{4a}, \infty).$$

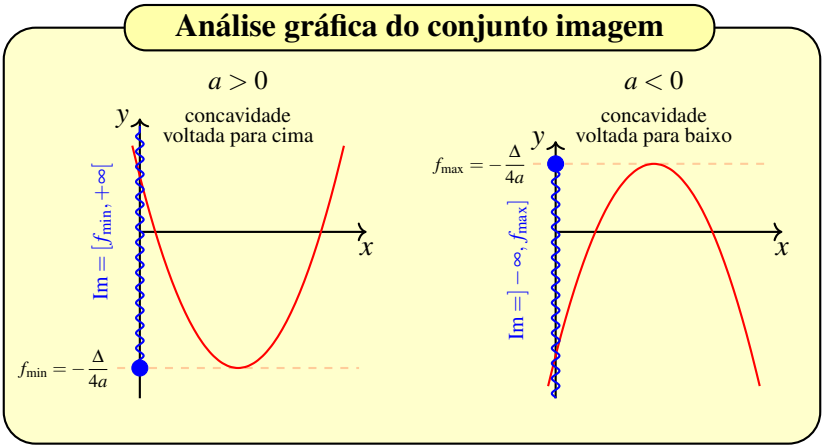
- Se $a<0$, a parábola possui concavidade voltada para baixo. O valor máximo ocorre novamente quando o quadrado é zero, fornecendo

  $$f_{\max} = -\frac{\Delta}{4a}.$$

  Nesse caso,

  $$\mathrm{Im}(f) = (-\infty, -\tfrac{\Delta}{4a}].$$

Dessa forma, o vértice descreve não apenas o ponto extremo da função, mas também o limite inferior ou superior do conjunto imagem, dependendo da concavidade. Graficamente:



Relação entre vértice, sinal do discriminante e conjunto imagem

A expressão

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

permite compreender a posição vertical do vértice com base no discriminante:

- Se $\Delta > 0$, o vértice localiza-se entre as duas raízes reais da parábola.
- Se $\Delta = 0$, o vértice coincide com o ponto de tangência ao eixo x, correspondendo à raiz dupla.
- Se $\Delta < 0$, o vértice encontra-se acima do eixo x quando $a > 0$ e abaixo quando $a < 0$, explicando por que não há interseção com o eixo.

Perceba que...

O vértice sintetiza o comportamento essencial da função quadrática, pois, além de identificar o ponto de máximo ou mínimo da função, ele determina os limites do conjunto imagem e reflete a influência conjunta do coeficiente a e do discriminante Δ sobre o gráfico da parábola.

Exercício resolvido 4.2.2

9. Para a função $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$, determine as coordenadas do vértice e o conjunto imagem.

Resolução: Identificam-se os coeficientes: $a = 2, b = -4, c = 5$.

- **Coordenada x do vértice:**

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(2)} = 1.$$

- **Coordenada y do vértice:** Pode-se usar a fórmula ou calcular $f(x_V)$:

$$y_V = f(1) = 2(1)^2 - 4(1) + 5 = 2 - 4 + 5 = 3.$$

Alternativamente, $\Delta = (-4)^2 - 4(2)(5) = 16 - 40 = -24$, e $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\dfrac{-24}{4(2)} = 3$.

- **Vértice:** $V(1,3)$.
- **Conjunto Imagem:** Como $a = 2 > 0$, a parábola tem concavidade para cima e o vértice é um ponto de **mínimo**. O conjunto imagem é:

$$\text{Im}(f) = [y_V, +\infty[= [3, +\infty[.$$

10. (PUCC-SP) Um projétil lançado da origem $O(0,0)$, segundo um referencial dado, percorre uma trajetória parabólica que atinge sua altura máxima no ponto $(2,4)$. Escreva a equação dessa trajetória.

Resolução: A altura máxima corresponde ao vértice da parábola, logo $V(2,4)$. A forma canônica da função quadrática é $f(x) = a(x - x_V)^2 + y_V$.

- Substituindo o vértice: $f(x) = a(x-2)^2 + 4$.
- Para encontrar a, usa-se o outro ponto conhecido, a origem $(0,0)$. Isso significa que quando $x = 0$, $f(x) = 0$:

$$0 = a(0-2)^2 + 4 \Rightarrow 0 = a(-2)^2 + 4 \Rightarrow 0 = 4a + 4 \Rightarrow a = -1.$$

- Com $a = -1$, a equação da trajetória é:

$$f(x) = -1(x-2)^2 + 4.$$

- Expandindo para a forma padrão: $f(x) = -(x^2 - 4x + 4) + 4 = -x^2 + 4x - 4 + 4$.

$$\boxed{f(x) = -x^2 + 4x}.$$

11. (Enem – Adaptada) Um boato tem um público-alvo P e sua rapidez de propagação R é dada por $R(x) = k \cdot x \cdot (P - x)$, onde x é o número de pessoas que conhecem o boato e k é uma constante positiva. Se o público-alvo é de 44.000 pessoas, a máxima rapidez de propagação ocorrerá quando o boato for conhecido por qual número de pessoas?

Resolução: A função da rapidez é $R(x) = kx(44000 - x)$. Expandindo, temos uma função quadrática:

$$R(x) = -kx^2 + 44000kx.$$

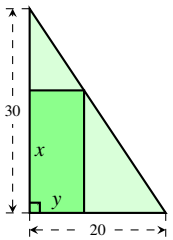
Trata-se de uma parábola com concavidade para baixo (pois $a = -k < 0$), cujo valor máximo ocorre no vértice. A questão pede o valor de x que maximiza $R(x)$, ou seja, a coordenada x_V do vértice.

- Coeficientes: $a = -k$ e $b = 44000k$.
- Cálculo de x_V:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{44000k}{2(-k)} = \frac{44000k}{2k} = 22000.$$

A rapidez é máxima quando 22.000 pessoas conhecem o boato. *Observação: Note que o máximo ocorre exatamente na metade do público-alvo, que são as duas raízes da função, $x = 0$ e $x = P$. O vértice sempre está no ponto médio entre as raízes.*

12. (Fuvest-SP) Num triângulo retângulo com catetos de medidas 20 e 30 metros, deseja-se construir uma casa retangular de dimensões x e y, como indicado na figura.



a) Exprima y em função de x.

b) Para que valores de x e de y a área ocupada pela casa será máxima?

Resolução:

a) Para expressar a área $A = x \cdot y$ em função de x, precisa-se de uma relação entre x e y. Observando a figura, nota-se a presença de dois triângulos retângulos semelhantes: o triângulo maior (catetos 20 e 30) e o triângulo menor, acima da casa (catetos $30 - x$ e y).

Pela semelhança de triângulos:

$$\frac{\text{altura do menor}}{\text{altura do maior}} = \frac{\text{base do menor}}{\text{base do maior}}$$

$$\frac{30-x}{30} = \frac{y}{20}$$

Isolando y:

$$y = 20 \cdot \frac{30-x}{30} = \frac{2}{3}(30-x) = 20 - \frac{2}{3}x.$$

Agora, faz-se a substituição dessa relação na fórmula da área:

$$A(x) = x \cdot y = x\left(20 - \frac{2}{3}x\right)$$

$$\boxed{A(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 20x}.$$

b) A função da área $A(x)$ é uma parábola com concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente $a = -3/2$ é negativo. Portanto, seu valor máximo ocorre no vértice. A questão pede as dimensões x e y que maximizam a área. O valor de x será a coordenada x_V do vértice.

Cálculo de x_V:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2 \cdot (-\frac{2}{3})} = -\frac{60}{-4} = 15.$$

O valor de x que maximiza a área é **10 metros**.
Para encontrar o valor correspondente de y, basta substituir $x = 15$ na relação encontrada:

$$y = 20 - \frac{2}{3}(15) = 20 - 5 = 10.$$

O valor de y é **15 metros**.
As dimensões para a área máxima são $\boxed{x = 15\text{m e } y = 10\text{m}}$.
Opcional: A área máxima seria $A = 15 \cdot 10 = 150\ m^2$.

Exercício 4.2.2

11. Determine as coordenadas do vértice para cada uma das seguintes funções e classifique-o como ponto de máximo ou mínimo.

    a) $f(x) = x^2 - 8x + 15$
    b) $g(x) = -2x^2 - 4x + 1$
    c) $h(x) = 3x^2 + 6$
    d) $p(x) = -x^2 + 10x$

12. Determine o conjunto imagem para as funções $f(x)$ e $g(x)$ da questão anterior.

13. Para qual valor de m a função $f(x) = x^2 - 10x + m$ tem como valor mínimo o número 5?

14. Uma parábola tem seu vértice no ponto $V(1,-9)$ e intercepta o eixo y no ponto $(0,-8)$. Determine a equação da função quadrática correspondente.

15. Um agricultor deseja cercar uma área retangular usando 400 metros de cerca. Quais devem ser as dimensões do retângulo para que a área cercada seja a máxima possível?

16. A trajetória de uma bola de golfe pode ser descrita pela equação $h(x) = -0.05x^2 + 2x$, onde h é a altura e x é a distância horizontal (ambas em metros). Qual é a altura máxima atingida pela bola?

17. O lucro L (em milhares de reais) de uma empresa pela venda de x unidades de um produto é dado por $L(x) = -x^2 + 100x - 1600$.

    a) Quantas unidades precisam ser vendidas para que o lucro seja máximo?
    b) Qual é o valor desse lucro máximo?

18. O gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ passa pelos pontos $(1,8)$ e $(3,8)$. Sem calcular os coeficientes, qual é a coordenada x do vértice desta parábola? Justifique sua resposta.

19. Reescreva a função $f(x) = 2x^2 + 12x + 10$ na sua forma canônica $f(x) = a(x - x_V)^2 + y_V$.

20. Se o vértice da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ é o ponto $(2,3)$ e o coeficiente $c = 7$, o que podemos afirmar sobre o sinal do coeficiente a?

(A) $a > 0$

(B) $a < 0$

(C) $a = 0$

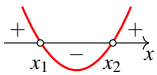
(D) Não há informação suficiente.

(E) O sinal de a depende de b.

Estudo do sinal

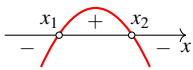
O estudo do sinal da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ consiste em determinar para quais valores de x a função é positiva, negativa ou nula. Este estudo depende fundamentalmente do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ e do coeficiente a.

- **Caso 1:** $\Delta > 0$ **(duas raízes reais distintas)**
  - **Subcaso 1A:** $a > 0$



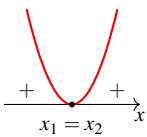
$f(x) > 0$ para $x < x_1$ ou $x > x_2$
$f(x) < 0$ para $x_1 < x < x_2$
$f(x) = 0$ para $x = x_1$ ou $x = x_2$

  - **Subcaso 1B:** $a < 0$



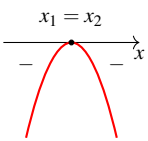
$f(x) < 0$ para $x < x_1$ ou $x > x_2$
$f(x) > 0$ para $x_1 < x < x_2$
$f(x) = 0$ para $x = x_1$ ou $x = x_2$

- **Caso 2:** $\Delta = 0$ **(uma raiz real dupla)**
  - **Subcaso 2A:** $a > 0$



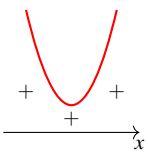
$f(x) > 0$ para $x \neq x_1$
$f(x) = 0$ para $x = x_1$

  - **Subcaso 2B:** $a < 0$



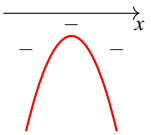
$f(x) < 0$ para $x \neq x_1$
$f(x) = 0$ para $x = x_1$

- **Caso 3:** $\Delta < 0$ **(nenhuma raiz real)**
  - **Subcaso 3A:** $a > 0$



$f(x) > 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$

– **Subcaso 3B:** $a < 0$



$f(x) < 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$

Exercício resolvido 4.2.2

13. Estude o sinal de cada uma das seguintes funções, que representam os seis casos possíveis de análise.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

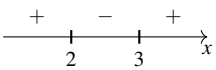
Resolução:

- **Coeficiente e Raízes:** $a = 1 > 0$, $\Delta = 1 > 0$, raízes $x_1 = 2, x_2 = 3$.
- **Análise:** Parábola com concavidade para cima.

Conclusão:

- $f(x) > 0$ para $x < 2$ ou $x > 3$.
- $f(x) < 0$ para $2 < x < 3$.
- $f(x) = 0$ para $x = 2$ ou $x = 3$.

Diagrama de Sinal:



b) $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$

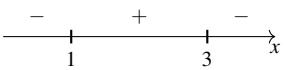
Resolução:

- **Coeficiente e Raízes:** $a = -2 < 0$, $\Delta = 16 > 0$, raízes $x_1 = 1, x_2 = 3$.
- **Análise:** Parábola com concavidade para baixo.

Conclusão:

- $f(x) > 0$ para $1 < x < 3$.
- $f(x) < 0$ para $x < 1$ ou $x > 3$.
- $f(x) = 0$ para $x = 1$ ou $x = 3$.

Diagrama de Sinal:



c) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

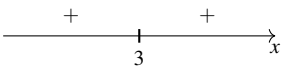
Resolução:

- **Coeficiente e Raiz:** $a = 1 > 0$, $\Delta = 0$, raiz dupla $x = 3$.
- **Análise:** Parábola com concavidade para cima, tangenciando o eixo x.

Conclusão:

- $f(x) > 0$ para $x \neq 3$.
- $f(x) = 0$ para $x = 3$.

Diagrama de Sinal:



d) $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$

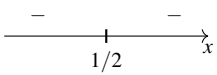
Resolução:

- **Coeficiente e Raiz:** $a = -4 < 0$, $\Delta = 0$, raiz dupla $x = 1/2$.
- **Análise:** Parábola com concavidade para baixo, tangenciando o eixo x.

Conclusão:

- $f(x) < 0$ para $x \neq 1/2$.
- $f(x) = 0$ para $x = 1/2$.

Diagrama de Sinal:



e) $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$

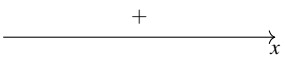
Resolução:

- **Coeficiente e Discriminante:** $a = 2 > 0$, $\Delta = -7 < 0$.
- **Análise:** Parábola com concavidade para cima, sem tocar o eixo x.

Conclusão:

- $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Diagrama de Sinal:



f) $f(x) = -x^2 + x - 1$

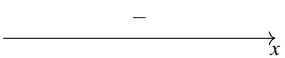
Resolução:

- **Coeficiente e Discriminante:** $a = -1 < 0$, $\Delta = -3 < 0$.
- **Análise:** Parábola com concavidade para baixo, sem tocar o eixo x.

Conclusão:

- $f(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Diagrama de Sinal:



14. (FEI-SP) Ache os valores de p para os quais a função $f(x) = (p-1)x^2 + (2p-2)x + p + 1$ é positiva, qualquer que seja x.

Resolução: Para que uma função quadrática seja sempre positiva ($f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$), duas condições devem ser satisfeitas simultaneamente:

i. A concavidade da parábola deve ser voltada para cima, o que implica que o coeficiente líder deve ser positivo: $a > 0$.

ii. A função não deve ter raízes reais (o gráfico não pode tocar ou cruzar o eixo x), o que significa que o discriminante deve ser negativo: $\Delta < 0$.

Inicialmente deve-se analisar cada condição para a função dada, onde $a = p-1$, $b = 2p-2$ e $c = p+1$.

- **Condição 1:** $a > 0$

$$p-1 > 0 \Rightarrow \boxed{p > 1}. \quad \text{(I)}$$

- **Condição 2:** $\Delta < 0$ Calculamos o discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2p-2)^2 - 4(p-1)(p+1).$$

Expandindo os termos:

$$\Delta = (4p^2 - 8p + 4) - 4(p^2 - 1)$$

$$\Delta = 4p^2 - 8p + 4 - 4p^2 + 4$$

$$\Delta = -8p + 8.$$

Agora, aplicamos a condição $\Delta < 0$:

$$-8p + 8 < 0 \Rightarrow -8p < -8.$$

Multiplicando por -1 (e invertendo o sinal da desigualdade):

$$8p > 8 \Rightarrow \boxed{p > 1}. \quad \text{(II)}$$

A solução final é a interseção das condições (I) e (II). Como ambas as condições exigem que $p > 1$, a interseção é o próprio intervalo.

Portanto, os valores de p para os quais a função é sempre positiva são todos os números reais tais que $\boxed{p > 1}$.

Exercício 4.2.2

21. Estude o sinal das funções a seguir, cobrindo todos os casos possíveis de análise.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 4$ b) $g(x) = -x^2 + 5x - 4$ c) $h(x) = x^2 - 4x + 4$

d) $p(x) = -x^2 + 4x - 4$ e) $q(x) = x^2 + 1$ f) $r(x) = -x^2 - 1$

22. Determina-se o conjunto solução para a inequação $-x^2 + 3x + 4 \leq 0$.

23. Quais valores do parâmetro k tornam a função $f(x) = kx^2 - 2x - 1$ sempre negativa, para todo $x \in \mathbb{R}$?

24. Física - A altura h (em metros) de um projétil em função do tempo t (em segundos) é dada por $h(t) = -5t^2 + 50t$. Em qual intervalo de tempo a altura do projétil é superior a 120 metros?

Inequações do 2° grau

Definição 4.2.6: Inequação do 2°

São sentenças abertas com a presença de alguma das desigualdades $\gtrless$.

Para encontrar o conjunto verdade que satisfaz uma inequação basta determinar o conjunto dos valores de x tais que: $f(x) > 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) < 0$ ou $f(x) \leq 0$ segundo o sinal do discriminante Δ e do valor de a nos casos:

Delta	Concavidade	Sinal de $f(x)$
$\Delta > 0$	$a > 0$	$x < x_1 \vee x > x_2 \Rightarrow f(x) > 0$
	$a < 0$	$x_1 < x < x_2 \Rightarrow f(x) < 0$
$\Delta = 0$	$a > 0$	$x = x_0 \Rightarrow f(x) = 0 \ \wedge \ f(x) > 0 \ \forall \, x \neq x_0$
	$a < 0$	$x = x_0 \Rightarrow f(x) = 0 \ \wedge \ f(x) < 0 \ \forall \, x \neq x_0$
$\Delta < 0$	$a > 0$	$f(x) > 0 \ \forall \, x$
	$a < 0$	$f(x) < 0 \ \forall \, x$

Exercício resolvido 4.2.2

15. Resolva as seguintes inequações do 2° grau:

a) $x^2 - 5x + 6 > 0$

Solução:

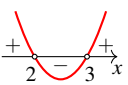
Encontrando as raízes:

$$\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$\therefore x_1 = 2, \quad x_2 = 3$$

Como $a = 1 > 0$, a concavidade é para cima:



$$\boxed{S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \vee x > 3\}}$$

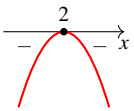
b) $-x^2 + 4x - 4 \leq 0$

Solução:

Encontrando as raízes:

$$\Delta = (4)^2 - 4(-1)(-4) = 16 - 16 = 0$$
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2(-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Como $a = -1 < 0$, a concavidade é para baixo:



$$\boxed{S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}} \text{ ou } \boxed{S =]-\infty, 2]}$$

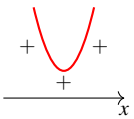
c) $2x^2 - 3x + 4 < 0$

Solução:

Analisando o discriminante:

$$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(4) = 9 - 32 = -23 < 0$$

Como $a = 2 > 0$ e $\Delta < 0$, a função é sempre positiva:



$$\boxed{S = \varnothing}$$

Exercício 4.2.2

25. (UFAM) Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 3x + 2$, pode-se afirmar que $f(x) < 0$ para x, tal que:

    (A) $x < 1$ ou $x > 2$ (B) $1 < x < 2$ (C) $x = 1$ ou $x = 2$ (D) $x \leq 1$ ou $x \geq 2$

26. Determine o conjunto solução da inequação $-x^2 + 7x - 10 \geq 0$.

27. (Faap-SP) Determine o conjunto solução da inequação $(2x - 5)(x - 4) - 7 \geq (x - 2)(x - 3)$.

28. (PUC-SP) Sendo $f(x) = x^2 - 3x + 8$, calcule o conjunto solução da inequação $f(x) > 2f(1)$.

29. (Unip-SP) Seja A o conjunto solução da inequação $x^2 - 5x + 4 < 0$ e $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ o conjunto dos números naturais. Determine o conjunto $A \cap \mathbb{N}$.

30. Determinae os valores de m para os quais a inequação $x^2 - 6x + m > 0$ é satisfeita para todo $x \in \mathbb{R}$.

31. A trajetória de um drone de pulverização agrícola é descrita pela função de altura $h(t) = -t^2 + 8t$, com t em segundos e h em metros. Em qual intervalo de tempo a altura do drone é de, no mínimo, 12 metros?

Inequações-produto e inequações-quociente

Definição 4.2.7

Chamam-se *inequações-produto* aquelas que envolvem expressões do tipo $f(x)\,g(x) \gtrless 0$; e *inequações-quociente* aquelas da forma $\dfrac{f(x)}{g(x)} \gtrless 0$, onde f e g são funções reais.

A resolução baseia-se na análise do sinal de cada parcela envolvida (f e g) e na posterior montagem de uma tabela-sinal que permita identificar onde o produto ou o quociente assume o sinal desejado. Para este capítulo, considera-se o caso em que f e g são funções quadráticas.

Exercício resolvido 4.2.2

16. Resolva as inequações a seguir:

a) $(x^2 - 2x)(-x^2 + 4x - 3) > 0$

b) $f(x) = \dfrac{-x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3x} \leq 0$

c) $f(x) = \dfrac{-x + 1}{-x^2 - x} \geq 0$

d) $(x^2 - 6x + 9)(x^2 - x - 6) < 0$

Resolução:

a)

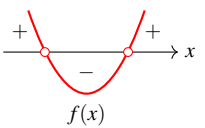
$$(x^2 - 2x)(-x^2 + 4x - 3) > 0$$

Análise individual dos sinais

A função

$$f(x) = x(x-2)$$

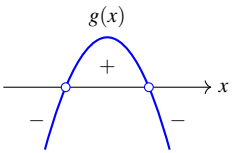
possui raízes em 0 e 2, com concavidade voltada para cima ($a > 0$).



A função

$$g(x) = -x^2 + 4x - 3$$

possui raízes em 1 e 3, com concavidade voltada para baixo ($a < 0$).



Grade de sinais:

		0	1	2	3	
f	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	
g	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$f\cdot g$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	

Região onde $f(x)\cdot g(x)>0$: $]0,1[\cup]2,3[$

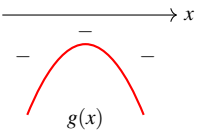
$$\boxed{S=\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x<1 \vee 2<x<3\}}$$

b) $f(x)=\dfrac{-x^2+2x-3}{x^2-3x}\leq 0$

Análise individual dos sinais:

O numerador

$$h(x)=-x^2+2x-3$$



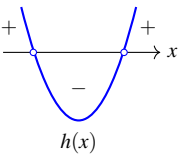
possui discriminante:

$$\Delta=2^2-4(-1)(-3)=4-12=-8<0.$$

Como $a=-1<0$ e $\Delta<0$, a função é sempre negativa.

O denominador

$$h(x)=x^2-3x=x(x-3)$$



possui raízes em 0 e 3, com concavidade voltada para cima ($a>0$).

Grade de sinais:

		0	3	
g	$-$	$-$	$-$	
h	$+$	$-$	$+$	
g/h	$-$	$+$	$-$	

Região onde $\dfrac{g(x)}{h(x)}\leq 0$: $]-\infty,0[\cup]3,+\infty[$

$$\boxed{S=\{x\in\mathbb{R}\mid x<0 \vee x>3\}}$$

Observações:

- O numerador é sempre negativo e nunca se anula

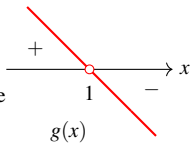
- As raízes $x = 0$ e $x = 3$ não pertencem ao conjunto solução pois tornam o denominador nulo (descontinuidades)
- A desigualdade ≤ 0 é satisfeita nos intervalos onde o quociente é negativo

c) $f(x) = \dfrac{-x+1}{-x(x+1)} \geq 0$

Análise individual dos sinais:

O numerador

$$g(x) = -x+1$$

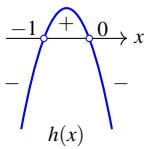


é uma função do primeiro grau decrescente com raiz em $x = 1$ e coeficiente angular negativo ($a = -1 < 0$).

O denominador

$$h(x) = -x(x+1) = -x^2 - x$$

possui raízes em -1 e 0, com concavidade voltada para baixo ($a < 0$).



Grade de sinais:

		-1		0		1	
g	$+$		$+$		$+$		$-$
h	$-$		$+$		$+$		$-$
g/h	$-$	∄	$+$	0	$+$	0	$+$

Região onde $\dfrac{g(x)}{h(x)} \geq 0$: $]-1,0[\cup [1,+\infty[$

$$\boxed{S = \{\, x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \ \vee\ x \geq 1 \,\}}$$

Observações:

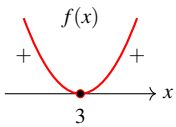
- O numerador se anula em $x = 1$ (bolinha fechada)
- O denominador se anula em $x = -1$ e $x = 0$ (bolinhas abertas - descontinuidades)
- A desigualdade ≥ 0 é satisfeita nos intervalos $]-1,0[$ e $[1,+\infty[$
- O ponto $x = 1$ está incluído pois torna o numerador zero (e o quociente é zero)

d) $(x^2 - 6x + 9)(x^2 - x - 6) < 0$

Análise individual dos sinais:

O primeiro fator

$$f(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

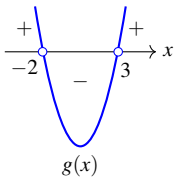


possui raiz dupla em $x = 3$, com concavidade voltada para cima ($a > 0$).

O segundo fator

$$g(x) = x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$$

possui raízes em -2 e 3, com concavidade voltada para cima ($a > 0$).



Grade de sinais:

		-2		3	
f	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
g	$+$	$+$	$-$	0	$+$
$f \cdot g$	$+$	0	$-$	0	$+$

Região onde $f(x) \cdot g(x) < 0$: $(-2, 3)$

$$\boxed{S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\}}$$

Observações:

- Ambas as funções compartilham a raiz $x = 3$ (ponto de tangência)
- No ponto $x = 3$, o produto é zero (não satisfaz < 0)
- A raiz $x = -2$ pertence apenas a $g(x)$ e é ponto de descontinuidade do sinal
- O produto é negativo apenas no intervalo entre as raízes distintas
- Este exemplo mostra como uma raiz dupla "corta"o gráfico sem mudar o sinal

Em um contexto empresarial: Esta inequação poderia modelar a análise de lucro de uma empresa onde:

- $f(x)$ representa custos fixos (mínimo em $x = 3$)
- $g(x)$ representa receita líquida (negativa entre -2 e 3)
- O produto $f(x) \cdot g(x) < 0$ indica prejuízo operacional

Exercício 4.2.2

32. (FGV-SP) Determinae os valores de x para os quais

$$(x^2-8x+12)(x^2-5x)<0.$$

33. (Faap-SP) Qual o domínio da função definida por $y=\sqrt{x^2-9}$?

34. (UFSE) Se k é uma solução inteira da inequação

$$\frac{x^2-5x+4}{x^2-4x}\leq 0,$$

então k é igual a:

(A) 1 (B) 1 ou 4 (C) 2 ou 3 (D) 1, 2, 3 ou 4

(E) 5, 6, 7, 8 ou 9

35. (Cesgranrio-RJ) Dadas as funções $f(x)=x^2-2x+1$, $g(x)=5-x$ e $h(x)=x^2-4x+3$, define-se a função $\varphi(x)=\dfrac{g(x)\cdot h(x)}{f(x)}$. Analisando os valores de x, para os quais $\varphi(x)\geq 0$, tem-se:

(A) $x<1$ ou $3<x<5$ (B) $x<1$ ou $3\leq x\leq 5$ (C) $x\leq 1$ ou $3\leq x\leq 5$

(D) $x\geq 5$ ou $1\leq x\leq 3$ (E) $x>5$ ou $1<x<3$

36. (EEM-SP) Resolva a inequação $(x+4)<-\dfrac{2}{x+1}$ em $\mathbb{R}$.

37. (UFPI) O conjunto solução da inequação $\dfrac{x-1}{x^2-4x+3}\geq 1$, no universo $\mathbb{R}$, é:

(A) $]-\infty,3]\cup[4,+\infty[$ (B) $\mathbb{R}-\{3,1\}$ (C) $[3,4]$ (D) $]3,4]$

(E) $]3,4[$

38. (UFMG) O conjunto de todos os valores reais de x que satisfazem à desigualdade $\dfrac{-x^2+2}{-x^2+2x-2}\leq 1$ é:

(A) $\{x\in\mathbb{R}: x\leq 0 \text{ ou } x\geq 2\}$ (B) $\{x\in\mathbb{R}: x\leq 2\}$ (C) $\{x\in\mathbb{R}: |x|\geq 1\}$

(D) $\{x\in\mathbb{R}: |x|\leq\sqrt{2}\}$ (E) $\{x\in\mathbb{R}: x\leq -1\}$

39. (UFSM-RS) O conjunto solução da inequação $\dfrac{x^2+x-1}{9-x^2}\geq\dfrac{1}{3-x}$ é dado por:

(A) $[-3,3[$ (B) $]-\infty,-2]\cup[2,\infty[$ (C) $]-3,-2]\cup[2,3[$

(D) $[-2,2]$ (E) $[2,\infty[$

40. Engenharia de Controle / Estabilidade de Sistemas - A estabilidade e um sistema ao longo do tempo t pode ser analisada por uma função de estabilidade $S(t)$. O sistema é considerado estável quando $S(t) > 0$. Dada a função $S(t) = (t^2 - 6t + 8)(-t^2 + 5t - 5)$, determine o(s) intervalo(s) de tempo t em que o sistema opera de forma estável.

Aplicação da Função do 2° a dados experimentais

Definição 4.2.8

Considere dados experimentais organizados como pares (x_i, y_i), nos quais x é a variável independente (controlada ou medida) e y é a variável resposta observada.
Diz-se que esses dados são explicados por um **modelo quadrático** quando existe uma função

$$y = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0,$$

tal que, para valores de x igualmente espaçados (isto é, Δx constante), a **segunda variação**

$$\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}$$

é uma constante não nula. Nesse caso, o coeficiente a pode ser obtido diretamente por

$$a = \frac{1}{2}\,\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}.$$

Uma vez estimado a, escolhem-se dois pares experimentais distintos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) da tabela e substituem-se na expressão $y = ax^2 + bx + c$, obtendo-se o sistema linear em b e c:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c, \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c. \end{cases}$$

Resolve-se o sistema para determinar b e c (com base nos dados experimentais escolhidos).

Exercício resolvido 4.2.2

17. Na **Física/Engenharia** para encontrar a aceleração centrípeta em função de ω, considera-se um experimento de movimento circular uniforme com raio fixo $r = 0{,}25$ m. Mede-se a velocidade angular ω (rad/s) e a aceleração centrípeta a_c (m/s^2). Pela teoria, espera-se o modelo

$$a_c(\omega) = r\,\omega^2.$$

Considere 5 medições, com $\Delta\omega = 2$ rad/s:

ω	a_c	$\dfrac{\Delta a_c}{\Delta\omega}$	$\dfrac{\Delta^2 a_c}{(\Delta\omega)^2}$
2	1		
4	4	1.5	
6	9	2.5	0.5
8	16	3.5	0.5
10	25	4.5	0.5

Como $\dfrac{\Delta^2 a_c}{(\Delta\omega)^2}$ é constante e não nula (igual a 0.5), os dados são compatíveis com um modelo quadrático

$$a_c(\omega) = a\,\omega^2 + b\,\omega + c.$$

Pela definição operacional,

$$a = \frac{1}{2}\,\frac{\Delta^2 a_c}{(\Delta\omega)^2} = \frac{1}{2}\cdot 0.5 = 0.25.$$

Para determinar b e c, substituem-se dois pares na expressão. Usando $(\omega, a_c) = (2,1)$ e $(4,4)$:

$$\begin{cases} 1 = 0.25\cdot 2^2 + 2b + c, \\ 4 = 0.25\cdot 4^2 + 4b + c. \end{cases}$$

Como $0.25\cdot 2^2 = 1$ e $0.25\cdot 4^2 = 4$, segue:

$$\begin{cases} 2b + c = 0, \\ 4b + c = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow b = 0,\ c = 0.$$

Portanto, o modelo obtido a partir dos dados é

$$\boxed{a_c(\omega) = 0.25\,\omega^2}$$

o que coincide com a previsão teórica $a_c = r\omega^2$ para $r = 0.25$ m.

18. Em **Ciências Agrárias**, considere um ensaio agronômico (dados experimentais ilustrativos) em que se observa a produtividade de grãos de milho y (em t/ha) em função da dose de nitrogênio (N) x (em kg/ha), para doses igualmente espaçadas (Δx constante).

x (kg/ha)	y (t/ha)	$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$	$\dfrac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}$
0	4.0		
20	6.0	$\frac{6.0-4.0}{20} = 0.10$	
40	7.2	$\frac{7.2-6.0}{20} = 0.06$	$\frac{0.06-0.10}{20} = -0.002$
60	7.6	$\frac{7.6-7.2}{20} = 0.02$	$\frac{0.02-0.06}{20} = -0.002$
80	7.2	$\frac{7.2-7.6}{20} = -0.02$	$\frac{-0.02-0.02}{20} = -0.002$

Encontre o modelo associado, o domínio, contradomínio e imagem da função e esboce o gráfico.

Resolução:

Observa-se que $\dfrac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}$ é constante e não nula (igual a -0.002). Logo, os dados são compatíveis com um modelo quadrático

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0.$$

Pela definição operacional adotada, aplica-se a segunda variação para determinar a

$$a = \frac{1}{2}\,\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{2}\cdot(-0.002) = -0.001.$$

A determinação de b e c é dada por um sistema usando dois pontos quaisquer da tabela, aqui é escolhido os pares $(0, 4.0)$ e $(20, 6.0)$:

$$\begin{cases} 4.0 = -0.001\cdot 0^2 + 0\cdot b + c, \\ 6.0 = -0.001\cdot 20^2 + 20b + c. \end{cases}$$

Da primeira equação, $c = 4.0$. Como $-0.001\cdot 20^2 = -0.4$, a segunda equação fornece:

$$6.0 = -0.4 + 20b + 4.0 \Rightarrow 20b = 2.4 \Rightarrow b = 0.12.$$

Com os coeficiente em mãos o **modelo** obtido quadrático pode ser obtido.

$$\boxed{f(x) = -0.001x^2 + 0.12x + 4} \qquad (\text{com } x \text{ em kg/ha e } f(x) \text{ em t/ha}).$$

Domínio, contradomínio e imagem

- **Domínio (experimental)**: como os dados foram coletados para $0 \leq x \leq 80$, considera-se

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 80\}.$$

- **Contradomínio (matemático)**: adota-se $\mathbb{R}$. (No contexto agronômico, interessa principalmente $f(x) \geq 0$.)
- **Imagem no domínio experimental**: calcula-se o ponto crítico

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{0.12}{2(-0.001)} = 60,$$

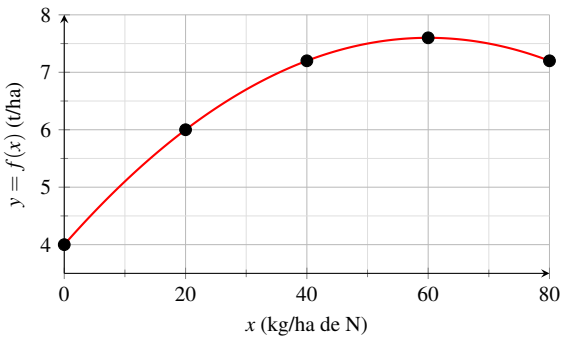
e então

$$f(0) = 4, \qquad f(60) = 7.6, \qquad f(80) = 7.2.$$

Logo, no domínio experimental $D = [0, 80]$,

$$\mathrm{Im}(f|_D) = [4,\ 7.6].$$

Gráfico com modelo e pontos experimentais:



Pelo gráfico, observa-se que o modelo permite identificar a dose ótima de nitrogênio (N): a produtividade atinge seu máximo em 60 kg/ha de N. Nisso vê-se a importância de se conhecer o modelo para se tomar decisões importantes, pois partir desse ponto, o aumento de N não gera ganho adicional e pode até levar a produtividades iguais às obtidas com doses menores, o que orienta a decisão de manejo para evitar aplicações e gastos desnecessários.

19. (Análise de Investimentos) Considere os dados experimentais apresentados na tabela a seguir, que descrevem a quantidade y (em unidades arbitrárias) de um determinado indicador de desempenho em função do nível x (em unidades igualmente espaçadas) de investimento aplicado em um processo produtivo.

x	10	20	30	40	50	60
y	18.4	12.1	8.6	7.9	9.8	14.3

Admite-se que a relação entre x e y pode ser modelada por uma função quadrática.

Resolução:

Como os valores de x são igualmente espaçados, calcula-se inicialmente a primeira variação:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Observa-se que essas variações não são constantes. Em seguida, calcula-se a segunda variação,

$$\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2},$$

a qual resulta constante e não nula. De acordo com a definição de função quadrática, conclui-se que os dados podem ser descritos por um modelo da forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

Pela definição,

$$a = \frac{1}{2}\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}.$$

A partir dos dados da tabela, obtém-se $a > 0$, o que indica que o gráfico da função é uma parábola com concavidade voltada para cima.

Para determinar os coeficientes b e c, selecionam-se dois pontos quaisquer da tabela, por exemplo $(10, 18.4)$ e $(40, 7.9)$. Substituindo-os na expressão geral, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} 100a + 10b + c = 18.4, \\ 1600a + 40b + c = 7.9. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, determinam-se os valores de b e c, ficando completamente definido o modelo funcional

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

O gráfico da função é uma parábola com concavidade para cima, possuindo, portanto, um único ponto de mínimo. O vértice da parábola ocorre em

$$x_v = -\frac{b}{2a},$$

e o valor mínimo da função é $f(x_v)$.

Considerando apenas o intervalo de valores observados no experimento, define-se o conjunto

$$P = \{x \in \mathbb{R} \mid 10 \leq x \leq 60\},$$

o qual é um subconjunto do domínio $D = \mathbb{R}$. A imagem da função restrita a esse conjunto é dada por

$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid f(x_v) \leq y \leq \max f(x),\ x \in P\},$$

sendo $f(x_v)$ o valor mínimo atingido pela função no intervalo considerado.

Devido à forma do gráfico, a função quadrática obtida é adequada para modelar fenômenos que apresentam um único ponto de mínimo, característica comum em problemas de otimização em contextos administrativos e produtivos.

Exercício 4.2.2

41. Em um processo industrial, a eficiência energética y (em %) foi medida em função da velocidade de operação x (em centenas de RPM), com os resultados tabulados abaixo.

x	1	2	3	4
y	84	90	92	90

Sabendo que a segunda variação é constante, determina-se o modelo quadrático $y = f(x)$ que descreve a eficiência.

42. Utilizando o modelo encontrado na questão anterior, determina-se a velocidade de operação x que resulta na máxima eficiência energética e qual é o valor dessa eficiência máxima.

43. Um estudo sobre a biodegradação de um polímero registrou a massa restante y (em gramas) ao longo do tempo x (em semanas). O modelo quadrático ajustado aos dados, válido no intervalo de tempo do experimento, é $f(x) = x^2 - 12x + 40$. Se o experimento durou de $x = 0$ até $x = 10$ semanas, determina-se o conjunto imagem da massa restante nesse período.

44. O custo operacional C (em milhares de reais) de uma máquina é modelado pela função $C(x) = 0.5x^2 - 4x + 10$, onde x é a idade da máquina em anos. A gerência considera a operação "economicamente viável" apenas quando o custo é inferior a 4 mil reais ($C(x) < 4$). Determina-se o intervalo de idade da máquina em que a operação é considerada economicamente viável.

45. Engenharia Reversa e Previsão - Sabe-se que a resistência R de um material segue um modelo quadrático em função da temperatura T, da forma $R(T) = aT^2 + bT + 5$. Duas medições foram realizadas: no ponto $T = 10$, a resistência foi $R = 15$; no ponto $T = 20$, a resistência foi $R = 35$. Se os dados foram coletados com um espaçamento constante $\Delta T = 10$, qual era o valor da segunda variação, $\frac{\Delta^2 R}{(\Delta T)^2}$, observado no experimento?

4.2.3 Função polinomial de grau 3

Definição 4.2.9: Função do 3° grau

A função do terceiro grau (ou função cúbica) tem equação geral

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d, \qquad a \neq 0,$$

em que a, b, c, d são constantes reais.
Um conjunto de dados experimentais tabelados (x_i, y_i), com espaçamento constante Δx entre os valores de x, é compatível com um modelo cúbico quando os valores da terceira variação

$$\frac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3}$$

são uma constante não nula. Nesse caso,

$$a = \frac{1}{6}\,\frac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3}.$$

Para determinar b, c e d a partir dos dados experimentais, após obter a escolhem-se três pontos quaisquer da tabela (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) e resolve-se o sistema linear:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d, \\ y_2 = ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d, \\ y_3 = ax_3^3 + bx_3^2 + cx_3 + d. \end{cases}$$

Exercício resolvido 4.2.3

1. Em um experimento de **Ciências Agrárias**, mede-se o índice de resposta fisiológica de plantas $y = f(x)$ (adimensional) em função do tempo x (em semanas), para valores igualmente espaçados de 0,1 semana, no intervalo $0 \leq x \leq 0{,}5$. Com base nos dados a seguir, identifique o domínio, o contradomínio e a imagem, encontre o modelo que explica o fenômeno e faça um esboço do gráfico. Depois, faça uma análise do significado das alterações de sinal das diferenças finitas.

x	y	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}$	$\frac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3}$
0,0	1,20			
0,1	1,30	1,00		
0,2	1,28	-0,20	-12	
0,3	1,26	-0,20	0	120
0,4	1,36	1,00	12	120
0,5	1,70	3,40	24	120

Resolução: Considera-se o domínio experimental

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 0{,}5\}.$$

Adota-se como contradomínio o $\mathbb{R}$.

As variações são calculadas com $\Delta x = 0{,}1$. Por exemplo, na primeira variação:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\Big|_{[0,0,0,1]} = \frac{1{,}30 - 1{,}20}{0{,}1} = 1{,}00, \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}\Big|_{[0,1,0,2]} = \frac{1{,}28 - 1{,}30}{0{,}1} = -0{,}20.$$

Observa-se mudança de sinal da primeira variação (de positiva para negativa e, posteriormente, de negativa para positiva), indicando mudança de comportamento: crescimento, seguido de decrescimento e depois crescimento novamente. Isso sugere a presença de um máximo local e de um mínimo local no domínio.

Na segunda variação:

$$\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2} = \frac{\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}{\Delta x},$$

com valores que passam de negativos para positivos, indicando mudança no comportamento de curvatura ao longo do intervalo, de côncava para baixo de côncava para cima. Nesse mudança ocorre o chamado *ponto de inflexão*.

Na terceira variação (constante não nula):

$$\frac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3} = 120,$$

conclui-se que o modelo compatível é cúbico e o coeficiente líder é

$$a = \frac{1}{6} \cdot 120 = 20.$$

Para determinar b, c e d, utiliza-se três pontos da tabela. Tomando $(0,1{,}20)$, $(0{,}1,1{,}30)$ e $(0{,}2,1{,}28)$:

$$\begin{cases} 1{,}20 = 20 \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d, \\ 1{,}30 = 20 \cdot (0{,}1)^3 + b \cdot (0{,}1)^2 + c \cdot 0{,}1 + d, \\ 1{,}28 = 20 \cdot (0{,}2)^3 + b \cdot (0{,}2)^2 + c \cdot 0{,}2 + d. \end{cases}$$

Da primeira equação, $d = 1{,}20$. Substituindo nas demais:

$$\begin{cases} 0{,}01b + 0{,}1c = 0{,}08, \\ 0{,}04b + 0{,}2c = -0{,}08, \end{cases} \Rightarrow c = 2,\ b = -12.$$

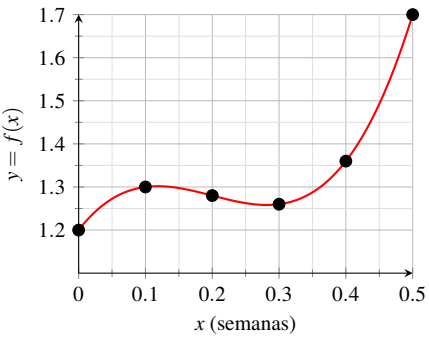
Logo, o modelo é

$$f(x) = 20x^3 - 12x^2 + 2x + 1{,}20.$$

A imagem no domínio experimental, a partir dos valores observados na tabela, pode ser descrita por

$$I = \{y \in \mathbb{R} \mid 1{,}20 \leq y \leq 1{,}70\}.$$

O gráfico do modelo (com os pontos experimentais) pode ser esboçado por:



Análise Aprofundada de Pontos Críticos do Modelo

O modelo cúbico $f(x) = 20x^3 - 12x^2 + 2x + 1,20$ permite ir além dos pontos medidos e analisar a dinâmica contínua da resposta fisiológica da planta. Os pontos de máximo, mínimo e inflexão, encontrados com ferramentas de Cálculo Diferencial, revelam momentos cruciais do fenômeno.

- **O Ponto de Máximo Local:**
  - **O que é e onde ocorre?** É o primeiro "pico" da curva, onde a taxa de variação da resposta se anula. Ocorre em $x \approx 0,118$ semanas.
  - **Importância e Interpretação Aplicada:** Este ponto representa o **pico de resposta inicial** da planta. Biologicamente, pode ser o momento em que um estímulo (como um nutriente ou hormônio) atinge sua máxima eficácia inicial. Antes deste ponto, a planta está respondendo positivamente e de forma crescente. Após este ponto, inicia-se uma fase de atenuação ou estresse, onde a resposta começa a diminuir, mesmo que o estímulo continue. Para um agrônomo ou biólogo, identificar este pico é crucial para entender os limiares de resposta rápida de um organismo.
- **O Ponto de Mínimo Local:**
  - **O que é e onde ocorre?** É o "vale" da curva, onde a resposta para de cair e começa a se recuperar. Ocorre em $x \approx 0,282$ semanas.
  - **Importância e Interpretação Aplicada:** Este ponto pode ser interpretado como o **ponto de máxima atenuação ou estresse adaptativo**. É o momento em que a resposta fisiológica atinge seu valor mais baixo antes de iniciar uma nova fase de crescimento. Em termos práticos, pode significar o fim de um período de latência ou o início da adaptação da planta a novas condições. Saber quando este "vale" ocorre é fundamental para prever a recuperação do sistema biológico.
- **O Ponto de Inflexão:**
  - **O que é e onde ocorre?** É o ponto onde a curvatura do gráfico muda. A curva passa de côncava para baixo (a "boca" da parábola virada para baixo) para côncava para cima. Ocorre exatamente em $x = 0,2$ semanas.

– **Importância e Interpretação Aplicada:** Este é, talvez, o ponto mais sutil e poderoso. Ele representa o **ponto de virada na dinâmica do processo**. No ponto de inflexão, a *taxa de variação* da resposta atinge seu valor mínimo. Em outras palavras, é o momento em que a resposta fisiológica está **diminuindo mais rapidamente**. Antes de $x = 0,2$, a queda na resposta está se acelerando. Depois de $x = 0,2$, a resposta ainda está caindo (até atingir o mínimo), mas já está **desacelerando sua queda**, sinalizando o início da recuperação. Para um cientista de dados, o ponto de inflexão é um *leading indicator* (indicador antecedente): ele sinaliza uma mudança de tendência antes que essa mudança seja óbvia (como o ponto de mínimo). Ele marca o momento exato em que a "maré" do processo começa a virar.

A análise desses três pontos transforma um simples ajuste de curva em uma narrativa preditiva sobre o comportamento do sistema, permitindo tomar decisões mais informadas e antecipar tendências.

Exercício 4.2.3

1. Engenharia Reversa a partir da Simetria - Uma função cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ possui um ponto de inflexão em $I(2,5)$. Sabe-se que a curva tem um comportamento perfeitamente simétrico em relação a este ponto. Se dois pontos experimentais observados foram $P_1(0,1)$ e $P_2(3,11)$, utilize essa propriedade de simetria para deduzir as coordenadas de um terceiro ponto, P_3, e, a partir daí, determina-se a equação completa do modelo cúbico.

2. Análise de Dados e Detecção de Erros - Um sensor coletou dados sobre a pressão $P(t)$ em um sistema ao longo do tempo t. Teoricamente, o modelo deveria ser cúbico. Suspeita-se que uma das medições está corrompida. Analise a tabela de diferenças, identifique o valor de $P(t)$ que quebra o padrão da terceira variação constante e proponha um valor corrigido para ele, de modo que o modelo cúbico se ajuste perfeitamente.

t	0	1	2	3	4
$P(t)$	10	12	14	22	42

3. Em farmacocinética, a taxa de absorção de um medicamento pode ser tão importante quanto sua concentração. O modelo para a concentração de uma substância no sangue é dado por $C(t) = -t^3 + 9t^2 - 15t + 20$, para $t \in [0,5]$. A taxa de variação da concentração é descrita pela função $V(t) = -3t^2 + 18t - 15$. Determine em que instante t a taxa de variação da concentração é máxima, ou seja, quando o medicamento está sendo absorvido mais rapidamente.

4. Na tabela abaixo apresentam-se dados sobre o crescimento populacional de uma cultura de bactérias. Para justificar a escolha de um modelo cúbico em detrimento de um quadrático, calcula-se a segunda e a terceira variação dos dados. Com base nos resultados, argumente por que um modelo de grau 3 é mais apropriado para descrever o fenômeno.

Tempo (h)	0	1	2	3
População($\times 10^3$)	5	6	11	26

5. O gráfico de uma função cúbica $f(x)$ intercepta o eixo x nos pontos de abscissa -2, 1 e 3. Sabe-se também que $f(0) = 6$. Determina-se a equação da função e, a partir dela, calcula-se o valor da terceira variação, $\frac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3}$, para um espaçamento $\Delta x = 1$.

4.2.4 A função racional

Motivação

Em muitos fenômenos reais, nem sempre a variável resposta cresce (ou decresce) de forma linear, e nem sempre vale a intuição "quanto mais se adiciona, mais se obtém". Em vários contextos, a presença da variável no denominador faz com que o comportamento mude radicalmente: podem surgir valores proibidos (domínio restrito), crescimento sem limite em torno de certos pontos (assíntotas verticais) e estabilização em torno de um valor-limite (assíntotas horizontais).

Esse tipo de comportamento é uma porta de entrada natural para o estudo de limites e assíntotas em Cálculo, além de preparar o raciocínio que será necessário para compreender integrais impróprias (áreas envolvendo "regiões infinitas" ou funções com crescimento explosivo próximo a pontos do domínio).

Definição 4.2.10: Função racional

Uma função f em cuja equação a variável x aparece no denominador é denominada **função racional**. Um caso elementar e muito frequente em modelagem é a relação inversa

$$f(x) = \frac{k}{x}, \qquad k > 0,$$

na qual $f(x)$ e x são grandezas inversamente proporcionais.

Linearização (ideia operacional para ajuste a dados)

Quando se suspeita do modelo $f(x) = \dfrac{k}{x}$, pode-se transformar o problema em um ajuste linear, observando que

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{x}{k} = ax, \qquad \text{em que} \qquad a = \frac{1}{k}.$$

Assim, uma relação aproximadamente linear entre x e $\dfrac{1}{f(x)}$ (em uma tabela experimental) sustenta a hipótese de um modelo racional inverso.

A função racional e O limite: Uma visão intuitiva aplicada

Na prática agrícola ou na engenharia, muitas vezes deseja-se saber o que acontece em situações extremas que não se pode (ou não se quer) testar fisicamente.
Situação 1 (O longo prazo): Ao adicionar adubo infinitamente em uma plantação, a colheita crescerá infinitamente? Não. Ela atinge um "teto" biológico (saturação). O limite matemático é a ferramenta que calcula exatamente qual é esse teto quando a quantidade de adubo "tende ao infinito".
Situação 2 (A barreira intransponível): O que acontece com a concentração de um defensivo agrícola quando o volume de água usado para diluí-lo se aproxima de zero? A concentração "explode", tornando-se tóxica. O limite ajuda a entender o comportamento da função ao se aproximar dessa zona de perigo.
O limite, portanto, não é sobre *chegar* a um ponto, mas sim sobre *descobrir para onde a função está apontando* quando se aproxima desse ponto.

Definição 4.2.11: Limite de uma função

O limite de uma função em um ponto existe quando os limites laterais existem e coincidem. Isto é, o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe se $\lim_{x\to a^-} f(x)$ e $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existem e são iguais.

- $x \to a^-$ indica que x está se aproximando de a por valores menores (pela esquerda).
- $x \to a^+$ indica aproximação por valores maiores (pela direita).
- $\lim_{x\to a^+} f(x)$ lê-se: O limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a pela direita.

Exercício resolvido 4.2.4

1. Adaptado de Fátima Sviercoski (2008). Considere a função

$$f(x) = \frac{23{,}256}{x},$$

na qual x representa o poder germinativo (em %) e $f(x)$ representa a quantidade de sementes necessária (em t) para uma área fixa. Determinar o domínio, estabelecer o conjunto imagem por análise de limites e esboçar o gráfico.

Resolução:

O domínio é determinado pela impossibilidade de divisão por zero e pela restrição física do contexto:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}.$$

A tabela numérica sugere o comportamento inverso (ao aumentar x, $f(x)$ diminui):

x (%)	$f(x)$ (t)	$\frac{1}{f(x)}$	$\frac{\Delta\left(\frac{1}{f(x)}\right)}{\Delta x}$
0,1	232,56	0,0043	
0,2	116,28	0,0086	0,043
0,3	77,52	0,0129	0,043
0,4	58,14	0,0172	0,043
0,5	46,51	0,0215	0,043
0,6	38,76	0,0258	0,043
0,7	33,22	0,0301	0,043
0,8	29,07	0,0344	0,043
0,9	25,84	0,0387	0,043

Como $\dfrac{\Delta\left(\frac{1}{f(x)}\right)}{\Delta x}$ é constante (0,043), conclui-se que $\dfrac{1}{f(x)}$ é linear em x.

Logo, $f(x) = \dfrac{k}{x}$ com:

$$a = 0{,}043 = \frac{1}{k} \Rightarrow k = \frac{1}{0{,}043} \approx 23{,}256,$$

coincidindo com o modelo dado.

Para estabelecer a imagem no domínio $0 < x \leq 1$, analisam-se os limites nos extremos do domínio.

Quando $x \to 1^-$:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{23{,}256}{x} = 23{,}256.$$

Assim, no extremo direito do domínio, $f(x)$ aproxima-se de 23,256.

Quando $x \to 0^+$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{23{,}256}{x} = +\infty.$$

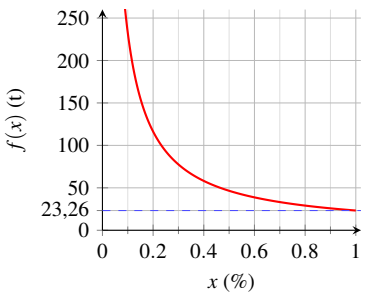
Portanto, a função cresce sem limite ao se aproximar de 0 pela direita.

Conclui-se que, no domínio adotado, a imagem é

$$I = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 23{,}256\}.$$

O valor $y = 23{,}256$ é um valor-limite (não atingido no domínio).

Um esboço do gráfico é:



Visivelmente parece que o gráfico da função toca a assíntota $y = 23,26$, mas não toca!

2. Um modelo racional típico de estabilização (saturação) pode ser descrito por

$$g(x) = \frac{Lx}{K+x}, \qquad L > 0,\ K > 0,$$

no qual x representa uma quantidade aplicada (por exemplo, dose de um insumo) e $g(x)$ representa a resposta (produção, eficiência, crescimento, etc.). Determinar domínio, contradomínio, imagem, limites e a assíntota horizontal.

Resolução:

Como $K + x \neq 0$ e, em aplicações, usualmente $x \geq 0$, toma-se

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

Adota-se contradomínio $\mathbb{R}$.

O limite quando $x \to +\infty$ é

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{Lx}{K+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{L}{K/x+1} = L.$$

Logo, $y = L$ é uma assíntota horizontal (a resposta estabiliza em torno de L).

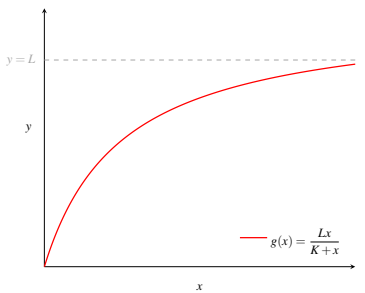
Além disso,

$$g(0) = \frac{L\cdot 0}{K+0} = 0, \qquad \text{e} \quad g(x) > 0 \text{ para } x > 0.$$

No domínio $x \geq 0$, conclui-se que a imagem é

$$I = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y < L\}.$$

A interpretação aplicada é direta: após certo ponto, o acréscimo em x produz ganhos cada vez menores em $g(x)$, pois $g(x)$ se aproxima do valor-limite L sem ultrapassá-lo. Assim, o conhecimento do modelo orienta a decisão de interromper incrementos de x quando o ganho marginal se torna desprezível.



Exercício 4.2.4

1. Uma startup de agrotecnologia tem um custo fixo mensal de R$ 10.000 para manter sua plataforma de software. O custo médio por cliente, $C(x)$, ao atender x clientes, é dado por $C(x) = \dfrac{10000}{x}$.

   a) Calcule o custo médio para 100 clientes e para 1 cliente.

   b) Utilizando a ideia de limite, investigue o que acontece com o custo médio quando o número de clientes se aproxima de zero ($x \to 0^+$). Interpreta-se o resultado: por que é economicamente inviável para a startup ter pouquíssimos clientes?

2. Uma agroindústria produz biofertilizante com um custo fixo de R$ 5.000 e um custo variável de R$ 2 por litro. O custo médio por litro, $C_m(x)$, ao produzir x litros é $C_m(x) = \frac{5000+2x}{x}$.

   a) Calcule o custo médio para produzir 100 litros e para produzir 10.000 litros.

   b) Calcule o limite $\lim_{x\to+\infty} C_m(x)$. Explique o que este "teto mínimo" de custo representa e por que, segundo o modelo, o custo médio nunca será inferior a R$ 2,00, não importa quão grande seja a produção.

3. Durante o monitoramento do crescimento de uma cultura, um modelo relacionou a taxa de fotossíntese $R(x)$ com a radiação solar x. O modelo obtido foi $R(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$. No exato momento em que a radiação atingiu $x = 3$ unidades, o sensor falhou.

   a) Mostree que ao tentar calcular $R(3)$ diretamente, obtém-se uma indeterminação $\dfrac{0}{0}$.

   b) Fatorando o numerador, simplifique a expressão para $x \neq 3$.

   c) Calcule $\lim_{x\to 3} R(x)$ usando a expressão simplificada. Argumente como o limite permitiu "prever" qual era a taxa de fotossíntese que o sensor deveria ter registrado.

4. Uma empresa de logística cobra o frete de insumos agrícolas com base no peso p (em toneladas). A função do custo $F(p)$ é descontínua:

$$F(p) = \begin{cases} \frac{500}{p} & \text{se } 0 < p \leq 10 \\ \frac{400}{p} & \text{se } p > 10 \end{cases}$$

   Investigue o que ocorre na fronteira do desconto, em $p = 10$. Calcule o limite à esquerda ($\lim_{p\to 10^-} F(p)$) e o limite à direita ($\lim_{p\to 10^+} F(p)$). Com base nos resultados, justifique por que o limite $\lim_{p\to 10} F(p)$ não existe e o que isso significa na prática para quem está calculando o frete.

5. Um biólogo compara dois modelos de crescimento populacional para uma espécie em um novo habitat.

   - **Modelo A (Cúbico):** $P_A(t) = t^3 + 10t + 100$
   - **Modelo B (Racional):** $P_B(t) = \dfrac{10000t}{100+t}$

Calcule o limite quando $t \to +\infty$ para ambos os modelos. Com base nos limites, argumente qual modelo prevê um crescimento que se estabiliza em um "teto" populacional (capacidade de suporte do ambiente) e qual prevê um crescimento explosivo e insustentável.

6. Os dados a seguir são *simulados*[a] (i.e., construídos para serem compatíveis com modelos racionais). Use-os para identificar a função, estudar limites, assíntotas e construir o gráfico.

   (a) (Modelo racional crescente com saturação) Em um ensaio agronômico, a resposta $g(x)$ (produção relativa, em %) depende da dose x de um insumo (aplicação acumulada, em unidades arbitrárias). A tabela apresenta valores de $g(x)$ para algumas doses x:

x	0	5	10	15	20	30	50
$g(x)$ (%)	0,00	10,00	13,33	15,00	16,00	17,14	18,18

   (i) Admitindo um modelo racional do tipo

$$g(x) = \frac{Lx}{K+x}, \qquad L > 0,\ K > 0,$$

   determine L e K a partir dos dados da tabela.

   (ii) Determine domínio, contradomínio e imagem no contexto do problema.

   (iii) Calcule $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ e identifique a assíntota horizontal.

   (iv) Calcule $\lim_{x\to(-K)^-} g(x)$ e $\lim_{x\to(-K)^+} g(x)$ e interprete o significado dos limites laterais.

   (v) Esboce o gráfico, indicando as assíntotas.

   (b) (Modelo racional decrescente por inversa) Em um controle de qualidade de sementes, o custo operacional estimado por hectare $f(x)$ (em unidades monetárias) depende do poder germinativo x (em %), conforme a tabela:

x (%)	50	60	70	80	90	100
$f(x)$	46,52	38,77	33,23	29,08	25,84	23,26

   (i) Admitindo um modelo racional do tipo

$$f(x) = \frac{C}{x}, \qquad C > 0,$$

   determine C a partir dos dados da tabela.

   (ii) Determine domínio, contradomínio e imagem no contexto do problema.

   (iii) Calcule $\lim_{x\to0^+} f(x)$, $\lim_{x\to0^-} f(x)$ e interprete os limites laterais.

   (iv) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e identifique a assíntota horizontal (se existir).

   (v) Esboçar o gráfico, indicando claramente a assíntota vertical e o comportamento para x grande.

[a] Os valores numéricos apresentados no exemplo são *simulados* para fins didáticos, de modo a reproduzir o comportamento de saturação de um modelo racional do tipo Michaelis–Menten. A referência *Chemistry LibreTexts*, Seção 5.3, "Michaelis–Menten Kinetics", foi utilizada como base conceitual para a forma funcional e interpretação do limite (assíntota horizontal), e não como fonte direta dos dados experimentais.

4.3 Funções Logarítmica e Exponencial

4.3.1 Motivação

A história da **função exponencial** remonta ao final do século XVII, quando Jacob Bernoulli investigava juros compostos contínuos e descobriu a constante de Euler ($e \approx 2,71828$). A função exponencial surge naturalmente em processos onde a taxa de variação é proporcional à quantidade preexistente, tornando-se o modelo por excelência para crescimento populacional, decaimento radioativo, dissipação térmica e dinâmica de epidemias.

Um século antes, John Napier introduziu os **logaritmos** (1614) para resolver um problema prático: cálculos astronômicos e de navegação exigiam multiplicações exaustivas. Sua genialidade transformou multiplicações em adições simples através de $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$. Johannes Kepler reduziu meses de cálculos para dias, e a régua de cálculo tornou-se instrumento essencial da engenharia por mais de três séculos.

No século XIX e XX, as aplicações científicas se consolidaram. Malthus modelou crescimento populacional; Rutherford descreveu o decaimento radioativo ($N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$); Richter criou a escala logarítmica para terremotos; e o pH (pH $= -\log_{10}[H^+]$) tornou-se fundamental na agronomia. A lei de Weber-Fechner revelou que percepções sensoriais seguem escalas logarítmicas.

Na era contemporânea, exponenciais e logaritmos são centrais na análise de algoritmos (busca binária reduz bilhões de elementos a 30 comparações), na aprendizagem de máquina (softmax, entropia) e em finanças quantitativas (modelo de Black-Scholes). Juntas, essas funções transcendem a álgebra elementar, constituindo o alicerce para compreensão de taxas de variação não constantes no Cálculo Diferencial e Integral.

4.3.2 Equação exponencial

Revisão de potência

Definição 4.3.1: Potência

Diz-se que a **potência** de uma base $a \in \mathbb{R}$ por um expoente $n \in \mathbb{Z}$ é a multiplicação sucessiva de a por ele mesmo, n vezes, sendo denotada por a^n. Assim, têm-se:

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}, & \text{se } n > 0 \\ 1, & \text{se } n = 0,\ a \neq 0 \\ \dfrac{1}{a^{-n}}, & \text{se } n < 0,\ a \neq 0 \end{cases}$$

Exercício resolvido 4.3.2

1. Desenvolva as potências:

a) 2^3

b) 3^4

c) $(-5)^3$

d) $(-8)^2$

e) 2^{-1}

f) 4^{-2}

g) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2}$

Resolução:

a) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

b) $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

c) $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

d) $(-8)^2 = (-8) \cdot (-8) = 64$

e) $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$

f) $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

g) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{25}} = \frac{25}{4}$

Propriedades

As potências obedecem às seguintes propriedades fundamentais, sendo $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$ e $m, n \in \mathbb{Z}$, com $n \neq 0$:

i. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

ii. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

iii. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

iv. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

v. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

vi. $a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$

vii. $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$

viii. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0)$

Equações exponenciais

A resolução de equações exponenciais toma como base a propriedade viii, desse modo resume-se em resolver processos algébricos com o uso das propriedades de i a vii, reduzir a uma igualdade de duas potências de bases iguais, e por fim igualar os expoentes. Em suma:

$$a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$$

Exercício resolvido 4.3.2

2. Resolva as seguintes equações:

a) $2^x = 32$

b) $7^x = \sqrt[3]{49}$

c) $11^x = 121^{\sqrt{2}}$

d) $\left(\frac{5}{4}\right)^x = \frac{4}{25}$

e) $3^{x+1} = 243$

f) $5^{3x-1} = \left(\frac{1}{25}\right)^{2x+1}$

g) $5^{-x^2+4} = 125$

h) $3^x + 3^{x+1} - 3^{x-1} = \frac{11}{9}$

i) $2^{x-3} + 2^{x-4} = 2^{x-2} - 2^{x-1} + 14$

j) $5^{2x} - 2 \cdot 5^x - 3 = 0$

Resolução:

a) $2^x = 32$. Da definição de potência sabe-se que $32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$, então:

$$2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5. \text{ Logo, } \boxed{S = \{5\}.}$$

b) Note que $\sqrt[3]{49} = 49^{\frac{1}{3}}$ e $49 = 7 \cdot 7 = 7^2$. Assin:

$$7^x = \sqrt[3]{49} \quad \Rightarrow \quad 7^x = \sqrt[3]{7^2} \quad \Rightarrow \quad 7^x = \underbrace{(7^2)^{\frac{1}{3}}}_{\text{Props. vii}}$$

$$\Rightarrow \quad 7^x = \underbrace{7^{2 \cdot \frac{1}{3}}}_{\text{Props. iii}} \quad \Rightarrow \quad 7^x = 7^{2/3} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Logo, } \boxed{S = \left\{\frac{2}{3}\right\}.}$$

c) $11^x = 121^{\sqrt{2}}$. Como $121 = 11^2$, então:

$$11^x = (11^2)^{\sqrt{2}} = 11^{2\sqrt{2}} \Rightarrow x = 2\sqrt{2}. \text{ Logo, } \boxed{S = \left\{2\sqrt{2}\right\}.}$$

d) $\left(\frac{5}{4}\right)^x = \frac{4}{25}$. Note que $\frac{4}{25} = \left(\frac{5}{4}\right)^{-2}$, então:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^x = \left(\frac{5}{4}\right)^{-2} \Rightarrow x = -2. \text{ Logo, } \boxed{S = \{-2\}.}$$

e) $3^{x+1} = 243$. Como $243 = 3^5$, então:

$$3^{x+1} = 3^5 \Rightarrow x+1 = 5 \Rightarrow x = 4. \text{ Logo, } \boxed{S = \{4\}.}$$

f) $5^{3x-1} = \left(\frac{1}{25}\right)^{2x+1}$. Como $25 = 5^2$ e $\frac{1}{25} = 5^{-2}$, então:

$$5^{3x-1} = (5^{-2})^{2x+1} = 5^{-2(2x+1)} = 5^{-4x-2} \Rightarrow 3x-1 = -4x-2 \Rightarrow 7x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{7}.$$

Logo, $\boxed{S = \left\{-\frac{1}{7}\right\}.}$

g) $5^{-x^2+4} = 125$. Note que $125 = 5^3$, então:

$$5^{-x^2+4} = 5^3 \Rightarrow -x^2+4 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1. \text{ Logo, } \boxed{S = \{-1,1\}.}$$

h) $3^x + 3^{x+1} - 3^{x-1} = \frac{11}{9}$. Reescrevendo o primeiro membro em função de 3^x, tem-se:

$$3^x + 3 \cdot 3^x - \frac{1}{3} \cdot 3^x = \left(1 + 3 - \frac{1}{3}\right) 3^x = \frac{11}{3} 3^x$$

Assim:

$$\frac{11}{3} 3^x = \frac{11}{9} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3} = 3^{-1} \Rightarrow x = -1. \text{ Logo, } \boxed{S = \{-1\}.}$$

i) $2^{x-3} + 2^{x-4} = 2^{x-2} - 2^{x-1} + 14$. Divide-se todos os termos por 2^{x-4}, a menor potência comum:

$$\frac{2^{x-3}}{2^{x-4}} + 1 = \frac{2^{x-2}}{2^{x-4}} - \frac{2^{x-1}}{2^{x-4}} + \frac{14}{2^{x-4}} \Rightarrow 2 + 1 = 4 - 8 + \frac{14}{2^{x-4}}$$

$$3 = -4 + \frac{14}{2^{x-4}} \Rightarrow \frac{14}{2^{x-4}} = 7 \Rightarrow 2^{x-4} = 2 \Rightarrow x - 4 = 1 \Rightarrow x = 5. \text{ Logo, } \boxed{S = \{5\}.}$$

j) $5^{2x} - 2 \cdot 5^x - 3 = 0$. Primeiro faz-se a substituição $y = 5^x$. Assim, a equação torna-se:

$$y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 4 \cdot 3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$y = 3 \quad \text{ou} \quad y = -1$$

Como $y = 5^x > 0$, descarta-se $y = -1$, então:

$$5^x = 3$$

Esta é uma *equação exponencial irredutível*, pois não é possível reescrever 3 como potência de 5. Para isolar x nesse tipo de equação é necessário a definição de *logaritmo*.

Exercício 4.3.2

1. (UFSE) Efetuando-se $3^{3^{-1}}$, obtém-se:

   (A) $\sqrt[3]{3}$ (B) -27 (C) $\frac{1}{27}$ (D) -9 (E) $\frac{1}{9}$

2. (UFRS) O valor de x que verifica a equação: $27^{x-1} = \sqrt{\sqrt{9^x}}$ é:

   (A) $0,4$ (B) $0,8333$ (C) $1,2$ (D) $2,5$ (E) inexistente

3. (UEL-PR) A solução da equação $2^{x-1} - 2^{x+2} = -56$ é um número:

   (A) primo (B) múltiplo de 3 (C) divisível por 4
   (D) múltiplo de 5 (E) divisível por 7

4. (FEI-SP) Resolva $\frac{4^x + 4}{5} = 2^x$.

5. (FGV-SP) Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$.
   Sugestão: divida os dois membros da equação por 9^x.

6. (UFPA) Uma reserva florestal possui 10 000 árvores. Determine em quantos anos a quantidade de árvores estará reduzida à oitava parte, se a função que representa a quantidade de árvores por ano é $y(t) = 10000 \cdot 2^{-t}$.

7. (Unicamp-SP) O processo de resfriamento de um determinado corpo é descrito por: $T(t) = T_A + \alpha \cdot 3^{\beta t}$, onde $T(t)$ é a temperatura do corpo, em graus Celsius, no instante t, dado em minutos, T_A é a temperatura ambiente, suposta constante, e α e β são constantes. O referido corpo foi colocado em um congelador com temperatura de -18 °C. Um termômetro no corpo indicou que ele atingiu 0 °C após 90 minutos e chegou a -16 °C após 270 minutos.

   a) Encontre os valores numéricos das constantes α e β.

   b) Determine o valor de t para o qual a temperatura do corpo no congelador é apenas $\left(\frac{2}{3}\right)$ °C superior à temperatura ambiente.

4.3.3 Função logarítmica

O Logaritmo

Definição 4.3.2: Logaritmo

O **logaritmo** de um número b em uma base a é o expoente x ao qual a base a deve ser elevada para obter o número b. Algebricamente:

$$\log_a b = x \quad \leftrightarrow \quad a^x = b$$

Se lê: O logaritmo de b na base a é igual a x se, e somente se a elevado a x é igual a b.

(a) **Condições de existência:**
- $a > 0$ e $a \neq 1$
- $b > 0$

(b) **Nomenclatura:**
- a: base
- b: logaritmando
- x: logaritmo

Exercício resolvido 4.3.3

1. A partir da definição de logaritmo, tem-se que o:

a) $\log_2 32 = 5$, pois $2^5 = 32$

b) $\log_3 27 = 3$, pois $3^3 = 27$

c) $\log_{10} \frac{1}{10} = -1$, pois $10^{-1} = \frac{1}{10}$

d) $\log_{\frac{1}{5}} 25 = -2$, pois $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 25$

e) $\log_{11} \sqrt[3]{11} = \frac{1}{3}$, pois $11^{1/3} = \sqrt[3]{11}$

f) $\log_3 1 = 0$, pois $3^0 = 1$

2. (UFAM) O logaritmo de $\sqrt{8}$ na base 2 é:

(A) $3/2$ (B) 3 (C) $2/3$ (D) $1/2$ (E) $1/3$

Resolução:

Para responder esse problema basta lembrar da Definição 4.3.2 de logaritmo e inserir as informações de acordo e, operar segundo a Definição de potência 4.3.1 e propriedades de potência:

$$\log_2 \sqrt{8} \Rightarrow \log_2 (8)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \log_2 \left[(2)^3\right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \log_2 (2)^{\frac{3}{2}} = x \Leftrightarrow 2^x = 2^{3/2} \therefore \boxed{x = \frac{3}{2}}.$$

Resposta: alternativa (A)

3. Retorne ao Exercício Resolvido 4.3.2, questão 2, letra j, e esboce a solução segundo a definição de logaritmo.

Resolução:

Lá, a solução foi encerrada na equação exponencial irredutível $5^x = 3$. A definição de logaritmo diz que $5^x = 3 \leftrightarrow \log_5 3 = x$. Deste modo, a solução da equação é: $\boxed{S = \{\log_5 3\}}$.

4. (UFRS) O valor para que x verifique a equação $3^x = 6$ é:

(A) 1,5 (C) O logaritmo de 3 na base 10 (E) o logaritmo de 3 na base 6

(B) 2 (D) O logaritmo de 6 na base 3

Resolução:

Aqui, segundo a Lógica Matemática, basta lembrar que o $\leftrightarrow$ na definição de logaritmo garante a ida e a volta; assim a definição pode ser reescrita como:

$$a^x = b \quad \leftrightarrow \quad \log_a b = x.$$

Transpondo a equação $3^x = 6$ do problema para a definição conforme acima, tem-se

$$3^x = 6 \quad \leftrightarrow \quad \log_3 6 = x,$$

que descritivamente se lê como: *o logaritmo de 6 na base 3.*

Resposta: alternativa (D)

5. Resolva a equação $2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 21 = 0$.

Resolução:

Por trata-se de uma equação exponencial com potências de mesma base, usa-se a substituição:

$$y = 2^x \quad \Rightarrow \quad 2^{2x} = (2^x)^2 = y^2$$

Assim, a equação se torna:

$$y^2 - 10y + 21 = 0$$

Resolvendo a equação quadrática:

$$y = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 84}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$y = \frac{10 \pm 4}{2} \quad \Rightarrow \quad y = 7 \quad \text{ou} \quad y = 3$$

Voltando para a variável original:

$$2^x = 7 \quad \text{ou} \quad 2^x = 3$$

Aplicando a definição de logaritmo em cada equação exponencial irredutível obtida, tem-se:

$$x = \log_2 7 \quad \text{ou} \quad x = \log_2 3$$

$$\boxed{S = \{\log_2 3,\ \log_2 7\}.}$$

Propriedades dos logaritmos

- **Decorrentes da definição:**

I. $\log_a 1 = 0$ II. $\log_a a = 1$ III. $\log_a a^p = p$ IV. $a^{\log_a b} = b$

- **Operatórias:**

V. $\log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$

VI. $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$

VII. $\log_a m^p = p \log_a m$

VIII. $\log_{(a^p)} b = \frac{1}{p} \cdot \log_a b$

IX. $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$

X. $\log_{\sqrt[n]{a}} b = n \log_a b$

XI. Mudança de base:
$$\log_n m = \frac{\log_a m}{\log_a n}$$

XII. $\operatorname{colog}_a b = -\log_a b =$
$$= \log_a\left(\frac{1}{b}\right) = \log_{1/a} b$$

XIII. $\log_a b = \log_a c \Rightarrow b = c$

Convenções:

(A) $\log_{10} x = \log x$ (B) $\log_e x = \ln x$

O número irracional $e \approx 2,71...$, base dos logaritmos naturais (ln), será tratado em seção independente;
Por serem das mais importantes, as propriedades XI e XIII são, respectivamente, demonstradas abaixo.

Demonstração.
Sejam

$$\log_n m = x \Leftrightarrow n^x = m \quad (\text{I})$$
$$\log_a m = y \Leftrightarrow a^y = m \quad (\text{II})$$
$$\log_a n = z \Leftrightarrow a^z = n \quad (\text{III})$$

Igualando (I) a (II) e substituindo (III) em (I), tem-se

$$(a^z)^x = a^y \Rightarrow a^{x \cdot z} = a^y \Rightarrow x \cdot z = y \Rightarrow x = \frac{y}{z}.$$

Logo,

$$\boxed{\log_n m = \frac{\log_a m}{\log_a n}.}$$

□

Demonstração.
Seja

$$\log_a b = \log_a c = x,$$

então, pela definição de logaritmo:

$$a^x = b,$$
$$a^x = c.$$

Logo,

$$b = c.$$

□

Exercício resolvido 4.3.3

6. Calcule o valor de $P = 3\cdot\log_4 64 - \frac{1}{2}\cdot\log_5\sqrt{5} + \log_{10}0{,}1$

Resolução:

$$
\begin{aligned}
P &= 3 \cdot \log_4 64 - \frac{1}{2} \cdot \log_5\sqrt{5} + \log_{10}0{,}1 \\
&= 3 \cdot \underbrace{\log_4 64}_{\underbrace{\log_4(4^3)=3}_{\text{Prop. (III) } \log_a a^p=p}} - \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\log_5\sqrt{5}}_{\underbrace{\log_5(5^{1/2})=\frac{1}{2}}_{\text{Prop. (III) } \log_a a^p=p}} + \underbrace{\log_{10}0{,}1}_{\underbrace{\log_{10}(10^{-1})=-1}_{\text{Prop. (III) } \log_a a^p=p}} \\
&= \underbrace{3\cdot 3}_{9} - \underbrace{\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}}_{\frac{1}{4}} + (-1) \\
&= 9 - \frac{1}{4} - 1 \\
&= 9\cdot\frac{4}{4} - \frac{1}{4} - 1\cdot\frac{4}{4} \\
&= \frac{36-1-4}{4} \\
&\Rightarrow \boxed{P = \frac{31}{4}}.
\end{aligned}
$$

7. Calcule $y = \log_2 1 + \log_2 2 + 3\log_2 27 - 2\log_5\frac{1}{25}$.

Resolução:

$$
\begin{aligned}
y &= \log_2 1 + \log_2 2 + 3\log_3 27 - 2\log_5\frac{1}{25} = \underbrace{\log_2 1}_{=0}^{\text{Prop. I}} + \underbrace{\log_2 2}_{=1}^{\text{Prop. II}} + 3\log_3 27 - 2\log_5 25^{-1} \\
&= 0 + 1 + \underbrace{3\log_3 3^3}_{=3\cdot 3\cdot 1}^{\text{Props. VII e II}} + \underbrace{(-2)\cdot(-1)\log_5 25}_{=2\cdot 1\cdot\log_5 5^2}^{\text{Props. VII e II}} = 1 + 9 + 2\cdot 2 = 10 + 4 = 14
\end{aligned}
$$

8. Calcule $x = 5^{-1+\log_5 2}$.

Resolução:

$$
x = 5^{-1+\log_5 2} = \underbrace{5^{-1}\cdot 5^{\log_5 2}}_{\text{Prop. i}} = \underbrace{\frac{1}{5^1}}_{=\frac{1}{5}}^{\text{Prop. vii}} \cdot \underbrace{5^{\log_5 2}}_{=2}^{\text{Prop. IV}} = \frac{1}{5}\cdot 2 = \boxed{\frac{2}{5}}
$$

9. Calcular o logaritmo na base 10 da expressão volumétrica $S = \frac{4}{3}\pi r^3$

Resolução:

Pela propriedade XIII basta aplicar logaritmo de base 10 (Convenção A) em ambos os lados da expressão volumétrica e usar as demais propriedades operatórias:

$$\begin{aligned}\log S &= \log\left(\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3\right)\\ &= \underbrace{\log 4 - \log 3 + \log\pi}_{\text{Propriedade V e VI}} + \underbrace{3\log r}_{\text{Propriedade VII}}\end{aligned}$$

Abra a calculadora científica do celular e perceba a função log Depois digite o número desejado e aperte o sinal de igual $(=)$. Perceba que:

$$\begin{aligned}&= \log 4 - \log 3 + \log\pi + 3\log r\\ &\approx 0.6021 - 0.4771 + 0.4971 + 3\log r\\ &= \boxed{0,6221 + 3\log r}\end{aligned}$$

10. Calcule o valor de $\log 9000$ e $\ln 9000$.

Resolução:

Reduzindo o número 9000 em um produto de potencias tem-se que $9000 = 9\times 10^3 = 3^2\times 10^3$.

Pela propriedade XIII pode-se aplicar logaritmos de mesma base em ambos os lados da igualdade. Note que na calculadora de seu celular também tem a tecla ln.

Usando a convenção A:

$$\begin{aligned}\log 9000 &= \log(3^2\times 10^3)\\ &= \underbrace{\log(3^2)+\log(10^3)}_{\text{Propriedade V}}\\ &= \underbrace{2\log 3 + 3\log 10}_{\text{Propriedade VII}}\\ &\approx 2(0,4771)+3(1)\\ &\approx 0,9542+3\\ &= \boxed{3,9542}.\end{aligned}$$

Usando a convenção B:

$$\begin{aligned}\ln 9000 &= \ln(3^2\times 10^3)\\ &= \underbrace{\ln(3^2)+\ln(10^3)}_{\text{Propriedade V}}\\ &= \underbrace{2\ln 3 + 3\ln 10}_{\text{Propriedade VII}}\\ &\approx 2(1,0986)+3(2,3026)\\ &\approx 2,1972+6,9078\\ &= \boxed{9,105}.\end{aligned}$$

11. Resolva a equação $x^{\log_2 x} = 256x^2$.

Resolução:

Aplicando $\log_2$ em ambos os lados da equação, tem-se:

$$\begin{aligned}\log_2\left(x^{\log_2 x}\right) &= \log_2(256x^2)\\ \log_2 x\cdot\log_2 x &= \log_2(8^2x^2)\end{aligned}$$

$$(\log_2 x)^2 = \log_2 8^2 + \log_2 x^2$$
$$(\log_2 x)^2 = 8 + 2\log_2 x \quad \text{(fazendo } y = \log_2 x\text{)}$$
$$(\log_2 x)^2 = 8 + 2\log_2 x \quad \Rightarrow \quad y^2 - 2y - 8 = 0, \text{ donde:}$$
$$y = 4 \quad \text{ou} \quad y = -2 \quad \text{(voltando a variável } x\text{)}$$

$$y = \log_2 = 4 \Rightarrow x = 2^4 = 16 \quad \text{ou} \quad y = \log_2 = -2 \Rightarrow x = 2^{-2} = \frac{1}{4} \ \therefore \boxed{S = \left\{\frac{1}{4}, 16\right\}}.$$

Exercício 4.3.3

1. (ESA) O valor da expressão $A = \log_2\left(\frac{1}{2}\right) + \log_8(32)$ é:

2. (Mack-SP) Sabendo que $x^2 + 4x + 2\log_7 m^2$ é um trinômio quadrado perfeito, determine o logaritmo de m na base $7m$.

3. (UFC) Sendo a e b reais positivos tais que $\log_{\sqrt{3}} a = 224$ e $\log_{\sqrt{3}} b = 218$, calcule o valor de $\dfrac{a}{b}$.

4. (Fuvest-SP) Se $\log 8 = a$, então $\log 5$ vale:

   (A) a^3 (B) $5a - 1$ (C) $\dfrac{2a}{3}$ (D) $1 + \dfrac{a}{3}$ (E) $1 - \dfrac{a}{3}$

5. (Fuvest-SP) Sabendo que $a^2 + b^2 = 70ab$, calcule $\log \dfrac{(a+b)^2}{ab}$ em função de $m = \log_5 2$ e $n = \log_5 3$.

6. (UFAL) Dado que $\log_{10} 2 = 0,30$, o valor de $\log_5 2$ é:

   (A) $\dfrac{3}{50}$ (B) $\dfrac{3}{10}$ (C) $\dfrac{3}{8}$ (D) $\dfrac{3}{7}$ (E) $\dfrac{3}{5}$

7. (UFPA) Dadas as afirmações

   I - $\log_3(a \cdot b) = \log_3 a \cdot \log_3 b, \quad a > 0$ e $b > 0$

   II - $\log_3 2 = \dfrac{1}{\log_2 3}$

   III - $\log_3 2 \cdot \log_2 5 \cdot \log_5 3 = 1$

   IV - $\log_3 \dfrac{a}{b} = \dfrac{\log_3 a}{\log_3 b}, \quad a > 0$ e $b > 0$

   pode-se afirmar que:

   (A) todas são verdadeiras.
   (B) somente I, II e IV são verdadeiras.
   (C) apenas II e III são verdadeiras.
   (D) apenas II, III e IV são verdadeiras.
   (E) todas são falsas.

8. (ESA) Adotando-se $\log 2 = x$ e $\log 3 = y$, o valor de $\log_5 120$ será dado por:

9. (ESA) Sejam $f : \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x$, respectivamente. O valor de $f \circ g(2)$ é:

10. (Fuvest-SP) Sabendo-se que $5^p = 2$, pode-se concluir que $\log_2 100$ é igual a:

(A) $\dfrac{2}{p}$ (B) $2p$ (C) $2+p^2$ (D) $2+2p$ (E) $\dfrac{2+2p}{p}$

11. (PUC-SP) Se $a = \log_8 225$ e $b = \log_2 15$, então:

(A) $a = \dfrac{2b}{3}$ (B) $b = \dfrac{2a}{3}$ (C) $a \cdot b = \dfrac{2}{3} \cdot \log_2 15$

(D) $a = \dfrac{b}{3}$ (E) $b = \dfrac{a}{3}$

12. (FGV-SP) Sabendo-se que $\log 2 = m$ e $\log 3 = n$, podemos afirmar que $\log 108$ vale:

(A) m^2+n^3 (B) m^3+n^2 (C) $2m+3n$ (D) $3m+2n$ (E) $6mn$

A Função logarítmica

Definição 4.3.3: Função logarítmica

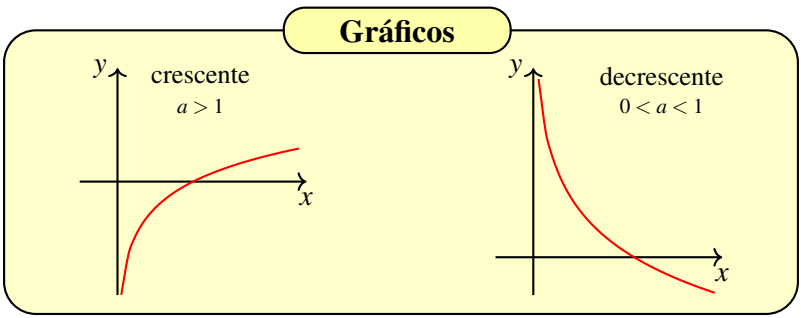
Seja

$$a \in \mathbb{R}, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

A **função logarítmica de base** a é a função

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} : \qquad f(x) = \log_a x$$

Gráficos



Exercício resolvido 4.3.3

12. Analise e esboce os gráficos das seguintes funções:

a) $f(x) = \log_2 x$

b) $g(x) = \log_{1/2} x$

c) $h(x) = \log_2(x-1)$

d) $p(x) = (\log_2 x) + 1$

Resolução:

a) **Função Crescente:** Como a base é $a = 2 > 1$, a função é estritamente crescente. O gráfico cruza o eixo x em $(1,0)$ e tem o eixo y como assíntota vertical.

b) **Função Decrescente:** Como a base é $a = 1/2$ (entre 0 e 1), a função é estritamente decrescente. O gráfico também cruza o eixo x em $(1,0)$.

c) **Deslocamento Horizontal:** O gráfico de $h(x)$ é idêntico ao de $f(x)$, mas deslocado 1 unidade para a direita. A assíntota vertical passa a ser a reta $x = 1$.

d) **Deslocamento Vertical:** O gráfico de $p(x)$ é idêntico ao de $f(x)$, mas deslocado 1 unidade para cima. O ponto que era $(1,0)$ agora é $(1,1)$.

13. (Química / A Escala de pH) A acidez de uma solução é medida pela concentração de íons de hidrogênio, $[H^+]$. Como essa concentração pode variar enormemente, usa-se a escala de pH, definida por:

$$\text{pH} = -\log_{10}[H^+]$$

Analise o que um aumento de 1 unidade no pH (por exemplo, de 3 para 4) significa para a acidez da solução.

Resolução: A escala logarítmica transforma uma relação multiplicativa em aditiva. Se o pH aumenta em 1 unidade, isso significa que o valor de $\log_{10}[H^+]$ diminuiu em 1. Para que o logaritmo na base 10 diminua em 1, seu argumento (a concentração $[H^+]$) deve ser dividido por 10. **Conclusão:** Um aumento de 1 ponto no pH representa uma **diminuição de 10 vezes** na concentração de íons $[H^+]$, tornando a solução 10 vezes menos ácida. Isso ilustra o poder da função logarítmica para linearizar e simplificar a análise de grandezas com grande variação.

Exercício 4.3.3

13. Esboce, em planos cartesianos distintos, os gráficos das seguintes funções, identificando o domínio, a imagem e a assíntota vertical:

    a) $f(x) = \log_3 x$ (Função crescente)

    b) $g(x) = \log_{1/3} x$ (Função decrescente)

    c) $h(x) = \log_3(x+2)$ (Função com deslocamento)

14. No mesmo plano cartesiano, esboce os gráficos de $y = \log_2 x$ e $y = \log_{10} x$ para $x > 0$. Qual dos gráficos "cresce mais rápido" para $x > 1$? Justifique sua resposta com base no significado da base do logaritmo.

15. Determine o domínio da função $f(x) = \log_5(x^2 - 4)$. Utilizando a ideia de limite, descreva o que acontece com o valor de $f(x)$ quando x se aproxima de 2 pela direita ($x \to 2^+$). Qual a relação deste comportamento com a assíntota vertical do gráfico?

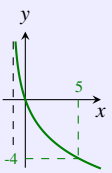
16. (UFG) Considere as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ e $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, dadas por $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$, com $0 < a \neq 1$. Analise as afirmações seguintes:

    a) Se $a > 1$, ambas as funções são crescentes.

    b) As funções compostas $f(g(x))$ e $g(f(x))$ são iguais a x.

    (c) Se $0 < a < 1$, então a equação $f(x) = g(x)$ possui solução.

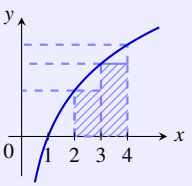
17. (UFMG) Nessa figura, está representado o gráfico da função



$$f(x) = \log_2\left(\frac{1}{ax+b}\right).$$

    Qual é o valor de $f(1)$?

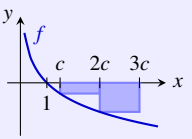
18. (UFG) A curva ao lado representa o gráfico da função



$$y = \log_x x,\ x > 0.$$

    Qual o valor da área hachurada?

19. (UFMA) A figura ao lado representa o gráfico da função $f(x) = \log_a\left(\frac{1}{x}\right)$.



    Mostre que o valor da área colorida é $-c \cdot (\log_a 2c^2)$ e explique por que esse valor é um número positivo.

20. (FGV-SP) A função $P = 60 \cdot (1,04)^t$ representa a estimativa do Produto Interno Bruto em bilhões de dólares (PIB) de um país no ano t adotando-se a seguinte convenção:

    $t = 0$ representa o ano de 1996;
    $t = 1$ representa o ano de 1997;
    $t = 2$ representa o ano de 1998;
    e assim por diante. Use a calculadora e responda:

    a) Qual é a estimativa do PIB em 2005?

    b) Em que ano o PIB será o dobro do que era em 1996? E o triplo?

    c) Em geral, em que ano o PIB será igual ao PIB inicial multiplicado por x?

21. Química / pH - A acidez de um suco de limão foi medida como pH $= 2$, e a de um tomate como pH $= 4$. Utilizando a definição pH $= -\log_{10}[H^+]$, determine quantas vezes a concentração de íons de hidrogênio $[H^+]$ no suco de limão é maior que no tomate.

22. Acústica / A Escala Decibel - O nível sonoro β, em decibéis (dB), é definido por $\beta = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$, onde I é a intensidade do som e I_0 é a menor intensidade audível pelo ser humano. O som de uma conversa normal tem uma intensidade I cerca de 1.000.000 de vezes maior que I_0.

    a) Calcule o nível sonoro (em dB) dessa conversa.

    b) Se a intensidade do som de um motor dobrar, o seu nível em decibéis também dobra? Justifique usando as propriedades do logaritmo.

Equações logarítmicas

Definição 4.3.4: Equação Logarítmica

Denomina-se equação logarítmica toda igualdade que envolve logaritmos nos quais a incógnita aparece no logaritmando, na base, ou em ambos.

Para a resolução de equações logarítmicas, adota-se um procedimento rigoroso baseado em três etapas fundamentais:

1. **Condições de Existência (CE):** Estabelece-se que todo logaritmando deve ser estritamente positivo (> 0) e toda base deve ser estritamente positiva e diferente de um (> 0 e $\neq 1$).

2. **Resolução Algébrica:** Aplicam-se a definição fundamental ($\log_b a = x \iff b^x = a$) e as propriedades operatórias (como a injetividade: $\log_b x = \log_b y \iff x = y$ — propriedade XXIII) para isolar a incógnita.

3. **Validação:** Verifica-se se os valores encontrados na etapa algébrica satisfazem as Condições de Existência estabelecidas no primeiro passo.

Perceba que...

A etapa de validação (verificação das Condições de Existência) é **obrigatória** em equações logarítmicas. Frequentemente, a resolução algébrica gera "raízes estranhas"que tornariam o logaritmando negativo ou nulo, devendo ser descartadas do conjunto solução.

Exercício resolvido 4.3.3

14. Resolva a equação $\log_2(3x-5) = 4$.

Resolução:

Passo 1: Condição de Existência (CE)
O logaritmando deve ser positivo:

$$3x-5>0 \implies 3x>5 \implies x>\frac{5}{3}$$

Passo 2: Resolução Algébrica
Aplica-se a definição fundamental de logaritmo ($\log_b a = c \iff b^c = a$):

$$\log_2(3x-5)=4 \implies 2^4 = 3x-5$$

$$16 = 3x-5$$

$$3x = 21 \implies x = 7$$

Passo 3: Validação
Verifica-se se $x=7$ satisfaz a CE ($x > 5/3 \approx 1,66$). Como $7 > 1,66$, a raiz é válida.

Conjunto solução: $\boxed{S=\{7\}}$.

15. Determine o conjunto solução da equação $\log_3(x^2-4x) = \log_3(x-4)$.

Resolução:

Passo 1: Condições de Existência (CE) Ambos os logaritmandos devem ser positivos simultaneamente:

- (I) $x^2-4x>0 \implies x(x-4)>0 \implies x<0$ ou $x>4$
- (II) $x-4>0 \implies x>4$

A interseção das condições (I) e (II) resulta na CE final: $x>4$.

Passo 2: Resolução Algébrica Como as bases são iguais, igualam-se os logaritmandos (propriedade da injetividade):

$$x^2-4x = x-4 \implies x^2-5x+4=0$$

Resolve-se a equação quadrática (por soma e produto ou Bháskara): As raízes são $x_1=1$ e $x_2=4$.

Passo 3: Validação Confrontam-se as raízes encontradas com a CE ($x>4$):

- Para $x=1$: Falso, pois $1 \not> 4$. (Raiz estranha).
- Para $x=4$: Falso, pois a condição é estritamente maior ($4 \not> 4$). O logaritmando zeraria.

Como nenhuma das raízes algébricas satisfaz a condição de existência, a equação não possui solução real.

Conjunto solução: $\boxed{S=\varnothing}$.

Exercício 4.3.3

23. (UFBA) O logaritmo de $y = 24 - 2x$ na base x é 2. Calcule o valor de x.

24. (UFSC) O valor de x compatível para a equação $\log(x^2 - 1) - \log(x - 1) = 2$, é: (lembre-se que a base é 10)

25. (UFMS) Determine o conjunto solução da equação $\log_4 x + \log_2 x + \log_8 x = 11$; após resolvê-la, verifique a condição de existência.

26. (PUC-SP) Aumentando um número x de 16 unidades, seu logaritmo na base 3 aumenta de 2 unidades. Qual é o valor de x?

27. (UFOP-MG) Sabendo-se que $\log_5 \sqrt{x-1} + \log_5 \sqrt{x+1} = \frac{1}{2}\log_3 3$, determine o valor de $\log_x 8$, supondo $x > 1$.

28. (UFMG) Resolva a equação $2\log x + \log b - \log 3 = \log\left(\frac{9b}{x^4}\right)$, em que log representa o logaritmo decimal.

29. (Unicamp-SP) Resolva, em $\mathbb{R}$, o sistema $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4 \\ xy = 8 \end{cases}$

30. (UFPA) Encontre a solução real da equação $\log(1 + 5^x - 1) + \log 5^{x-1} = \dfrac{1}{\log_2 10}$.

31. (UFMT) Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\log_x(1 - |x|) = 1$.

32. (UFMG) Seja f uma função real de variável real dada por

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - \log_{10} x^2}.$$

Então, $f(-10)$:

(A) é igual a -22 (B) é igual a -18 (C) é igual a -2

(D) é igual a 2 (E) não está definido

33. (UFPR) Para determinar a rapidez com que se esquece de uma informação, foi efetuado um teste em que listas de palavras eram lidas a um grupo de pessoas e, num momento posterior, verificava-se quantas dessas palavras eram lembradas. Uma análise mostrou que, de maneira aproximada, o percentual S de palavras lembradas, em função do tempo t, em minutos, após o teste ter sido aplicado, era dado pela expressão:

$$S = -18 \cdot \log(t + 1) + 86$$

a) Após 9 minutos, que percentual da informação inicial era lembrado?

b) Depois de quanto tempo o percentual S alcançou 50%?

Inequações logarítmicas

Definição 4.3.5: Inequação logarítmica

Inequação logarítmica é aquela que envolve a variável dentro de uma função logarítmica com a presença das desigualdades $\gtrless$. **Sua resolução exige o cuidado com o domínio e com o valor da base** e além disso:

- Se $a > 1$, mantém-se o sentido da desigualdade:

$$\begin{cases} \log_a x > log_a y \quad \Rightarrow \quad x > y \\ \log_a x < log_a y \quad \Rightarrow \quad x < y \end{cases}$$

- Se $0 < a < 1$, inverte-se o sentido da desigualdade:

$$\begin{cases} \log_a x > log_a y \quad \Rightarrow \quad x < y \\ \log_a x < log_a y \quad \Rightarrow \quad x > y \end{cases}$$

Perceba que...

Os sinais **>** e **<** podem ser trocados por $\geq$ e $\leq$.

Observação

Antes de resolver inequações logarítmicas, deve-se sempre considerar a **condição de existência**:

O logaritmando deve ser positivo.

Exercício resolvido 4.3.3

16. Resolva:

a) $\log_4 x < 3$

$$\log_4 x < \log_4 4^3 \Rightarrow x < 4^3 = 64.$$

$$\boxed{S =]0, 64[.}$$

b) $\log_{1/3} x < 4$

$$0 < \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \text{inverte-se o sinal:} \quad x > \left(\frac{1}{3}\right)^4.$$

$$\boxed{S = \left]\frac{1}{81}, +\infty\right[.}$$

c) $\log_3(x+2) + \log_3(x-3) \geq 0$

$$\log_3[(x+2)(x-3)] \geq \log_3 1 \Rightarrow (x+2)(x-3) \geq 1.$$

Após simplificação:

$$x^2 - x - 7 \geq 0.$$

Resolvendo:

$$x \leq \frac{1-\sqrt{29}}{2} \quad \text{ou} \quad x \geq \frac{1+\sqrt{29}}{2}.$$

Considerando as condições de existência ($x > 3$):

$$\boxed{S = \left[\frac{1+\sqrt{29}}{2}, +\infty\right[.}$$

17. (Enem/2025) Um empresário utiliza máquinas cuja pressão interna P, em atmosfera, depende do tempo contínuo de utilização t, em hora, e de um parâmetro positivo K, que define o modelo da máquina, segundo a expressão:

$$P = 4 \cdot \log[-K \cdot (t+1) \cdot (t-19)]$$

O fabricante dessas máquinas recomenda ao usuário que a pressão interna desse tipo de máquina não ultrapasse 10 atmosferas durante seu funcionamento. O empresário pretende comprar novas máquinas desse tipo que deverão funcionar, diariamente, por um período contínuo de 10 horas. Para isso, precisa definir o modelo de máquina a ser adquirida escolhendo o maior valor possível do parâmetro K, atendendo à recomendação do fabricante.

O maior valor a ser escolhido para K é:

A) $10^{0,5}$ B) 10^8 C) $\frac{10^{2,5}}{84}$ D) $\frac{10^{2,5}}{99}$ E) 25×10^{-2}

Resolução:

Para garantir que a pressão não ultrapasse 10 atmosferas durante todo o período de 10 horas, deve-se encontrar o valor máximo da função de pressão no intervalo $t \in [0, 10]$.

A pressão P é uma função crescente do logaritmando. Portanto, a pressão máxima ocorre quando a expressão quadrática abaixo atinge seu valor máximo:

$$f(t) = -(t+1)(t-19)$$

Expandindo a expressão:

$$f(t) = -(t^2 - 19t + t - 19) = -t^2 + 18t + 19$$

O instante t em que a pressão é máxima é dado pelo t do vértice (t_v):

$$t_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-18}{2(-1)} = 9 \text{ horas}$$

Como o período de funcionamento é de 10 horas ($0 \leq t \leq 10$), o valor máximo de pressão ocorre de fato durante o uso, no instante $t = 9$.

Substituindo $P \leq 10$ e $t = 9$ na equação original para encontrar o limite superior de K, tem-se:

$$4 \cdot \log[-K \cdot (9+1) \cdot (9-19)] \leq 10 \quad \Rightarrow \quad \log[100K] \leq \log 10^{\frac{10}{4}} \quad \Rightarrow \quad 10^2 K = 10^{2,5}$$

$$\therefore \quad K = \frac{10^{2,5}}{10^2} = 10^{2,5-2} = \boxed{10^{0,5}}. \qquad \textbf{Resposta:} \text{ Alternativa (A).}$$

Observação

As inequações logarítmicas e exponenciais são amplamente utilizadas na modelagem de fenômenos biológicos e agrícolas, como taxas de crescimento, dinâmica populacional e difusão de nutrientes. A interpretação gráfica auxilia na compreensão dos intervalos de solução e do comportamento das funções envolvidas.

Exercício 4.3.3

34. (Fuvest-SP) Se $\log_{10} x \leq \log_2 4 \cdot \log_4 6 \cdot \log_6 8 - 1$, então:

(A) $0 < x \leq 10^2$ (B) $10^2 < x \leq 10^4$ (C) $10^4 < x \leq 10^6$

(D) $10^6 < x \leq 10^8$ (E) $x > 10^8$

35. (UFU-MG – Adaptada) Seja $f(x) = \log_5(x-1) + \log_5(x+3)$.

a) Resolva a inequação $f(x) = 1$.

b) Resolva a inequação $f(x) < 1$.

36. (Unicamp-SP) Dada a função $f(x) = \log_{10} \dfrac{2x+4}{3x}$, encontre:

a) o valor de x para os qual $f(x) = 1$.

b) Os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais $f(x)$ é um número real menor que 1.

37. (Unifor-CE) Determine o domínio da função f, definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x - \frac{1}{2}}}{\log_{\frac{1}{3}} x}$.

38. (Mack-SP) A solução de $\log_x(2x-1) \leq 2$ é:

(A) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ (B) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$ (C) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

(D) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ (E) $\mathbb{R}$

39. Farmacologia - A concentração C (em mg/L) de um fármaco no plasma sanguíneo, t horas após sua administração, é dada por $C(t) = 15 - 4\log_2(t+1)$. O fármaco só é terapeuticamente eficaz se sua concentração for superior a 7 mg/L. Determine o intervalo de tempo em que o tratamento é eficaz.

4.3.4 A Função inversa da logarítmica: A Função exponencial

Da definição de logaritmo tem-se que

$$f(x) = \log_a x \quad \text{ou} \quad y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x.$$

Aplicando o procedimento algébrico para a determinação da função inversa, tem-se

$$a^x = y \quad \Rightarrow \quad y = a^x \quad \Rightarrow \quad \boxed{f^{-1}(x) = a^x}.$$

Essa função inversa da logarítmica denomina-se **Função exponencial** e é assim definida:

Definição 4.3.6: Função Exponencial

A **função exponencial** é a aplicação

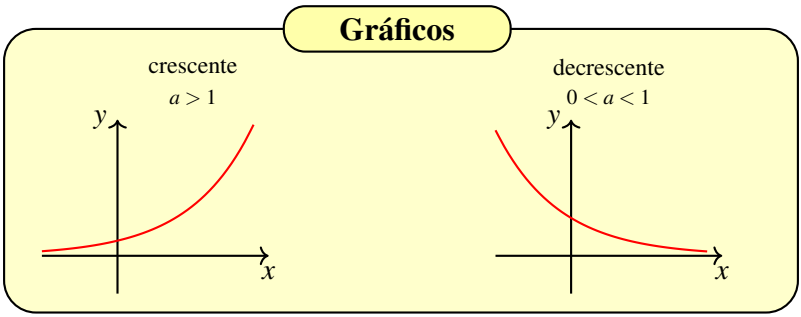
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* : \qquad f(x) = a^x,$$

onde $a > 0$ e $a \neq 1$.

Observação

A função exponencial surge naturalmente em muitos fenômenos de crescimento e decaimento, como o crescimento populacional, o resfriamento de um corpo e a desintegração radioativa. Seu comportamento depende da base a:

- Se $a > 1$, a função é **crescente**.
- Se $0 < a < 1$, a função é **decrescente**.



Exercício resolvido 4.3.4

1. Determine o valor de $f(x)$ para $a = 3$ e $x = -2, 0, 2$.

Resolução:

$$f(x) = 3^x \Rightarrow f(-2) = \frac{1}{9}, \quad f(0) = 1, \quad f(2) = 9.$$

A função é crescente, pois $a = 3 > 1$.

2. (UFC-Adaptada) Meia-vida de uma substância é o tempo necessário para sua massa se reduzir à metade. E o modelo matemático que descreve esse fenômeno é dada por:

$$m(t) = m_0 \cdot a^t, \quad \begin{cases} m_0: \text{ massa inicial,} \\ a: \text{ fator de decaimento radioativo da substância.} \end{cases}$$

Considerando hoje 16 gramas de um substância radioativa cuja meia-vida é de 5 anos. Se daqui a n anos sua massa for 2^{-111} gramas, o valor de n é igual a:

(A) 525 (B) 550 (C) 565 (D) 575 (E) 595

Resolução:

Dados:

Massa inicial: $t = 0 \Rightarrow m_0 = 16$

Tempo de meia vida: $t = 5 \Rightarrow m(5) = \dfrac{m_0}{2}$

Tempo: $t = n \Rightarrow$ massa $m(n) = 2^{-111}$

Substituindo os dados da meia-vida na equação dada, tem-se:

$$m(5) = \frac{m_0}{2} = m_0 \cdot a^5 \Rightarrow a^5 = \frac{\cancel{m_0}}{2 \cdot \cancel{m_0}} \Rightarrow \left(a^5\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5}} \Rightarrow a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Assim, a fórmula da meia-vida pode ser reescrita como:

$$m(t) = 16\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5}t}.$$

Inserindo as informações para o tempo n, vem que:

$$m(n) = 16\left(\frac{1}{2}\right)^{n/5} = 2^{-111}.$$

Escrevendo 16 como potência de 2: $16 = 2^4$, vem

$$2^4 \cdot 2^{-n/5} = 2^{-111} \Rightarrow (2)^{4-\frac{n}{5}} = (2)^{-111}.$$

Como ambas as expressões são potências da mesma base 2, iguala-se os expoentes:

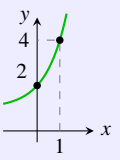
$$4 - \frac{n}{5} = -111.$$

Resolvendo a equação para n:

$$-\frac{n}{5} = -115 \implies \frac{n}{5} = 115 \implies n = 115 \cdot 5 = \boxed{575 \text{ anos}}. \textbf{ Resposta:} \text{ Alternativa (D).}$$

Exercício 4.3.4

1. (UFMT) A figura ao lado mostra um esboço do gráfico da função real de variável real $y = a^x + b$, com $a \in \mathbb{R}, a > 0$ e $a \neq 1$. Calcule $a^3 + b^3$.



2. (UFMG) Considere a função $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ definida para todo número real x.

   a) Calcule $[f(-2) + f(2)]\, f(0)$.

   b) Determine o conjunto imagem da função $f(x)$.

3. (UFPR) Duas populações, designadas por F e G, têm os respectivos crescimentos expressos por $f(t) = 36 + t^2$ e $g(t) = 10(2^t)$, sendo t número não negativo que representa o tempo em meses. Então, analise as seguintes afirmações:

   a) A população G duplica a cada mês.

   b) $g(51) - g(50) = g(50)$

   c) Quando $t = 1$, a população F é menor do que a população G.

   d) Em nenhum tempo a população F será igual à população G.

4. (FGV-SP) Curva de Aprendizagem é um conceito criado por psicólogos que constataram a relação existente entre a eficiência de um indivíduo e a quantidade de treinamento ou experiência possuída por este indivíduo. Um exemplo de Curva de Aprendizagem é dado pela expressão

$$Q = 700 - 400e^{-0,5t}, \text{ em que}$$

Q = quantidade de peças produzidas mensalmente por um funcionário;
t = meses de experiência;
e = 2,7183.

   a) De acordo com essa expressão, quantas peças um funcionário com 2 meses de experiência deverá produzir mensalmente?

   b) E um funcionário sem qualquer experiência, quantas peças deverá produzir mensalmente? Compare esse resultado com o resultado do item a. Há coerência entre eles?

Inequações exponenciais

Definição 4.3.7: Inequação exponencial

Inequação exponencial são desigualdades com a presença dos sinais $\gtrless$ em que a incógnita aparece no expoente. A resolução depende do valor da base a, no casos:

- $a > 1$, a função é crescente, o sinal da desigualdade é mantido:

$$\begin{cases} a^n > a^m \Rightarrow n > m \\ a^n < a^m \Rightarrow n < m \end{cases}$$

- $0 < a < 1$, a função é decrescente, o sinal da desigualdade é invertido:

$$\begin{cases} a^n < a^m \Rightarrow n > m \\ a^n > a^m \Rightarrow n < m \end{cases}$$

Os sinais > e < podem ser trocados por $\geq$ e $\leq$.

Exercício resolvido 4.3.4

3. Resolva as inequações a seguir:

a) $3^x \leq 9$

$$3^x \leq 3^2 \Rightarrow x \leq 2.$$

$$\therefore \boxed{S =]-\infty, 2].}$$

b) $2^{x+4} > 32$

$$2^{x+4} > 2^5 \Rightarrow x+4 > 5 \Rightarrow x > 1.$$

$$\therefore \boxed{S =]1, +\infty[.}$$

c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+2} < \left(\frac{2}{5}\right)^3$

$$0 < \frac{2}{5} < 1 \Rightarrow x+2 > 3 \Rightarrow x > 1.$$

$$\therefore \boxed{S =]1, +\infty[.}$$

Exercício 4.3.4

5. (PUC-SP) Determine o conjunto solução de x tal que $\frac{1}{8} \leq 2^{-x}$

6. (UFAL) No universo $\mathbb{R}$, qual o conjunto solução da inequação $5^{x^2} \cdot 5^{2x-1} \cdot 5^{-3} \leq \frac{1}{5}$?

7. (UFPI) Seja S o conjunto solução de $\left(\frac{5}{3}\right)^{-x+2} > \left(\frac{3}{5}\right)^{1-2x}$. Então:

   (A) $S = \mathbb{R}^*$ (B) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$ (C) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

   (D) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$ (E) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

8. (UFAC) A quantidade de números inteiros n que satisfazem a desigualdade $\frac{1}{8} < \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 8$ é igual a:

   (A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 7

9. (UFRS) O conjunto solução da inequação $3^{2-x} + 3^{2+x} > 18$, é:

   (A) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}$ (B) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 3\}$ (C) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 0\}$

   (D) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ (E) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

10. Arqueologia Forense - A datação por Carbono–14 é usada para estimar a idade de fósseis. A quantidade de carbono–14, $N(t)$, em um organismo após t anos é dada por $N(t) = N_0 \cdot (0,5)^{t/5730}$, onde N_0 é a quantidade inicial. Um artefato de madeira foi encontrado e um teste revelou que ele contém **pelo menos 92%** da sua quantidade original de carbono–14. Usando o dado que $(0,5)^{0,12} \approx 0,92$, determine a idade máxima aproximada que o artefato pode ter.

Aplicações da Função Exponencial a dados experimentais

Modelar um fenômeno consiste em analisar seus dados (e, quando pertinente, sua representação gráfica) para identificar uma expressão matemática que descreva adequadamente sua variação. No caso de um possível modelo exponencial, verifica-se se, para incrementos iguais da variável independente, as razões sucessivas entre valores da variável dependente permanecem aproximadamente constantes; quando isso ocorre, tem-se um fator de crescimento quase constante, compatível com a forma exponencial.

Definição 4.3.8: Função exponencial aplicada a um conjunto de dados

Considere-se uma variável de interesse y observada em instantes igualmente espaçados (por exemplo, anos), produzindo uma sequência de dados

$$y_0,\, y_1,\, \ldots,\, y_n \quad (y_k > 0).$$

Diz-se que esses dados podem ser descritos por um **modelo exponencial discreto** quando existe um **fator de crescimento constante** $b > 0$ tal que

$$y_{k+1} = b\, y_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{y_{k+1}}{y_k} = b \quad \text{(razão constante)}.$$

Nesse caso, tem-se a expressão explícita

$$y_k = y_0\, b^k.$$

Quando os dados são indexados por tempo t (em anos) e t_0 é o instante inicial, escreve-se também

$$y(t) = y(t_0)\, b^{t-t_0},$$

em que b representa o *fator multiplicativo* por unidade de tempo.

Observação

O **fator de crescimento** b e a **taxa de crescimento** r descrevem a mesma dinâmica, porém em escalas distintas. O fator b é o multiplicador por período (por exemplo, de um ano para o seguinte), enquanto a taxa r é a variação percentual por período. A relação é

$$b = 1 + r \quad \text{e} \quad r = b - 1.$$

Assim, $b > 1$ (isto é, $r > 0$) implica crescimento; $0 < b < 1$ (isto é, $r < 0$) implica decrescimento. Além disso, pequenas diferenças em b acumulam-se por potência: para n períodos, tem-se $y_n = y_0\, b^n$, de modo que o efeito do crescimento (ou decrescimento) torna-se mais pronunciado quanto maior é n.

Exercício resolvido 4.3.4

1. Estimar um modelo exponencial para a população do Brasil a partir de dois pontos amostrais.[2]

Resolução:

Sejam $t_0 = 2000$ e $t_1 = 2024$. Os dados (em número de habitantes) são:

$$y(2000) = 174\,018\,282, \qquad y(2024) = 211\,998\,573.$$

Admitindo-se um modelo exponencial anual $y(t) = y(2000)\,b^{t-2000}$, impõe-se a condição $y(2024) = y(2000)\,b^{24}$, donde

$$b = \left(\frac{y(2024)}{y(2000)}\right)^{\frac{1}{24}} = \left(\frac{211\,998\,573}{174\,018\,282}\right)^{\frac{1}{24}} \approx 1{,}0083.$$

Logo, a taxa anual equivalente é

$$r = b - 1 \approx 0{,}0083 \approx 0{,}83\% \text{ ao ano.}$$

Assim, o modelo ajustado por dois pontos fica

$$y(t) = 174\,018\,282 \cdot (1{,}0083)^{t-2000}.$$

Como verificação ilustrativa, para $t = 2010$ obtém-se

$$\widehat{y}(2010) = 174\,018\,282 \cdot (1{,}0083)^{10} \approx 188{,}9 \times 10^6,$$

ao passo que o valor observado na mesma fonte para 2010 é

$$y(2010) = 193\,701\,929.$$

Conclui-se que o modelo exponencial com fator constante fornece uma aproximação global, sendo esperado algum desvio quando a razão $\dfrac{y(t+1)}{y(t)}$ não se mantém constante ao longo do tempo.

2. Verificar, por diferenças finitas, se uma tabela de dados anuais pode ser aproximada por um modelo exponencial e estimar um fator de crescimento médio.[3]

Resolução:

[2] Fonte dos dados: World Bank Open Data, indicador *Population, total* (código SP.POP.TOTL) para o Brasil, via API: https://api.worldbank.org/v2/country/BRA/indicator/SP.POP.TOTL?format=json. Acesso em: 2026.

[3] Fonte: World Bank Open Data, indicador *Population, total* (SP.POP.TOTL) para o Brasil, via API https://api.worldbank.org/v2/country/BRA/indicator/SP.POP.TOTL?format=json. Acesso em: 2026.

Considere-se t (ano) como a variável independente e $y(t)$ como a população total. Como o espaçamento temporal é anual, tem-se $\Delta t = 1$. Calculam-se as **diferenças finitas de primeira ordem** por

$$\Delta y(t) = y(t+1) - y(t), \qquad \frac{\Delta y(t)}{\Delta t} = \Delta y(t).$$

Em seguida, calculam-se as **razões sucessivas**

$$b_t = \frac{y(t+1)}{y(t)},$$

pois, em um modelo exponencial discreto $y(t+1) = b\,y(t)$, espera-se que b_t seja aproximadamente constante.

t	$y(t)$	$\Delta y(t) = y(t+1) - y(t)$	$b_t = \dfrac{y(t+1)}{y(t)}$
2018	206 107 261	1 348 198	1.00654
2019	207 455 459	1 205 383	1.00581
2020	208 660 842	889 452	1.00426
2021	209 550 294	756 121	1.00361
2022	210 306 415	834 314	1.00397
2023	211 140 729	857 844	1.00406
2024	211 998 573	—	—

Observa-se que as diferenças $\Delta y(t)$ **não são constantes**, logo os dados não descrevem crescimento linear com taxa absoluta fixa. Por outro lado, as razões b_t permanecem **próximas** entre si, sugerindo que um modelo exponencial pode servir como *aproximação global* no intervalo considerado.

Define-se, então, o fator de crescimento médio por

$$\bar{b} = \frac{1}{6} \sum_{t=2018}^{2023} b_t \approx 1.00471,$$

e obtém-se o modelo exponencial aproximado

$$\widehat{y}(t) = y(2018)\,\bar{b}^{\,t-2018} = 206\,107\,261 \cdot (1.00471)^{t-2018}.$$

A taxa percentual anual equivalente é $\bar{r} = \bar{b} - 1 \approx 0.00471 \approx 0.471\%$ ao ano.

3. Considerando uma **máquina agrícola autopropelida** cujo valor de mercado (revenda) foi acompanhado ao

longo dos anos. A tabela a seguir apresenta valores observados.[4]

t (anos após 2018)	Ano	$V(t)$ (R$)
0	2018	850 000
1	2019	770 000
2	2020	705 000
3	2021	640 000
4	2022	585 000
5	2023	530 000
6	2024	485 000

Pede-se:

a) verificar, via diferenças finitas e razões sucessivas, se um modelo exponencial é adequado;

b) estimar um fator médio de decrescimento $\bar{b}$ e propor um modelo exponencial $\widehat{V}(t) = V(0)\,\bar{b}^{\,t}$;

c) estimar o valor da máquina em 2026;

d) estimar o tempo (em anos) para que o valor atinja a metade do valor inicial.

Resolução: Calculam-se inicialmente as diferenças finitas de primeira ordem,

$$\Delta V(t) = V(t+1) - V(t),$$

e as razões sucessivas,

$$b_t = \frac{V(t+1)}{V(t)}.$$

Em um modelo exponencial discreto, espera-se que b_t permaneça aproximadamente constante.

t	Ano	$V(t)$ (R$)	$\Delta V(t)$ (R$)	$b_t = \dfrac{V(t+1)}{V(t)}$
0	2018	850 000	-80 000	0.9059
1	2019	770 000	-65 000	0.9156
2	2020	705 000	-65 000	0.9078
3	2021	640 000	-55 000	0.9141
4	2022	585 000	-55 000	0.9060
5	2023	530 000	-45 000	0.9151
6	2024	485 000	—	—

[4] Referência metodológica sobre depreciação/vida útil e avaliação econômica de máquinas agrícolas: Iowa State University Extension and Outreach, *Estimating Farm Machinery Costs* (Ag Decision Maker, A3-29). Disponível em: https://www.extension.iastate.edu/agdm/crops/pdf/a3-29.pdf. Acesso em: 2026.

Observa-se que $\Delta V(t)$ não é constante, logo não se trata de um decrescimento linear. Por outro lado, as razões b_t mantêm-se próximas, o que é compatível com um decrescimento exponencial aproximado no intervalo.

Define-se, então, o fator médio por

$$\bar{b} = \frac{1}{6}\sum_{t=0}^{5} b_t \approx 0.9107,$$

e propõe-se o modelo exponencial

$$\widehat{V}(t) = V(0)\,\bar{b}^{\,t} = 850\,000 \cdot (0.9107)^t.$$

A taxa percentual anual equivalente é

$$\bar{r} = \bar{b} - 1 \approx -0.0893 \approx -8.93\% \text{ ao ano.}$$

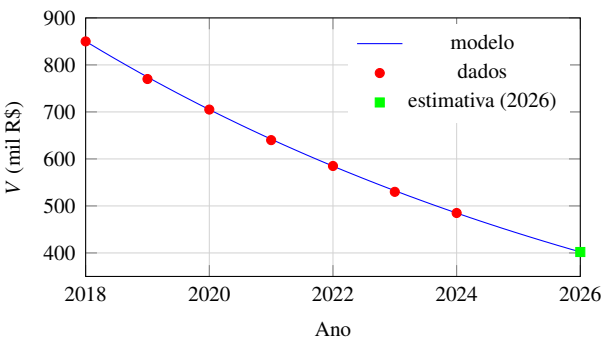
Para 2026, tem-se $t = 8$, e portanto

$$\widehat{V}(8) = 850\,000 \cdot (0.9107)^8 \approx 402\,000.$$

Para estimar quando o valor atinge metade do valor inicial, resolve-se

$$850\,000 \cdot (0.9107)^t = \frac{850\,000}{2} \iff (0.9107)^t = 0.5 \iff t = \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.9107)} \approx 7.41.$$

Conclui-se que a metade do valor inicial é atingida após aproximadamente 7.4 anos (isto é, entre 2025 e 2026).



4. Adaptado de Fátima Sviercoski (2008). A equação que descreve juros compostos é definida de forma semelhante à da meia-vida. Sendo r a taxa de capitalização em h unidades de tempo (dias, meses, etc.), o

fator de capitalização será $a = 1 + r$. A quantidade P de capital depois de t unidades de tempo será

$$P = P_0\, a^{t/h}.$$

Considerando um empréstimo de **'R$ 2.500,00'** a uma **taxa mensal de** 6,2%, determine:

a) quanto deverá ser pago depois de **1 mês e 20 dias**;

b) quando este empréstimo alcançará o valor de **R$ 3.200,00**.

Resolução: A taxa é mensal, logo toma-se $r = 0{,}062$ (ao mês) e $a = 1 + r = 1{,}062$. Para compatibilizar as unidades, adota-se a convenção usual em problemas financeiros de que **1 mês = 30 dias**. Assim, pode-se usar $h = 30$ (dias) e medir t em dias, ou, equivalentemente, usar $h = 1$ (mês) e medir t em meses.

(a) Montante após 1 mês e 20 dias. Tem-se $t = 1 + \frac{20}{30} = \frac{5}{3}$ (meses). Logo,

$$P = 2500 \cdot (1{,}062)^{5/3}.$$

Calculando,

$$P \approx 2500 \cdot 1{,}1055 \approx 2763{,}7.$$

Portanto, após 1 mês e 20 dias, o valor devido é aproximadamente **R$ 2.763,70**.

(b) Quando o montante alcança R$ 3.200,00. Resolve-se

$$3200 = 2500 \cdot (1{,}062)^t \iff (1{,}062)^t = \frac{3200}{2500} = 1{,}28.$$

Aplicando logaritmo,

$$t = \frac{\ln(1{,}28)}{\ln(1{,}062)} \approx \frac{0{,}24686}{0{,}06018} \approx 4{,}10 \text{ meses}.$$

Convertendo a parte fracionária para dias (mês comercial de 30 dias),

$$0{,}10 \times 30 \approx 3 \text{ dias}.$$

Assim, o empréstimo atinge **R$ 3.200,00** após aproximadamente **4 meses e 3 dias** (contados a partir da data do empréstimo).

Em juros compostos, o crescimento é multiplicativo: a cada mês o capital é multiplicado por $a = 1 + r$. Quando o tempo não é um número inteiro de períodos (como 1 mês e 20 dias), a fórmula $P = P_0 a^{t/h}$ permite incorporar frações de período via o expoente $\frac{t}{h}$, desde que as unidades de tempo sejam compatibilizadas.

5. Adaptado de Fátima Sviercoski (2008). Suponha-se que uma fazenda deseje quitar uma dívida de **R$ 250.000,00**. Um banco (Banco A) oferece juros a uma **taxa nominal anual de 14%**, com **capitalização mensal**. Isso

significa que a taxa mensal é dada por

$$i_m = \frac{14\%}{12} \approx 1{,}1667\% \text{ ao mês.}$$

Pergunta-se se essa oferta é melhor do que a de outro banco (Banco B), que anuncia **13,95% ao ano**, porém com **capitalização diária**.

Resolução: Para comparar as propostas de modo coerente, toma-se um mesmo horizonte temporal e calculam-se os **montantes equivalentes** (ou, de forma equivalente, as **taxas efetivas anuais**) em 1 ano.

No **Banco A**, tem-se capitalização mensal. Logo, em 1 ano (12 meses), o fator de capitalização é

$$(1+i_m)^{12} = \left(1+\frac{0{,}14}{12}\right)^{12},$$

e a taxa efetiva anual correspondente é

$$i_{A,\text{ef}} = \left(1+\frac{0{,}14}{12}\right)^{12} - 1 \approx 0{,}1493 \approx 14{,}93\% \text{ a.a.}$$

No **Banco B**, tem-se capitalização diária. Assim, a taxa diária é

$$i_d = \frac{0{,}1395}{365} \approx 0{,}0003822,$$

e, em 1 ano (365 dias), a taxa efetiva anual correspondente é

$$i_{B,\text{ef}} = \left(1+\frac{0{,}1395}{365}\right)^{365} - 1 \approx 0{,}1496 \approx 14{,}96\% \text{ a.a.}$$

Como

$$i_{B,\text{ef}} > i_{A,\text{ef}},$$

conclui-se que, para a fazenda (devedora), a oferta do **Banco A** é **mais vantajosa**, pois produz menor taxa efetiva anual e, portanto, menor montante ao final de 1 ano, apesar de o Banco B anunciar taxa nominal anual ligeiramente menor.

Para quantificar a diferença no principal considerado, seja $P = \text{R\$ } 250.000{,}00$. Então, em 1 ano, os montantes são

$$M_A = P(1+i_{A,\text{ef}}) \approx 250.000 \cdot (1+0{,}1493) \approx \text{R\$ } 287.325,$$

$$M_B = P(1+i_{B,\text{ef}}) \approx 250.000 \cdot (1+0{,}1496) \approx \text{R\$ } 287.400.$$

Logo, tem-se $M_B > M_A$, e a diferença anual estimada é $M_B - M_A \approx \text{R\$ } 75$.

Tem-se que taxas nominais não são diretamente comparáveis quando os regimes de capitalização diferem.

Em particular, a capitalização diária tende a elevar a taxa efetiva anual; assim, mesmo com taxa nominal anual menor, o Banco B pode produzir montante maior, tornando-se menos vantajoso para o devedor.

Exercício 4.3.4

11. Crescimento de praga agrícola - Em uma plantação de milho, a população de uma praga (em milhares de insetos) evolui conforme um modelo de crescimento exponencial. No início da observação ($t = 0$), havia 50 mil insetos. Quatro semanas depois ($t = 4$), a população atingiu a marca de 3,2 milhões de insetos. Assumindo o modelo $P(t) = P_0 \cdot b^t$:

    a) Determine o fator de crescimento semanal b. (Use $\sqrt{8} \approx 2,828$)

    b) Escreva a função $P(t)$ que modela a população (em milhares) em função do tempo t (em semanas).

    c) A colheita torna-se inviável se a população atingir 10 milhões de insetos. Estime em quantas semanas, a partir do início, isso ocorrerá.

12. Depreciação de drone de pulverização - Um drone agrícola de alta precisão foi comprado por R$ 120.000,00. Seu valor de revenda deprecia exponencialmente. Após 2 anos, seu valor de mercado era de R$ 76.800,00.

    a) Determine a taxa de depreciação anual do equipamento.

    b) Estime o valor de revenda do drone após 5 anos de uso.

    c) A empresa substitui o drone quando seu valor de mercado se torna inferior a 20% do valor original. Determine após quanto tempo isso deve ocorrer.

13. Adoção de tecnologia em cooperativa - Uma cooperativa agrícola introduziu um novo textslsoftware de gestão para seus membros. O número de fazendas que adotaram o textslsoftware foi registrado anualmente:

Ano	2021	2022	2023	2024
N° de Fazendas	40	58	85	125

    a) Calcule as razões sucessivas de crescimento para verificar se um modelo exponencial é uma boa aproximação.

    b) Com base no fator de crescimento médio, estime o número de fazendas que terão adotado o textslsoftware em 2026.

14. Comparação de investimentos para safra - Um agricultor precisa investir R$ 80.000,00 para financiar a próxima safra e recebe duas propostas de crédito rural:

    - **Banco Terra:** Taxa nominal de 12% ao ano, com capitalização trimestral.
    - **Banco Campo:** Taxa nominal de 11,9% ao ano, com capitalização mensal.

Calcule a taxa efetiva anual de cada banco e determine qual proposta é mais vantajosa para o agricultor (ou seja, qual resulta em juros menores).

15. Recuperação de solo pós-contaminação - Após um vazamento acidental, a concentração de um herbicida no solo, $C(t)$, decai exponencialmente segundo a função $C(t) = C_0 \cdot (0,5)^{t/2}$, onde t é o tempo em meses. Simultaneamente, a população de microrganismos benéficos, $M(t)$, que se alimentam do herbicida, cresce exponencialmente segundo $M(t) = M_0 \cdot 2^t$. Se, no instante inicial, a concentração do herbicida era 4.096 vezes maior que a população inicial de microrganismos ($C_0 = 4096 \cdot M_0$), determine em quantos meses a população de microrganismos se igualará à concentração do contaminante.

4.3.5 O número e e a função exponencial $f(x) = e^x$

A introdução ao número e pode ser elegantemente motivada por um problema financeiro clássico: o cálculo de juros compostos. Imagine um capital inicial C_0 aplicado a uma taxa de juros anual de 100% (ou seja, $i = 1$). Vamos analisar como o montante final $C(t)$ após t anos varia conforme a frequência com que os juros são capitalizados.

Se a capitalização for anual ($n = 1$), o montante após t anos é dado por:

$$C(t) = C_0(1+1)^t = C_0 \cdot 2^t$$

Se for semestral ($n = 2$), a taxa de 100% a.a. equivale a 50% a.s., e temos duas capitalizações por ano:

$$C(t) = C_0 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{2t} = C_0 \cdot (2,25)^t$$

Generalizando para n períodos de capitalização por ano, a taxa por período é $1/n$, e o número total de períodos em t anos é nt. A fórmula do montante se torna:

$$C(t) = C_0 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nt} = C_0 \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^t$$

A questão fundamental que emerge é: o que acontece com o fator de crescimento $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ quando a frequência de capitalização n aumenta indefinidamente? Este cenário corresponde à capitalização contínua.

Observação

Essa análise matemática leva a investigar o comportamento da sequência $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ quando $n \to \infty$ ($n \in \mathbb{N}^*$), ou seja, n cresce indefinidamente. Esta sequência é convergente (tende ou se aproxima de um número fixo), e seu limite é um número irracional de fundamental importância em diversas áreas da ciência: **O número** e.

Analisando numericamente a convergência dessa sequência, pode-se observar:

Valor de n	**Valor de $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$**
1	$(1+1)^1 = 2$
2	$(1+0,5)^2 = 2,25$
5	$(1+0,2)^5 = 2,48832$
10	$(1+0,1)^{10} \approx 2,59374246$
100	$(1+0,01)^{100} \approx 2,704813829$
1.000	$(1+0,001)^{1.000} \approx 2,716923932$
10.000	$(1+0,0001)^{10.000} \approx 2,718145927$
100.000	$(1+0,00001)^{100.000} \approx 2,718268237$

Os dados da tabela sugerem que, à medida que n cresce, o valor da expressão se aproxima de um número específico.

O Número e

Definição 4.3.9: Número de Euler

O número e, também conhecido como número de Euler ou constante de Neper, é definido como o limite da sequência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N}^*$, quando n tende ao infinito, e expressa-se, como:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828\ldots$$

A Função exponencial de base e

Definido o número e, pode-se definir a função exponencial de base e, uma das funções mais importante da matemática.

Definição 4.3.10

A função exponencial natural é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por:

$$f(x) = e^x$$

Esta função herda todas as propriedades da função exponencial $g(x) = a^x$ com $a > 1$, mas possui características únicas, especialmente no cálculo diferencial e integral.

Propriedades

Sejam $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

i. **Domínio e Imagem:** $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$.

ii. **Crescimento:** Como $e > 1$, a função é estritamente crescente. Ou seja, $x_1 < x_2 \implies e^{x_1} < e^{x_2}$.

iii. **Injetividade:** A função é injetiva. Se $e^{x_1} = e^{x_2}$, então $x_1 = x_2$.

iv. **Propriedades Algébricas:**

- $e^0 = 1$
- $e^1 = e$
- $e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$
- $\frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1 - x_2}$
- $(e^{x_1})^{x_2} = e^{x_1 \cdot x_2}$

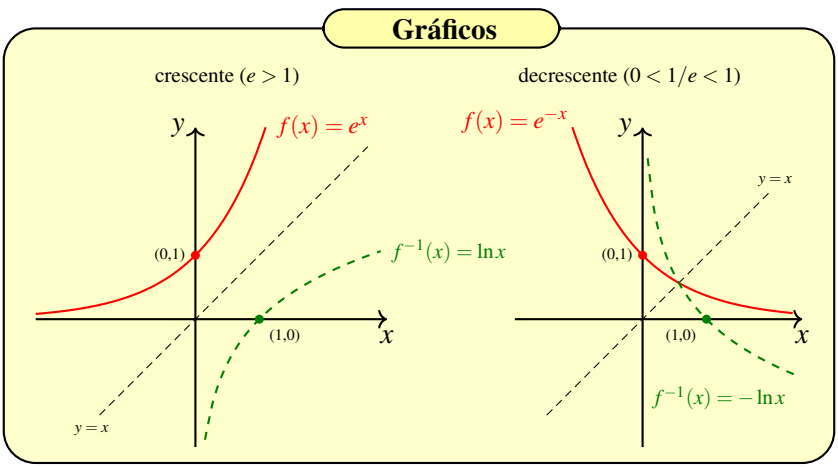
v. **Limites nos Extremos:**

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Isso implica que o eixo x (a reta $y = 0$) é uma assíntota horizontal do gráfico da função.

O gráfico da função $f(x) = e^x$ e de sua inversa, **a função logarítmica natural** $g(x) = \ln(x)$, são simétricos em relação à reta $y = x$, como ilustrado a seguir.

Gráficos



Relações entre as funções $f(x) = a^x$ e $f(x) = e^x$

Até agora, a função exponencial natural $f(x) = e^x$ foi vista como um caso particular da função exponencial $g(x) = a^x$, onde a base a é o número de Euler e. No entanto, a relação entre elas é muito mais profunda e fundamental. Na verdade, toda e qualquer função exponencial da forma $y = a^x$ pode ser reescrita em termos da função exponencial natural $y = e^x$.

Pense na função $f(x) = e^x$ como a "moeda universal" do mundo exponencial. Assim como se pode converter qualquer moeda (dólar, iene, etc.) para o real, pode-se "converter" qualquer base a para a base e.

Propriedade

A chave para traduzir qualquer base a para a base e é a identidade fundamental que conecta a exponencial e o logaritmo natural:

$$a = e^{\ln(a)}$$

Esta equação, válida para qualquer $a > 0$, diz que, qualquer número real positivo pode ser expresso como e elevado a algum outro número real. O logaritmo natural $\ln(a)$, é precisamente o expoente que se deve usar.

Ao aplicar essa propriedade à função $f(x) = a^x$. Substituindo a base a pela sua forma em base e, obtém-se:

$$f(x) = a^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x$$

Usando a propriedade de potência de uma potência, $(b^m)^n = b^{m \cdot n}$, a expressão fica simplificada em:

$$f(x) = e^{(\ln(a)) \cdot x}$$

Definição 4.3.11: A Forma canônica da função exponencial

Toda função exponencial $f(x) = a^x$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$) pode ser escrita na forma:

$$f(x) = e^{kx}$$

onde a constante $k = \ln(a)$ é chamada de **taxa de crescimento contínuo**.

- Se $\boldsymbol{a > 1}$, então $k = \ln(a)$ é **positivo**, indicando um crescimento exponencial.
- Se $\boldsymbol{0 < a < 1}$, então $k = \ln(a)$ é **negativo**, indicando um decaimento exponencial.

Por que a base e é "Natural"?

Esta capacidade de reescrever qualquer função exponencial na base e é o que a torna tão "natural" e poderosa, especialmente em Cálculo. Lá, se aprenderá que a derivada de $f(x) = e^{kx}$ é elegantemente simples, e escreve-se como: $f'(x) = k \cdot e^{kx}$.
Deste modo, derivar $f(x) = a^x$ diretamente resulta em $f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$. Note que o fator $\ln(a)$ aparece

naturalmente! Ao usar a base e, a constante de proporcionalidade entre a função e sua taxa de variação (k) fica explícita no expoente, simplificando enormemente a análise de fenômenos de crescimento e decaimento em todas as áreas da ciência.

Exercício resolvido 4.3.5

1. Faça a conversão das funções a^x para funções e^x para

a) $f(x) = 2^x$

Aqui, $a = 2$. A taxa de crescimento contínuo é $k = \ln(2) \approx 0,693$. Portanto:

$$\begin{aligned} 2^x = e^{(\ln 2)x} &\approx e^{0,693x} \\ \Rightarrow \quad f(x) = 2^x &\equiv f(x) = e^{0,693x} \end{aligned}$$

Isso significa que um crescimento que dobra a cada unidade de tempo é equivalente a um crescimento contínuo a uma taxa de aproximadamente 69,3%.

b) $f(x) = (0,5)^x$

Aqui, $a = 0,5$. A taxa de crescimento (decaimento) é $k = \ln(0,5) = \ln(1/2) = -\ln(2) \approx -0,693$. Portanto:

$$\begin{aligned} (0,5)^x = e^{(\ln 0,5)x} &\approx e^{-0,693x} \\ \Rightarrow \quad f(x) = (0,5)^x &\equiv f(x) = e^{-0,693x} \end{aligned}$$

Um decaimento que reduz a quantidade pela metade a cada unidade de tempo é equivalente a um decaimento contínuo a uma taxa de aproximadamente 69,3%.

2. (UFC) Meia-vida de uma substância é o tempo necessário para sua massa se reduzir à metade. Tomemos hoje 16 gramas de um substância radioativa cuja meia-vida é de 5 anos. Se daqui a n anos sua massa for 2^{-111} gramas, o valor de n é igual a:

(A) 525 (B) 550 (C) 565 (D) 575 (E) 595

Resolução:

Dados: $\begin{cases} \text{Massa inicial: } 16 \\ \text{Tempo: } t = n \Rightarrow \text{massa} \sim 2^{-111} \end{cases}$

Como se trata de uma redução de massa por desintegração radioativa, uma fórmula/equação que representa esse fenômeno pode ser dada por equação exponencial decrescente da forma:

$$m(t) = m_0 e^{kt},$$

onde $k < 0$ é a constante de decaimento e m_0 a massa inicial. Após a meia-vida de $T = 5$ anos a massa fica $m(5) = 8$. Substituindo na equação dada. tem-se que:

$$8 = 16e^{k\cdot 5} \quad \Longrightarrow \quad e^{5k} = \tfrac{1}{2}.$$

Aplicando ln em ambos os lados da equação a fim de usar as propriedades III e VII, vem que:

$$\ln e^{5k} = \ln(0,5) \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{\ln(0,5)}{5} = \frac{-0,6931472}{5} = -0,13863$$

Preenchendo a equação com essas informações:

$$m(t) = 16 \cdot e^{-0.13863\cdot t}$$

Substituindo nessa equação os dados para $m(n) = 2^{-111}$, vem:

$$2^{-111} = 16 \cdot e^{-0,13863\cdot n} \Rightarrow e^{-0,13863\cdot n} = \frac{2^{-111}}{2^4} = 2^{-115}$$

Aplicando ln em ambos os lados, tem-se:

$$-0,13863 \cdot n = -115 \cdot \ln 2 = -115 \cdot (0,693147) = -79,71191$$

$$n = \frac{-79,71191}{-0,13863} = 574,9975 \Rightarrow \boxed{n \approx 575 \text{ anos}}$$

Resposta: Alternativa (D).

Comentário do autor

Essa questão esteve em uma de minhas listas de exercícios e, certa vez, os alunos pediram para resolvê-la. Esbocei essa solução que acabaram de ver, embora correta, exigia o uso do modelo contínuo de decaimento, envolvendo a base e e o logaritmo natural ln, o que ultrapassava o nível esperado para o conteúdo abordado.

No modelo contínuo, o comportamento exponencial é descrito pela função $m(t) = m_0e^{kt}$, em que o crescimento ou decaimento é determinado por uma taxa k constante. Já o modelo discreto, expresso por $m(t) = m_0 \cdot (a)^t$, descreve variações em etapas, como dobrar ou reduzir a cada período fixo, e é o mais comum em problemas de ensino médio e vestibulares.

Neste livro, percebi uma oportunidade para expor as duas resoluções para essa questão, para o modelo discreto (resolvido anteriormente), que permite uma resolução puramente algébrica – reduzindo potências à mesma base e igualando expoentes –, tornando-a mais acessível sem perder o valor conceitual. Aqui, a versão contínua é fascinante por revelar o papel do número e em processos

naturais de crescimento e decaimento e do logaritmo natural ln na resolução desse tipo de problema, além de se perceber a conexão, na prática, entre ambas a funções.

3. Adaptado de Fátima Sviercoski (2008). No planejamento de controle biológico de pragas, a equação de busca da área de uma folha de soja por um predador é dada por

$$S(x) = 20e^{-0,1x} + 5,$$

sendo x a densidade de presas por m^2. Calcule $\lim_{x\to\infty} S(x)$ e $\lim_{x\to 0} S(x)$, para esboçar o gráfico correspondente, e descreva o comportamento do fenômeno descrito.

Resolução:

i: Análise do problema:

$S(x)$ representa uma *medida de área efetiva de busca* que um predador realiza em uma folha, em função da densidade x de presas (m^{-2}). O termo $20e^{-0,1x}$ modela a diminuição exponencial dessa área quando as presas se tornam abundantes (o predador precisa "procurar menos"), enquanto o termo constante $+5$ representa um patamar mínimo (assíntota) de atividade de busca mesmo quando as presas são muito numerosas.

ii: Cálculo dos limites

Como $e^{-0,1x} \to 0$ quando $x \to \infty$, segue que

$$\lim_{x\to\infty} S(x) = \lim_{x\to\infty} \left(20e^{-0,1x} + 5\right) = 0 + 5 = 5.$$

Já quando $x \to 0$, temos $e^0 = 1$, logo

$$\lim_{x\to 0} S(x) = 20 \cdot 1 + 5 = 25.$$

Portanto, $S(0) = 25$ e há uma assíntota horizontal $y = 5$ para $x \to \infty$.

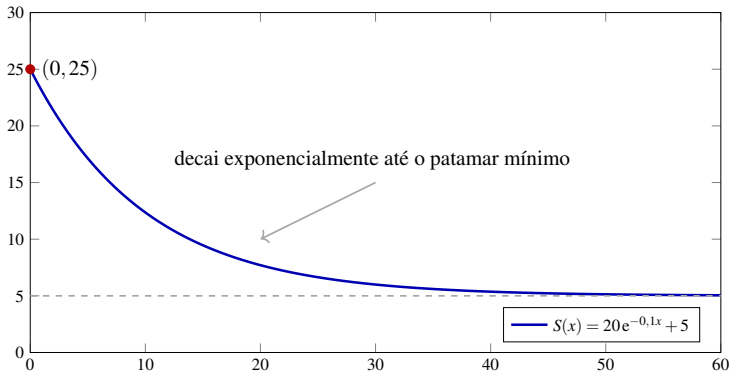
iii: Monotonicidade e interpretação

Para a função $k = -0,1$ (negativo), significando que ela apresenta um decaimento exponencial para todo $x \in \mathbb{R}$ (Definição 4.3.11), i.e., S é estritamente *decrescente*. Em termos ecológicos: quanto maior a densidade de presas, menor a área de busca necessária por parte do predador; porém, essa área não zera —— estabiliza em um patamar mínimo $y = 5$.

iv: Pontos e forma do gráfico

$$S(0) = 25, \qquad \lim_{x\to\infty} S(x) = 5, \qquad S'(x) < 0 \ \ \forall x.$$

Logo, o gráfico inicia em $(0,25)$ e decai suavemente rumo à assíntota $y = 5$.



Exercício 4.3.5

1. (PUC-SP) Sobre a função $f(x) = e^x$ definida em $\mathbb{R}$, podemos afirmar que:

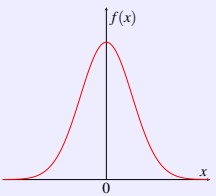
   (A) tem um único zero no intervalo $[0,2]$
   (B) $e^x < a^x$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}_+^*$
   (C) $e^x > a^x$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}_+^*$
   (D) assume valores de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$
   (E) assume valores apenas em $\mathbb{R}_+^*$

2. Termodinâmica / Lei do Resfriamento de Newton - A temperatura T de um objeto, em um ambiente com temperatura constante T_a, é dada por $T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$, onde T_0 é a temperatura inicial e k é uma constante de resfriamento. Um café é servido a 90°C em uma sala a 20°C. Após 10 minutos, a temperatura do café é de 60°C.

   a) Determine a constante de resfriamento k.

   b) Calcule a temperatura do café após 20 minutos.

3. Estatística / A Curva Normal - A função densidade de probabilidade da Curva Normal (ou Gaussiana), fundamental em estatística, tem o formato $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$. Para a Curva Normal Padrão, $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, e sua forma é mostrada ao lado.



   a) Qual o valor máximo da função, que ocorre em $x = \mu = 0$?

   b) O que acontece com o valor de $f(x)$ quando x se afasta muito da média (i.e., quando $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$)? Qual a implicação disso para a probabilidade de eventos extremos?

4. Engenharia / A Catenária - A forma de um cabo ou corrente suspensa entre dois pontos sob seu próprio peso não é uma parábola, mas uma curva chamada catenária, descrita pela função cosseno hiperbólico, $y(x) = a \cdot \cosh(x/a)$, que é definida usando a base e:

$$y(x) = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$$

Para um cabo onde $a = 10$, a equação é $y(x) = 5(e^{x/10} + e^{-x/10})$.

a) Calcule a altura do ponto mais baixo do cabo (que ocorre em $x = 0$).

b) Calcule a altura do cabo nos pontos de suspensão, localizados em $x = 20$ e $x = -20$. (Use $e^2 \approx 7,39$).

5. Probabilidade / Modelo de Poisson - A probabilidade de ocorrerem exatamente k eventos em um intervalo fixo (de tempo ou espaço), quando a taxa média de ocorrência é λ, é dada pela distribuição de Poisson: $P(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$. Se um centro de controle de pragas recebe, em média, $\lambda = 3$ chamados por hora:

a) Qual a probabilidade de não receber nenhum chamado em uma determinada hora ($k = 0$)?

b) Qual a probabilidade de receber exatamente dois chamados ($k = 2$)? (Use $e^{-3} \approx 0,05$).

4.3.6 Linearização exponencial

Modelos exponenciais surgem com frequência em fenômenos de **crescimento/decrescimento multiplicativo** (populações, radioatividade, cinética química, epidemiologia, processos de difusão e atenuação, finanças). Nesses casos, faz-se uso da **função logarítmica** para **linearizar** relações exponenciais, o que é essencial tanto na análise teórica (interpretação de parâmetros) quanto na prática computacional (ajuste por regressão linear, estabilização numérica e compressão de escalas).

Propriedade (linearização exponencial)

Seja $f(x) = x_0\, a^x$, com $x_0 > 0$ e $a > 0$, $a \neq 1$. Tomando logaritmo em ambos os lados, obtém-se

$$\log_a f(x) = \log_a(x_0) + x,$$

ou, usando logaritmo decimal (base 10),

$$\log f(x) = \log(x_0) + x \log(a).$$

Logo, o gráfico de f em **escala semilogarítmica** (eixo vertical em escala logarítmica) transforma uma curva exponencial em uma **reta**, o que permite identificar e estimar parâmetros por métodos lineares.

Observação

Em escala linear, distâncias iguais no eixo vertical correspondem a **incrementos aditivos** constantes. Já em escala logarítmica, distâncias iguais correspondem a **fatores multiplicativos** constantes. Assim, em um gráfico semilogarítmico, uma reta indica que os dados variam aproximadamente por um **mesmo fator** a cada incremento unitário na variável independente, o que é típico de processos exponenciais. Computacionalmente, tal transformação reduz a amplitude numérica dos dados e permite ajustar modelos exponenciais via regressão linear sobre $\log(y)$.

Exercício resolvido 4.3.6

1. Considere-se uma grandeza $y(t)$ (por exemplo, contagem de microrganismos ou intensidade medida por sensor) observada em instantes igualmente espaçados $t = 0, 1, \ldots, 6$.[5] Investiga-se se os dados são compatíveis com um modelo exponencial discreto $y(t) = y_0\, b^t$ e ilustra-se o comportamento em escala linear e semilogarítmica.

Resolução: Calculam-se as razões sucessivas

$$b_t = \frac{y(t+1)}{y(t)}.$$

Se b_t for aproximadamente constante, admite-se $y(t) \approx y_0\, b^t$. Para evidenciar o comportamento exponencial, calcula-se também $\log(y(t))$, pois, se $y(t) = y_0\, b^t$, então

$$\log(y(t)) = \log(y_0) + t\,\log(b),$$

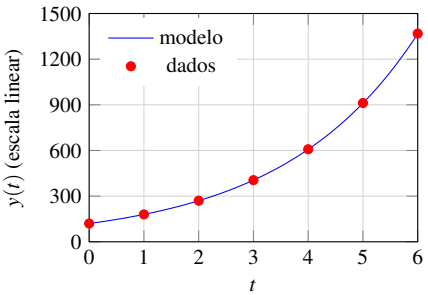
isto é, uma relação linear em t.

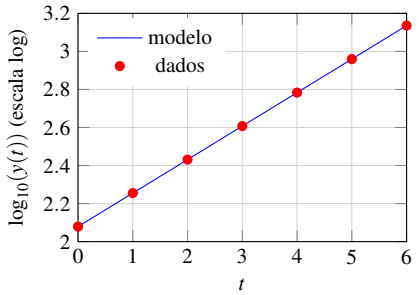
t	$y(t)$	$b_t = \dfrac{y(t+1)}{y(t)}$	$\log_{10}(y(t))$
0	120	1,500	2,079
1	180	1,500	2,255
2	270	1,500	2,431
3	405	1,501	2,608
4	608	1,500	2,784
5	912	1,500	2,960
6	1368	—	3,136

[5] Dados fictícios, simulados apenas para fins didáticos.

Observa-se que b_t se mantém aproximadamente constante, sugerindo $b \approx 1.5$. Assim, propõe-se o modelo

$$\widehat{y}(t) = 120 \cdot (1.5)^t.$$





Interpreta-se que, em escala linear, o crescimento aparece como curva; já em escala semilogarítmica, a aproximação por uma reta indica variação multiplicativa aproximadamente constante, o que justifica o uso do modelo exponencial. Esses gráficos semilogarítmicos são amplamente utilizados quando se tem valores de $f(x)$ muito grandes ou muito pequenos.

Exercício 4.3.6

1. Análise de Cultura de Bactérias - Um laboratório monitora o crescimento de uma colônia de bactérias. Os dados de contagem (em milhares) ao longo do tempo (em horas) são apresentados na tabela abaixo.

Tempo (h)	0	1	2	3	4
População (milhares)	20	30	45	67,5	101,25

   a) Calcule as razões sucessivas para confirmar que um modelo exponencial $P(t) = P_0 \cdot b^t$ é apropriado.

   b) Linearize os dados calculando $\log_{10}(P(t))$ para cada ponto.

   c) Sabendo que a relação linearizada é da forma $Y = mt + c$, onde $Y = \log_{10}(P(t))$, use os dados linearizados para encontrar o coeficiente angular m e o intercepto c. A partir deles, determine os parâmetros b e P_0 do modelo original.

2. Interpretação de Gráfico Semilogarítmico - Um cientista de dados, ao analisar a adoção de uma nova tecnologia agrícola, plota os dados de número de usuários (N) em função do tempo (t). O gráfico em escala linear resulta em uma curva, mas o gráfico de $\log_{10}(N)$ por t (escala semilog) resulta em uma reta quase perfeita, descrita pela equação $Y = 0,25t + 2$, onde $Y = \log_{10}(N)$.

a) Qual era o número inicial de usuários (N_0 em $t = 0$)?

b) Qual é o fator de crescimento multiplicativo anual (b) da adoção desta tecnologia?

c) Escreva a função exponencial original $N(t)$.

3. Química / Lei de Beer-Lambert - A Lei de Beer-Lambert descreve como a intensidade da luz diminui ao passar por uma solução. A transmitância (T, em %) está relacionada à concentração da solução (c, em mol/L) por um modelo exponencial: $T(c) = 100 \cdot 10^{-kc}$, onde k é uma constante. Os dados a seguir foram coletados em um experimento.

Concentração (mol/L)	0,1	0,2	0,3	0,4
Transmitância (%)	50,1	25,1	12,6	6,3

Linearize a equação tomando o logaritmo na base 10 de ambos os lados. Em seguida, use os dados para estimar o valor da constante de absorção k.

4. Ciência da Computação / Lei de Moore - A Lei de Moore é uma observação histórica de que o número de transistores em um chip de computador dobra aproximadamente a cada dois anos. Se em 2020 um chip tinha 50 bilhões de transistores:

a) Escreva a função exponencial $N(t) = N_0 \cdot b^t$ que modela este crescimento, onde t é o número de anos desde 2020. (Dica: se dobra a cada 2 anos, qual o fator de crescimento b para 1 ano?)

b) Qual seria a equação da reta obtida ao se plotar $\log_{10}(N)$ em função de t? Qual o significado do coeficiente angular desta reta?

5. Epidemiologia / Comparação de surtos - O departamento de saúde de uma região agrícola monitora dois surtos simultâneos. Para cada surto, eles coletam dados do número de novos casos diários.

- **Surto A:** A diferença no número de casos entre dias consecutivos é aproximadamente constante.
- **Surto B:** A razão no número de casos entre dias consecutivos é aproximadamente constante.

Qual dos surtos deve ser plotado em escala semilogarítmica para que os dados formem uma linha reta? Justifique e explique o que o coeficiente angular dessa reta representaria.

4.3.7 Linearização de funções potência

Funções potência aparecem em inúmeras leis de escala na ciência e na engenharia, especialmente quando o fenômeno apresenta **crescimento/decrescimento por fator** associado à variável independente. Uma forma típica é

$$f(x) = \alpha x^{\beta}, \qquad \alpha > 0,\ x > 0,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Esse tipo de modelo é particularmente útil quando se trabalha com **expoentes fracionários** e quando se

deseja estimar parâmetros α e β a partir de dados experimentais.

Ideia central (linearização).
Aplicando logaritmo (base 10 ou base e) em ambos os lados, obtém-se:

$$\log f(x) = \log(\alpha x^{\beta}) = \log\alpha + \log(x^{\beta}) = \log\alpha + \beta\,\log x.$$

Logo, ao definir as variáveis transformadas

$$X = \log x \quad \text{e} \quad Y = \log f(x),$$

tem-se uma equação **linear**:

$$Y = \log\alpha + \beta X.$$

Assim, a função potência pode ser estimada por métodos lineares (por exemplo, **ajuste por reta** em um gráfico **duplamente logarítmico** ou **regressão linear** em (X,Y)).

Interpretação geométrica.
No gráfico duplamente logarítmico (isto é, com x em escala log e $f(x)$ em escala log), uma função potência aparece como uma **reta**:
- o **coeficiente angular** da reta é β;
- o **intercepto** é $\log\alpha$, de modo que $\alpha = 10^{\log\alpha}$ (ou $\alpha = e^{\ln\alpha}$).

Observação

Deve-se exigir $x > 0$ e $f(x) > 0$ para aplicar logaritmo. Além disso, a transformação logarítmica altera a estrutura do erro: um erro aditivo em f não permanece aditivo em $\log f$. Em aplicações, isso costuma ser adequado quando o erro é aproximadamente **multiplicativo** no domínio original.

Exercício resolvido 4.3.7

1. Adaptado de Fátima Sviercoski (2008). Suponha-se que a infiltração acumulada de água no solo I (em cm) dependa do tempo t (em min) segundo uma relação potencial $I(t) = \alpha t^{\beta}$. A tabela a seguir apresenta observações de I em diferentes instantes.[6] Deseja-se:

   a) linearizar o modelo aplicando logaritmo;

   b) estimar α e β por meio do gráfico duplamente logarítmico (e/ou por dois pontos);

   c) comparar a representação em escala linear com a representação duplamente logarítmica.

Resolução:

Assume-se o modelo

$$I(t) = \alpha t^{\beta}, \qquad \alpha > 0,\ t > 0.$$

[6] Dados fictícios (simulados) apenas para fins didáticos.

Aplicando $\log_{10}$ em ambos os lados:

$$\log_{10} I = \log_{10} \alpha + \beta \log_{10} t.$$

Definindo $X = \log_{10} t$ e $Y = \log_{10} I$, tem-se a relação linear $Y = A + \beta X$, onde $A = \log_{10} \alpha$.

t (min)	$I(t)$ (cm)	$\log_{10} t$	$\log_{10} I$
5	1,455	0,699	0,163
10	2,129	1,000	0,328
15	2,664	1,176	0,425
20	3,118	1,301	0,494
25	3,521	1,398	0,547
30	3,894	1,477	0,591
35	4,238	1,544	0,627
40	4,562	1,602	0,659
45	4,869	1,653	0,687
50	5,157	1,699	0,713

Para uma estimativa simples via dois pontos no plano (X, Y), toma-se, por exemplo, os extremos:

$$(X_1, Y_1) = (\log_{10} 5, \log_{10} 1.455) \approx (0.699, 0.163),$$

$$(X_2, Y_2) = (\log_{10} 50, \log_{10} 5.157) \approx (1.699, 0.713).$$

Assim, o coeficiente angular é aproximado por

$$\widehat{\beta} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{0.713 - 0.163}{1.699 - 0.699} \approx 0.55.$$

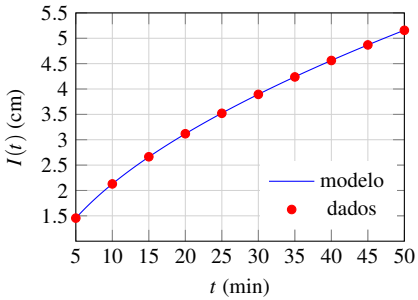
Para obter α, substitui-se um ponto (por exemplo, $t = 10$, isto é, $X = 1$, $Y \approx 0.328$):

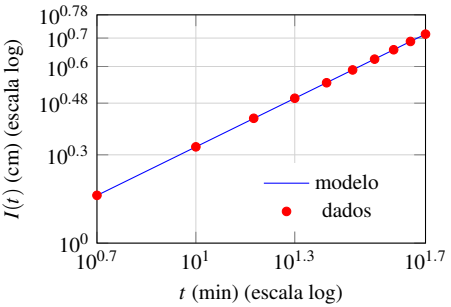
$$0.328 = \log_{10} \alpha + 0.55 \cdot 1 \;\Rightarrow\; \log_{10} \alpha \approx -0.222 \;\Rightarrow\; \widehat{\alpha} = 10^{-0.222} \approx 0.60.$$

Portanto, um modelo potencial ajustado é

$$\widehat{I}(t) = 0.60\, t^{0.55}.$$

Em escala linear, $I(t)$ aparece como uma curva. Já em escala duplamente logarítmica, os dados tornam-se aproximadamente alinhados e o modelo aparece como uma reta, o que evidencia o caráter potencial e permite estimar β como inclinação.





2. Suponha-se que a quantidade de partículas emitidas por uma fonte radioativa N (em milhões de partículas por segundo) dependa do tempo t (em nanossegundos) segundo uma relação potencial $N(t) = \alpha t^{\beta}$. A tabela a seguir apresenta observações de N em diferentes instantes.[7] Deseja-se:

(a) linearizar o modelo aplicando logaritmo;

(b) estimar α e β por meio do gráfico duplamente logarítmico (e/ou por dois pontos);

(c) comparar a representação em escala linear com a representação duplamente logarítmica, mostrando por que esta é essencial quando os valores variam em ordens de grandeza muito diferentes.

Resolução:

Assume-se o modelo

$$N(t) = \alpha t^{\beta}, \qquad \alpha > 0,\ t > 0.$$

Aplicando $\log_{10}$ em ambos os lados:

$$\log_{10} N = \log_{10} \alpha + \beta \log_{10} t.$$

Definindo $X = \log_{10} t$ e $Y = \log_{10} N$, tem-se a relação linear $Y = A + \beta X$, onde $A = \log_{10} \alpha$.

[7] Dados fictícios (simulados) apenas para fins didáticos.

t (ns)	$N(t)$ (milhões/s)	$\log_{10} t$	$\log_{10} N$
$1{,}0\times10^{-6}$	$8{,}92\times10^{12}$	-6,000	12,950
$5{,}0\times10^{-6}$	$1{,}25\times10^{10}$	-5,301	10,097
$1{,}0\times10^{-5}$	$1{,}58\times10^{9}$	-5,000	9,199
$5{,}0\times10^{-5}$	$7{,}94\times10^{6}$	-4,301	6,900
$1{,}0\times10^{-4}$	$1{,}00\times10^{6}$	-4,000	6,000
$5{,}0\times10^{-4}$	$2{,}51\times10^{3}$	-3,301	3,400
$1{,}0\times10^{-3}$	$3{,}16\times10^{2}$	-3,000	2,500
$5{,}0\times10^{-3}$	$1{,}26\times10^{0}$	-2,301	0,100
$1{,}0\times10^{-2}$	$3{,}16\times10^{-1}$	-2,000	-0,500
$5{,}0\times10^{-2}$	$5{,}01\times10^{-3}$	-1,301	-2,300

Observação: Note que os valores variam de 10^{-6} a 10^{-2} no domínio e de 10^{-3} a 10^{12} na imagem, abrangendo 15 ordens de magnitude! Em escala linear, esses dados seriam praticamente ilegíveis.

Para uma estimativa simples via dois pontos no plano (X,Y), toma-se, por exemplo, os extremos:

$$(X_1,Y_1)=(\log_{10}(1.0\times10^{-6}),\log_{10}(8.92\times10^{12}))\approx(-6.000,12.950),$$

$$(X_2,Y_2)=(\log_{10}(5.0\times10^{-2}),\log_{10}(5.01\times10^{-3}))\approx(-1.301,-2.300).$$

Assim, o coeficiente angular é aproximado por

$$\widehat{\beta}=\frac{\Delta Y}{\Delta X}=\frac{-2.300-12.950}{-1.301-(-6.000)}\approx\frac{-15.250}{4.699}\approx-3.245.$$

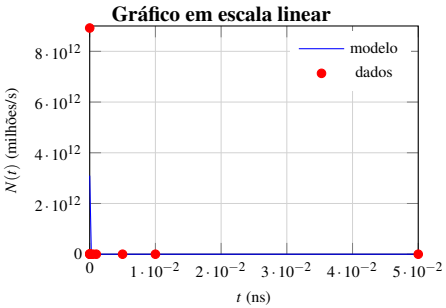
Para obter α, substitui-se um ponto (por exemplo, $t=1.0\times10^{-4}$, isto é, $X=-4.000$, $Y=6.000$):

$$6.000=\log_{10}\alpha+(-3.245)\cdot(-4.000)\;\Rightarrow\;\log_{10}\alpha\approx6.000-12.980=-6.980\;\Rightarrow\;\widehat{\alpha}=10^{-6.980}\approx1.05\times10^{-7}.$$

Portanto, um modelo potencial ajustado é

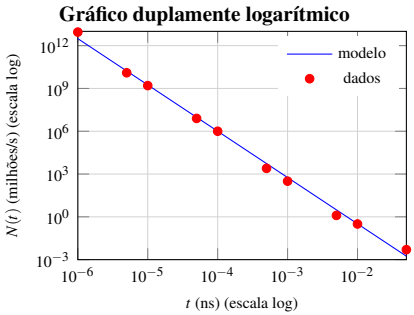
$$\widehat{N}(t)=1.05\times10^{-7}\,t^{-3.245}=\frac{1.05\times10^{-7}}{t^{3.245}}.$$

Em escala linear, os dados são praticamente ininteligíveis: os primeiros pontos teriam coordenadas tão grandes que esmagariam todos os outros no gráfico, enquanto os últimos seriam indistinguíveis do zero. Já em escala duplamente logarítmica, os dados tornam-se perfeitamente alinhados e o modelo aparece como uma reta, evidenciando claramente o caráter potencial e permitindo estimar β como inclinação.



Problema:

Os três primeiros pontos têm valores tão grandes ($> 10^9$) que distorcem completamente a escala, tornando os outros sete pontos indistinguíveis de zero.



Vantagem:

Todos os 10 pontos são visíveis e bem distribuídos. O alinhamento quase perfeito revela a relação potencial.

Este exemplo demonstra claramente por que o gráfico duplamente logarítmico é indispensável quando os dados abrangem várias ordens de magnitude. Enquanto a representação linear torna invisíveis os valores menores (que podem ser tão importantes quanto os maiores), a representação log-log preserva a visualização de todos os pontos e revela claramente relações potenciais através do alinhamento em reta. Em física nuclear, astronomia, sismologia e outras áreas onde grandezas variam exponencialmente, este tipo de plotagem é ferramenta padrão.

Exercício 4.3.7

1. Biologia / Lei de Kleiber - A "Lei de Kleiber" é uma famosa lei de escala biológica que relaciona a taxa metabólica de um animal (P, em Watts) com sua massa corporal (M, em kg) através de uma função potência $P = \alpha M^{\beta}$. A tabela abaixo mostra dados aproximados para diferentes mamíferos.

Animal	Massa (M) em kg	Taxa Metabólica (P) em Watts
Rato	0,02	0,2
Gato	3	15
Humano	70	100
Elefante	4000	2500

a) Calcule $\log_{10}(M)$ e $\log_{10}(P)$ para cada animal e verifique se os pontos se alinham em um gráfico (log-log).

b) Use os pontos do Rato e do Elefante para estimar o expoente β. O valor que você encontrou está próximo do valor canônico de $\beta = 3/4$ proposto por Kleiber?

2. Astronomia / 3ª Lei de Kepler - A terceira lei de Kepler afirma que o quadrado do período orbital de um planeta (T, em anos) é proporcional ao cubo de sua distância média ao Sol (R, em unidades astronômicas - UA). Isso pode ser escrito como uma função potência: $T = \alpha R^{\beta}$.

   a) A partir da lei $T^2 \propto R^3$, qual é o valor teórico exato do expoente β?

   b) Um astrônomo plota $\log(T)$ vs. $\log(R)$ para os planetas do sistema solar e obtém uma reta perfeita. Qual seria a inclinação (coeficiente angular) dessa reta?

   c) Se para Marte, tem-se $R \approx 1,52$ UA, use o modelo $T = R^{1,5}$ para estimar seu período orbital em anos.

3. Engenharia de Materiais / Lei da Fadiga - A vida útil de um componente metálico sob estresse cíclico pode ser modelada pela Lei de Basquin, uma função potência da forma $N = \alpha\sigma^{\beta}$, onde N é o número de ciclos até a falha e σ é a amplitude da tensão aplicada. O expoente β é tipicamente um número negativo grande. Um engenheiro testa um novo aço e obtém os seguintes dados:

Tensão σ (MPa)	**Ciclos até a Falha (N)**
400	$1,0 \times 10^7$
500	$1,3 \times 10^6$
600	$2,5 \times 10^5$

   Ao plotar $\log(N)$ vs. $\log(\sigma)$, o engenheiro obtém uma reta. Ele afirma que "um aumento de 10% na tensão causa uma redução de aproximadamente 50% na vida útil do componente". Qual o valor aproximado do expoente β que justificaria essa afirmação? (Dica: pense na relação entre as variações percentuais e o expoente β).

4. Geografia / Sinuosidade de Rios - A sinuosidade de um rio pode ser modelada por uma função potência $L = \alpha D^{\beta}$, onde L é o comprimento real do rio e D é a distância em linha reta entre sua nascente e sua foz. O expoente β é o "índice de sinuosidade". Para um rio perfeitamente reto, $\beta = 1$. Para rios reais, $\beta > 1$.

   a) Um geólogo analisa dados de rios e, em um gráfico log-log de L vs. D, encontra uma reta com inclinação de $1,2$. Qual o valor do índice de sinuosidade β?

   b) Usando o modelo $L = D^{1,2}$ (assumindo $\alpha = 1$), se um rio tem uma distância em linha reta de 100 km entre a nascente e a foz, qual é seu comprimento real estimado? (Use $100^{0,2} \approx 2,5$).

5. Conceitual / O Diagnóstico Correto - Um pesquisador tem um conjunto de dados (x, y) e não sabe se o fenômeno é exponencial ($y = \alpha \cdot b^x$) ou de potência ($y = \alpha \cdot x^{\beta}$). Ele produz dois gráficos:

   - Gráfico 1: $\log(y)$ vs. x (semilogarítmico)
   - Gráfico 2: $\log(y)$ vs. $\log(x)$ (duplamente logarítmico)

Os dados no Gráfico 2 formam uma linha reta quase perfeita, enquanto no Gráfico 1 formam uma curva. Qual é a conclusão correta sobre a natureza do fenômeno? Justifique e explique como ele determinaria os parâmetros do modelo a partir do gráfico correto.

4.4 Funções trigonométricas

4.4.1 Motivação

As funções trigonométricas surgem naturalmente na modelagem de fenômenos oscilatórios —– grandezas que se repetem periodicamente ao longo do tempo ou do espaço. Elas descrevem comportamentos cíclicos em diversas áreas do conhecimento:

- **Climatologia e fenologia**: variação diária e sazonal da temperatura, intensidade da luz solar ao longo do ano, ciclos de floração e frutificação em plantas.
- **Física e engenharia**: movimento harmônico simples (molas, pêndulos), ondas sonoras e eletromagnéticas, corrente alternada, vibrações mecânicas.
- **Biológicas e médicas**: ritmos circadianos (sono-vigília), batimentos cardíacos, ciclos hormonais, padrões de atividade cerebral.
- **Geometria e astronomia**: posição de corpos celestes ao longo do tempo, fases da Lua, estações do ano, ângulos de incidência solar.
- **Tecnologia e processamento de sinais**: síntese de áudio, compressão de imagens, análise espectral, modulação em telecomunicações.

Além dos fenômenos periódicos, as funções trigonométricas também aparecem em contextos não cíclicos que envolvem relações angulares:

- **Topografia e geodésia**: cálculo de distâncias inacessíveis, determinação de alturas por triangulação.
- **Arquitetura e construção**: inclinação de telhados, ângulos de escadas, estruturas de pontes e torres.
- **Navegação e GPS**: determinação de posição por triangulação, cálculo de rotas.
- **Computação gráfica**: rotação de objetos 3D, animações, jogos, realidade virtual.

Essa ubiquidade torna o estudo das funções trigonométricas essencial não apenas para a matemática pura, mas como ferramenta fundamental para compreender e modelar fenômenos reais em ciências, engenharia e tecnologia.

4.4.2 O ciclo trigonométrico

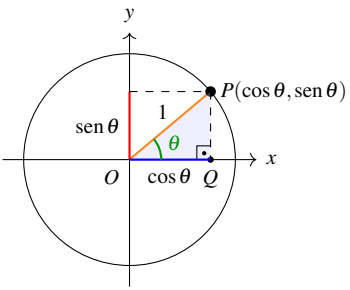
O estudo das funções trigonométricas fundamenta-se na representação geométrica dos ângulos por meio de uma circunferência de raio unitário, denominada *ciclo trigonométrico*. Tal circunferência é centrada na origem do plano cartesiano, permitindo associar a cada ângulo θ um ponto

$$P(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta),$$

obtido pela rotação do semieixo positivo de x no sentido anti-horário.

A partir dessa construção, define-se as razões trigonométricas cosseno (cos), seno (sen) e tangente (tg) para um determinado ângulo θ:

- $\cos\theta =$ projeção do ponto P no eixo x,
- $\operatorname{sen}\theta =$ projeção do ponto P no eixo y,
- $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$.



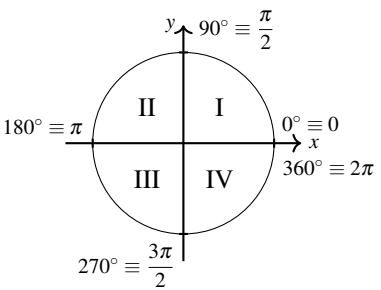
Perceba que...

As definições de cosseno, seno e tangente no ciclo trigonométrico correspondem às definições para um triângulo retângulo, em que dizem que para um ângulo qualquer:

- cosseno $= \dfrac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$
- seno $= \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$
- tangente $= \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$
- $\star$ tangente $= \dfrac{\text{seno}}{\text{cosseno}}$

Reflita isso observando o triângulo OPQ na figura acima.

No sentido anti-horário, o ciclo se divide em quatro quadrantes (I, II, III, IV), os quais permitem a leitura de ângulos de 0° a 360° (2π rad). Sendo assim, as extremidades dos eixos correspondem aos ângulos 0°, 90° ($\pi/2$), 180° (π, meia volta), 270° ($3\pi/2$) e 360° (2π). Como a circunferência tem raio 1, e o cruzamento dos eixos x e y acontece no ponto $(0,0)$, fica determinado, trivialmente, cosseno e seno desses ângulos pelos respectivos pares ordenados: $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ e $(1,0)$.



Determinação das razões trigonométricas para ângulos notáveis

As razões trigonométricas fundamentais podem ser obtidas diretamente do ciclo trigonométrico. Para $\theta = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$ e $\pi/2$, ditos ângulos notáveis, procede-se com construções geométricas específicas, cada uma associada a polígonos regulares inscritos: quadrado (ângulo de 45°) e triângulo equilátero (ângulos de 30° e 60°). Para 0° e 90° viu-se que são triviais.

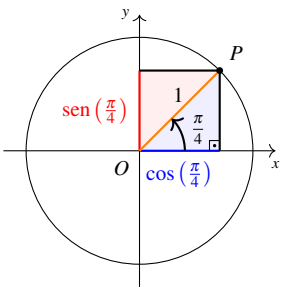
Casos $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$: No ciclo trigonométrico, os pontos correspondentes aos extremos dos eixos x-positivo e y-positivo determinam trivialmente:

$$\cos(0) = 1, \qquad \operatorname{sen}(0) = 0, \qquad \operatorname{tg}(0) = 0;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{indefinida}.$$

Caso $\theta = \pi/4$: A dedução das razões trigonométricas para $\theta = \pi/4$ pode ser feita inserindo um quadrado no primeiro quadrante do seguinte modo: Divide-se o ângulo reto ($90° = \pi/2$) da origem O até um ponto P sobre a circunferência. Fecha-se um quadrado a partir de P com os eixos dos *senos* e cossenos, assim, o seno e cosseno do ângulo são iguais uma vez que é igual ao comprimento do lado do quadrado.

O quadrado inscrito no primeiro quadrante tem diagonal igual ao diâmetro do ciclo, 1. Assim, considerando o lado do quadadrado como a:



O lado inferior (horizontal) representa o cosseno de $\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

O lado esquerdo (vertical) representa o seno de $\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

No quadrado lados são iguais, tem-se que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = a,$$

onde a é o comprimento de cada lado do quadrado.

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo com hipotenusa igual ao raio do ciclo (1), tem-se:

$$1^2 = a^2 + a^2$$

$$1 = 2a^2$$

$$a^2 = \frac{1}{2}$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Racionalizando o denominador:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

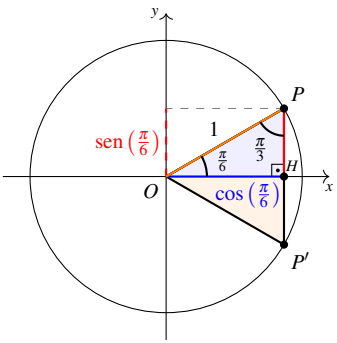
Portanto:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

e

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{a}{a} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \boxed{1}.$$

Caso $\theta = \pi/3$ e $\theta = \pi/6$: Para deduzir sen e cos de 30° ($\pi/6$) e 60° ($\pi/3$) a partir do ciclo trigonométrico, insere-se um triângulo equilátero (lados iguais e ângulos internos de 60°), com vértices na origem (O) e no ciclo (P) e (P'), de modo que sua altura coincida com o eixo x positivo e sua base fique igualmente dividida pelos quadrantes I e IV. Essa construção faz com que o eixo x divida o triângulo em dois triângulos retângulos congruentes, nos quais o ângulo junto à origem é a metade de 60°, i.e., 30°.



O triângulo OPB é equilátero, i.e., têm lados iguais,

$$\overline{OP} = \overline{PP'} = \overline{P'O} = 1.$$

Como H é o ponto médio do lado $\overline{PP'}$, $\overline{PH} = \frac{1}{2}$, que é o cateto oposto a $\frac{\pi}{6}$ e o cateto adjacente a $\frac{\pi}{3}$, assim fica determinado

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

A altura do triângulo $\overline{OH}$ é cateto adjacente ao ângulo $\frac{\pi}{6}$ e oposto a $\frac{\pi}{3}$, i.e.,

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \overline{OH}$$

Para determinar o valor $\overline{OH}$ usa-se o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OPH, assim,

$$\overline{OH}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \overline{OH}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \overline{OH} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Para as tangentes, basta fazer:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{1} = \boxed{\sqrt{3}}$$

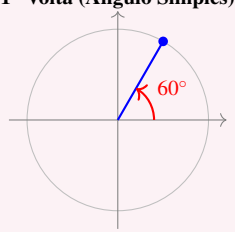
Para critérios de memorização e consulta rápida, os valores das razões trigonométricas dos ângulos notáveis, e daqueles nos extremos dos eixos no ciclo, podem ser organizados em uma tabela:

θ	$0 \equiv 0°/2\pi \equiv 360°$	$\frac{\pi}{6} \equiv 30°$	$\frac{\pi}{4} \equiv 45°$	$\frac{\pi}{3} \equiv 60°$	$\frac{\pi}{2} \equiv 90°$	$\pi \equiv 180°$	$\frac{3\pi}{2} \equiv 270°$
$\operatorname{sen}\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg}\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$

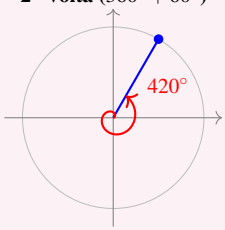
A periodicidade dos ângulos (Arcos Côngruos)

Imagine o ciclo trigonométrico como uma pista de corrida circular. Se você partir do zero e correr uma distância equivalente a 30°, parará em um ponto específico. Se, em vez disso, você der uma volta completa (360°) e correr mais 30° (totalizando 390°), você terminará exatamente no **mesmo lugar**. Esses ângulos que possuem extremidades coincidentes são chamados de **arcos côngruos**.

1ª Volta (Ângulo Simples)



2ª Volta $(360° + 60°)$



Como a posição final é a mesma, as coordenadas (que definem seno e cosseno) são idênticas.

$$\operatorname{sen}(420°) = \operatorname{sen}(60°) \quad \text{e} \quad \cos(420°) = \cos(60°)$$

De modo geral, para qualquer número inteiro de voltas $k \in \mathbb{Z}$:

$$\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen}(x) \quad \text{ou} \quad \operatorname{sen}(\alpha + k \cdot 360°) = \operatorname{sen}(\alpha)$$

4.4.3 Função seno

Definição 4.4.1: Função seno

A função seno, denotada por sen, associa a cada ângulo θ (em radianos) a ordenada y do ponto correspondente no círculo trigonométrico unitário. Assim,

$$y = \operatorname{sen}\theta.$$

4.4.4 Função cosseno

Definição 4.4.2: Função cosseno

A função cosseno, denotada por cos, associa a cada ângulo θ (em radianos) a abscissa x do ponto correspondente no círculo trigonométrico unitário. Assim,

$$x = \cos\theta.$$

4.4.5 Função tangente

Definição 4.4.3: Função tangente

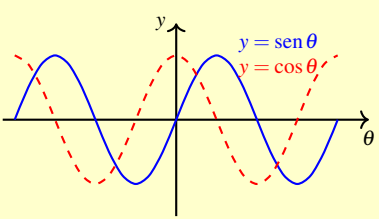
A função tangente, denotada por tg, é definida como a razão entre o seno e o cosseno, i.e.,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

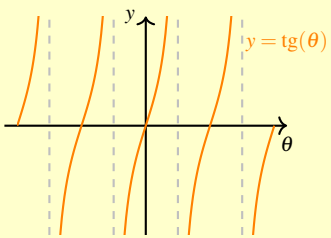
para $\cos\theta \neq 0$.

Gráficos

Funções cosseno e seno



Função tangente



Perceba que...

O "Cosseno" é um Seno Atrasado: Visualmente, o gráfico do cosseno é idêntico ao do seno, apenas deslocado lateralmente por 90° (ou $\pi/2$ radianos). Convencionalmente, na engenharia, diz-se que o cosseno é um seno com "fase adiantada". Por isso, em eletrônica e física, o termo senoidal costuma ser usado para descrever ambas as funções.

Exercício 4.4.5

1. Determine o domínio e o conjunto imagem das seguintes funções:

   a) $f(x) = 2 + \operatorname{sen}(x)$ b) $g(x) = \cos(3x)$ c) $h(x) = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4})$

2. Um engenheiro agrônomo está calibrando um sensor de irrigação que opera em um ciclo. O sensor atinge sua vazão máxima no ângulo de $\frac{\pi}{3}$ radianos. Quais dos seguintes ângulos correspondem ao mesmo ponto de vazão máxima? Justifique.

$$\frac{7\pi}{3}, \quad -\frac{5\pi}{3}, \quad \frac{4\pi}{3}, \quad \frac{13\pi}{3}$$

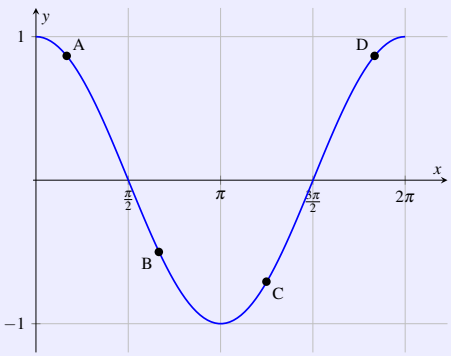
3. (Simetria e Identidades Fundamentais) Usando o ciclo trigonométrico como referência, determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas, justificando sua resposta:

   a) $\cos(x) = \cos(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. (A função cosseno é par?)

   b) $\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. (A função seno é ímpar?)

   c) $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$ vale apenas para ângulos no primeiro quadrante.

4. O gráfico abaixo representa a função $y = \cos(x)$. Sem usar uma calculadora, determine as coordenadas dos pontos A, B, C e D, que correspondem a ângulos notáveis.



5. A função $f(x) = \text{tg}(x)$ não está definida para certos valores de x.

   a) Quais são esses valores? Explique geometricamente, usando o ciclo trigonométrico, por que a função não está definida nesses pontos.

   b) Qual é o período da função tangente? Ele é igual ao período das funções seno e cosseno?

4.4.6 Propriedades das funções trigonométricas

Propriedades

As funções trigonométricas fundamentais apresentam as seguintes características:

1. **Função seno:** $y = \operatorname{sen}\theta$:
   - Domínio: $\mathbb{R}$
   - Imagem: $[-1,1]$
   - Amplitude: $A = \dfrac{\max y - \min y}{2} = 1$
   - Período: $T = 2\pi$

2. **Função cosseno:** $y = \cos\theta$:
   - Domínio: $\mathbb{R}$
   - Imagem: $[-1,1]$
   - Amplitude: $A = \dfrac{\max y - \min y}{2} = 1$
   - Período: $T = 2\pi$

3. **Função tangente:** $\text{tg}\,\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$:
   - Domínio: $\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
   - Imagem: $\mathbb{R}$
   - Amplitude: Não definida (função não limitada)
   - Período: $T = \pi$

Exercício 4.4.6

1. Determine o domínio, a imagem, a amplitude e o período para as seguintes funções trigonométricas básicas:

   a) $f(\theta) = \operatorname{sen}\theta$ b) $g(\theta) = \cos\theta$ c) $h(\theta) = \text{tg}\,\theta$

2. **Exercício Prático - A "Umbra Recta"**
   Historicamente, a função tangente era chamada pelos antigos astrônomos e matemáticos árabes de *umbra recta* (sombra reta). Ela era a ferramenta fundamental para calcular alturas inacessíveis, como as de minaretes, pirâmides ou montanhas, medindo apenas a sombra projetada no chão. Essencialmente, a tangente é a razão que conecta o mundo vertical ao mundo horizontal.

Situação-Problema: Você deseja medir a altura de um prédio em sua cidade sem subir nele. Em um dia ensolarado, você realiza o seguinte experimento:

i. Mede a sombra projetada pelo prédio no chão e encontra o valor $S = 12$ metros.

ii. Utiliza um teodolito (ou aplicativo de celular) e mede o ângulo de elevação do sol, encontrando $\theta = 60°$.

Com base nesses dados:

a) Utilize a definição de tangente para calcular a altura estimada (h) do prédio.

b) Suponha que a altura real do prédio seja de $20,5$ metros. Calcule o **erro relativo** (em porcentagem) da sua medição.

3. **Prática de campo**
Use a *umbra recta* para determinar a altura de um objeto alto (poste, prédio, árvore ou mastro) em sua localidade sem subir nele.

Materiais necessários: Trena (ou fita métrica) e um transferidor (ou aplicativo de celular tipo "Teodolito" ou "Clinômetro").

Procedimento:

i. Escolha um dia ensolarado e um objeto vertical cuja base seja acessível.

ii. Meça o comprimento da sombra (S) projetada por esse objeto no chão plano.

iii. No mesmo instante, aponte seu aplicativo/transferidor para o topo do objeto (ou para o sol, com cuidado) e registre o ângulo de elevação (θ).

Tarefa:

a) Anote os dados coletados: $S =$ _____ metros e $\theta =$ _____°.

b) Utilize a relação $h = S \cdot \mathrm{tg}(\theta)$ para calcular a altura estimada do objeto.

c) (Opcional) Se possível, compare sua estimativa com a altura real (pergunte ao zelador, consulte plantas ou use o Teorema de Tales com uma estaca menor para verificar a precisão).

Tarefa de pesquisa histórica: A Matemática da Música: A Série de Fourier

Você sabia que o som que ouvimos é, na verdade, uma "sinfonia" de funções trigonométricas?
Uma nota musical pura, como a emitida por um diapasão, desenha no ar uma onda senoidal perfeita ($y = \mathrm{sen}(x)$). No entanto, quando ouvimos a mesma nota (um Dó, por exemplo) tocada por um violino e por um piano, conseguimos distinguir claramente os instrumentos. Isso é o timbre.
Matematicamente, o timbre nada mais é do que a sobreposição (soma) de várias ondas senoidais com frequências e amplitudes diferentes.
Sua missão: Pesquise sobre o matemático francês **Jean-Baptiste Joseph Fourier** (1768–1830) e

responda:

1. O que é a "Série de Fourier" e como ela prova que qualquer onda complexa pode ser decomposta em somas de senos e cossenos simples?

2. Como essa descoberta de Fourier, feita originalmente para estudar o calor, é fundamental hoje para a música digital (MP3), equalizadores de som e até para o cancelamento de ruído em fones de ouvido?

4.4.7 Funções trigonométricas gerais (Modelação a Dados)

Na modelagem de fenômenos reais, raramente utilizam-se as funções trigonométricas em sua forma elementar ($y = \text{sen}\,x$). Faz-se necessário ajustar a amplitude, o período e os deslocamentos vertical e horizontal para que a função se adeque aos dados observados.

Definição 4.4.4: Formas gerais das funções trigonométricas

As funções trigonométricas gerais são expressas por:

$$y = a_0 + a \cdot \text{sen}[b(x - x_0)] \quad \text{ou} \quad y = a_0 + a \cdot \cos[b(x - x_0)].$$

Para o caso da tangente:

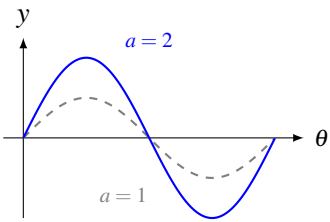
$$y = a_0 + a \cdot \text{tg}[b(x - x_0)]$$

Onde:

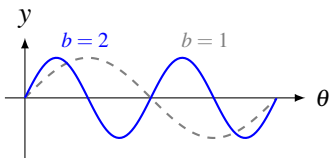
- a_0 **(Eixo Médio/Deslocamento vertical):** Representa o valor médio da oscilação. Translada o gráfico verticalmente.
- a **(Amplitude/Fator de escala):** Para seno e cosseno, $|a|$ é a amplitude (distância do eixo médio ao máximo). Para a tangente, a atua como fator de estiramento vertical.
- b **(Frequência angular):** Determina a velocidade da oscilação. Relaciona-se com o período T por:
$$T = \frac{2\pi}{|b|} \quad \text{(para sen/cos)} \qquad \text{ou} \qquad T = \frac{\pi}{|b|} \quad \text{(para tg)}$$
- x_0 **(Fase/Deslocamento horizontal):** Translada o gráfico horizontalmente. Se $x_0 > 0$, desloca-se para a direita; se $x_0 < 0$, para a esquerda.

Análise gráfica dos parâmetros

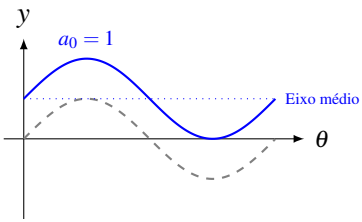
Abaixo, ilustra-se o efeito isolado de cada parâmetro sobre a função base $y = \text{sen}(x)$ (em cinza tracejado):



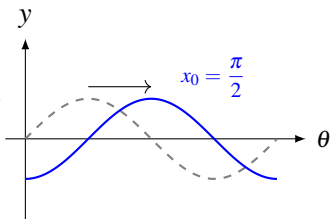
(A) Variação de a: Afeta a amplitude (estiramento vertical)



(B) Variação de b: Afeta o período (compressão horizontal)



(C) Variação de a_0: Translada o gráfico verticalmente



(D) Variação de x_0: Translada o gráfico horizontalmente

Obtenção dos Parâmetros a partir de Dados

Sejam $y_{\max}$ e $y_{\min}$ os valores máximo e mínimo da função, e $x_{\max}$ a posição onde ocorre o primeiro máximo (para cosseno) ou ponto de inflexão ascendente (para seno). Tem-se:

1. **Eixo médio:** $a_0 = \frac{y_{\max}+y_{\min}}{2}$
2. **Amplitude:** $a = \frac{y_{\max}-y_{\min}}{2}$
3. **Frequência:** $b = \frac{2\pi}{T}$, onde T é o tempo para um ciclo completo.
4. **Fase:** Determina-se x_0 substituindo um ponto conhecido (x, y) na equação ou observando o deslocamento do pico.

Exercício resolvido 4.4.7

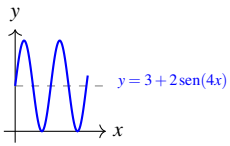
1. Para cada função, determine a amplitude, o período, o deslocamento vertical, o deslocamento de fase e esboce o gráfico:

a) $y = 3 + 2\,\text{sen}(4x)$ b) $y = -1 + 5\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ c) $y = \text{tg}\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$

Resolução:

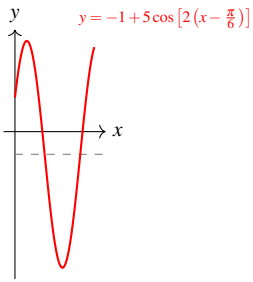
a) Comparando com $y = a_0 + a\,\text{sen}(bx)$:

- **Amplitude:** $|a| = 2$.
- **Período:** $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.
- **Deslocamento vertical:** $a_0 = 3$ (3 un. para cima).
- **Deslocamento de fase:** $x_0 = 0$.



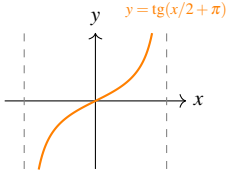
b) Reescrevendo: $y = -1 + 5\cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right]$.

- **Amplitude:** $|a| = 5$.
- **Período:** $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.
- **Deslocamento vertical:** $a_0 = -1$ (1 un. para baixo).
- **Deslocamento de fase:** $x_0 = \frac{\pi}{6}$ (para a direita).

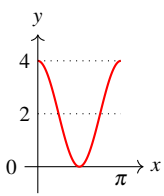


c) Reescrevendo: $y = \text{tg}\left[\frac{1}{2}(x + 2\pi)\right]$.

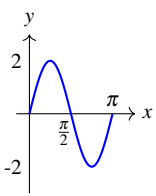
- **Amplitude:** Não definida.
- **Período:** $T = \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{1/2} = 2\pi$.
- **Deslocamento vertical:** $a_0 = 0$.
- **Deslocamento de fase:** $x_0 = -2\pi$ (para a esquerda).



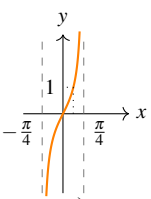
2. Observe os gráficos abaixo e determine a lei de formação da função na forma $y = a_0 + a\cos(bx)$, $y = a_0 + a\,\text{sen}(bx)$ ou $y = a_0 + a\,\text{tg}(bx)$.



a)



b)



c)

Resolução:

a) Pelo gráfico, observa-se uma curva cosseno deslocada verticalmente:

- **Eixo médio:** $a_0 = \frac{\text{máx}+\text{mín}}{2} = \frac{4+0}{2} = 2$.
- **Amplitude:** $a = \frac{\text{máx}-\text{mín}}{2} = \frac{4-0}{2} = 2$.
- **Período:** O ciclo completo termina em $x = \pi$, logo $T = \pi$. Assim, $b = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.
- Como a função começa em seu valor máximo, trata-se de um cosseno sem deslocamento de fase.

Lei de formação: $\boxed{y = 2 + 2\cos(2x)}$.

b) Pelo gráfico, observa-se uma curva seno centrada na origem:

- **Eixo médio:** $a_0 = \frac{2+(-2)}{2} = 0$.
- **Amplitude:** $a = \frac{2-(-2)}{2} = 2$.
- **Período:** O ciclo completo termina em $x = \pi$, logo $T = \pi$. Assim, $b = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.
- Como a função parte da origem crescendo, trata-se de um seno sem deslocamento de fase.

Lei de formação: $\boxed{y = 2\,\text{sen}(2x)}$.

c) Pelo gráfico, observa-se uma curva tangente centrada na origem:

- **Eixo médio:** A função cruza a origem $(0,0)$, logo $a_0 = 0$.
- **Período:** As assíntotas verticais estão em $x = -\frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{\pi}{4}$. A distância entre elas é o período: $T = \frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$.
- **Frequência (b):** Para a tangente, $T = \frac{\pi}{|b|}$. Logo, $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{b} \implies b = 2$.
- **Amplitude/Escala (a):** Observa-se que em $x = \frac{\pi}{8}$ (metade do caminho para a assíntota), $y = 1$. Como $\text{tg}(2 \cdot \frac{\pi}{8}) = \text{tg}(\frac{\pi}{4}) = 1$, o fator multiplicativo é $a = 1$.

Lei de formação: $\boxed{y = \text{tg}(2x)}$.

3. Agronomia – Variação de temperatura em estufa

Em uma estufa climatizada para produção de orquídeas, a temperatura varia de forma periódica ao longo das 24 horas do dia. Registrou-se que a temperatura máxima de 32°C ocorre às 14h e a mínima de 18°C ocorre às 2h da manhã.

a) Determine a função $T(t)$ do tipo cosseno que modela a temperatura em função do tempo t (em horas).

b) Esboce o gráfico de um ciclo completo.

Resolução:

a) **Cálculo dos parâmetros:**

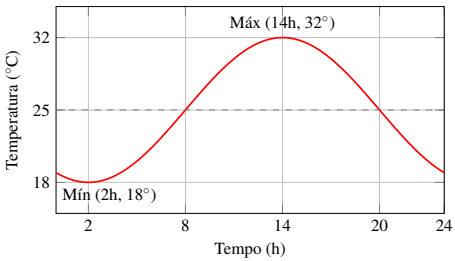
- **Eixo médio (a_0):** $a_0 = \frac{32+18}{2} = 25$.
- **Amplitude (a):** $a = \frac{32-18}{2} = 7$.
- **Período:** O ciclo é diário, logo $T = 24$ horas. Assim, $b = \dfrac{2\pi}{24} = \dfrac{\pi}{12}$.

- **Fase (x_0):** A função cosseno $y = \cos(x)$ tem seu máximo em $x = 0$. Como o máximo da temperatura ocorre às 14h, temos um deslocamento horizontal $x_0 = 14$.

Portanto, a função é:

$$\boxed{T(t) = 25 + 7\cos\left[\frac{\pi}{12}(t-14)\right]}.$$

b) **Esboço do gráfico:**



4. Engenharia Portuária – Altura de maré

Para a construção de um píer, engenheiros monitoraram a altura da maré em um porto. Constatou-se que o nível da água segue aproximadamente uma função senoidal. O nível médio da água é de 5 metros. A maré alta (pico) atinge 8 metros e a maré baixa atinge 2 metros. O ciclo completo de subida e descida dura 12 horas. Suponha que, no instante $t = 0$, a maré esteja no nível médio e subindo.

Determine a equação $h(t)$ e calcule a altura da maré após 2 horas.

Resolução:

Como a maré está no nível médio e subindo em $t = 0$, o modelo mais direto é a função seno positiva, sem deslocamento de fase ($x_0 = 0$).

- $a_0 = 5$ (nível médio).
- $a = 8 - 5 = 3$ (amplitude).
- $T = 12 \implies b = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$.

A função é:

$$h(t) = 5 + 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

Para $t = 2$:

$$\begin{aligned} h(2) &= 5 + 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot 2\right) \\ &= 5 + 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 5 + 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &\approx 5 + 2{,}6 \\ &= \boxed{7{,}6 \text{ metros}}. \end{aligned}$$

5. Engenharia Ambiental - Modelagem de microclima em cultivo de Bambu
Esta questão é apenas um esboço de um possível experimento local

A cidade de Coelho Neto, no Maranhão, possui um histórico de produção agroindustrial. Em estudos de engenharia ambiental avaliam-se o potencial de florestas de bambu (*Bambusa vulgaris*) não apenas para produção de biomassa, mas para a regulação térmica local. Sabe-se que o sombreamento e a evapotranspiração em densos bambuzais podem reduzir a amplitude térmica diária em comparação a áreas abertas.
Uma estação meteorológica instalada no interior de um bambuzal em Coelho Neto registrou a temperatura do ar a cada duas horas durante um dia típico de equinócio. Os dados coletados estão apresentados na tabela ao lado.

Horário (t)	**Temp. (°C)**	**Observação**
00:00	23,4	–
02:00	23,0	Mínima
04:00	23,4	–
06:00	24,5	–
08:00	26,0	Média (subindo)
10:00	27,5	–
12:00	28,6	–
14:00	29,0	Máxima
16:00	28,6	–
18:00	27,5	–
20:00	26,0	Média (descendo)
22:00	24,5	–

Fonte: Dados simulados baseados no padrão climático tropical de monção (Aw) da região leste maranhense.

Com base nos dados tabelados:

a) Determine uma função trigonométrica do tipo $T(t) = a_0 + a \cdot \cos[b(t - t_0)]$ que modele a temperatura T em função da hora t.

b) Interprete o significado físico da constante a_0 neste contexto junto ao gráfico da função.

Resolução:

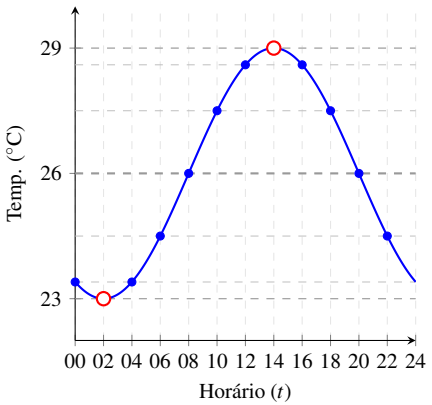
a) Para determinar a lei da função, identificam-se os parâmetros fundamentais a partir da tabela:

- **Máximo e Mínimo:** Pela tabela, $T_{\max} = 29°\text{C}$ (às 14h) e $T_{\min} = 23°\text{C}$ (às 2h).

- **Eixo Médio (a_0):**
$$a_0 = \frac{T_{\max} + T_{\min}}{2} = \frac{29+23}{2} = \frac{52}{2} = 26.$$
Logo, a temperatura média diária no bambuzal é 26°C.
- **Amplitude (a):**
$$a = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{2} = \frac{29-23}{2} = 3.$$
- **Período e Frequência (b):** O ciclo diário de temperatura completa-se em 24 horas. Logo, $T_{\text{período}} = 24$.
$$b = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}.$$
- **Fase (t_0):** A função cosseno padrão, $y = \cos(t)$, atinge seu máximo em $t = 0$. No problema, a temperatura máxima ocorre às 14h. Portanto, há um deslocamento horizontal de 14 unidades para a direita.
$$t_0 = 14.$$

Assim, a função modeladora é: $\boxed{T(t) = 26 + 3 \cdot \cos\left[\frac{\pi}{12}(t-14)\right]}$

b) A constante $a_0 = 26$ representa a **temperatura média diária** no interior do bambuzal (veja o gráfico ao lado).
Em termos de engenharia térmica e ambiental, este valor define a linha de base (eixo de oscilação) sobre a qual ocorrem as variações térmicas.
A presença da cobertura vegetal do bambu tende a estabilizar essa média e reduzir a amplitude (diferença entre pico e vale) em comparação a áreas expostas, proporcionando um microclima mais ameno.



6. (Adaptado de pesquisas agrometeorológicas) A cana-de-açúcar (*Saccharum officinarum*) é uma cultura tropical que exige temperaturas específicas para otimização do crescimento e da sacarose. Em Coelho Neto-MA, antigo polo canavieiro do Maranhão, foram coletadas temperaturas médias mensais do solo a 15 cm de profundidade[8].

Mês	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
T (°C)	27,5	27,8	27,6	26,9	25,8	24,5	24,1	24,8	25,7	26,5	27,2	27,4

[8] Dados modelados para fins didáticos, baseados em padrões climáticos da região Nordeste. Em aplicações reais, consulte institutos meteorológicos oficiais.

a) Encontre um modelo matemático (equação) que explique o fenômeno.

b) Analise os dados e pesquise informações complementares que enriqueçam esse experimento.

Resolução:

Modelagem matemática: Observando a periodicidade anual (12 meses), pode-se aproximar os dados por uma função cosseno deslocada:

$$T(x) = a_0 + a\cos\left(\frac{\pi}{6}(x - x_0)\right)$$

onde x representa o mês ($x = 1$ para Janeiro, $x = 2$ para Fevereiro, etc.).

Cálculo dos parâmetros:

- **Temperatura média anual:** $a_0 = \dfrac{T_{\max} + T_{\min}}{2} = \dfrac{27,8 + 24,1}{2} = 25,95$
- **Amplitude:** $a = \dfrac{T_{\max} - T_{\min}}{2} = \dfrac{27,8 - 24,1}{2} = 1,85$
- **Deslocamento de fase:** O máximo ocorre em Fevereiro ($x = 2$), enquanto o cosseno puro tem máximo em $x = 0$. Assim, $x_0 = 2$.
- **Período:** $T = 12$ meses $\Rightarrow b = \dfrac{2\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6}$

Modelo ajustado:

$$\boxed{T(x) = 25,95 + 1,85\cos\left[\frac{\pi}{6}(x - 2)\right].}$$

Validação do modelo: Para Março ($x = 3$):

$$T(3) = 25,95 + 1,85\cos\left[\frac{\pi}{6}(1)\right] = 25,95 + 1,85\cos(30^\circ) \approx 25,95 + 1,85 \times 0,866 = \boxed{27,55^\circ\text{C}.}$$

Valor próximo ao observado (27,6°C), com erro de apenas 0,05°C.

Análise dos dados:

- Período mais quente: Fevereiro (27,8°C) – fase de crescimento vegetativo acelerado
- Período mais frio: Julho (24,1°C) – período de menor crescimento
- Amplitude térmica anual: 3,7°C (variação moderada típica de regiões tropicais)

Aplicação agronômica:

- A cana-de-açúcar tem temperatura ótima de crescimento entre 25°C e 30°C
- Temperaturas abaixo de 20°C reduzem significativamente o crescimento
- O modelo mostra que Coelho Neto-MA mantém temperaturas adequadas para cana durante todo o ano
- O período mais crítico (Junho-Julho) ainda mantém temperaturas acima de 24°C, permitindo crescimento contínuo

Para estudos reais de zoneamento agrícola, recomendam-se dados de pelo menos 30 anos (normais climatológicas). Fontes oficiais: INMET (Instituto Nacional de Meteorologia) e EMBRAPA (Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária). A cana-de-açúcar no Maranhão teve expansão nas décadas de 1970-1980, com declínio posterior devido a fatores econômicos.

Exercício 4.4.7

1. Utilizando o modelo $T(x)$ do exemplo 6, para cana-de-açúcar, calcule:

   a) A temperatura esperada para o mês de Abril.

   b) Em que meses a temperatura atinge exatamente a média anual (25,95°C)?

   c) Qual a variação esperada de temperatura entre o 5° e o 8° mês?

   d) Esboce o gráfico da função.

2. Engenharia Mecânica / Roda-Gigante - Uma roda-gigante de 40 metros de diâmetro tem seu centro a 25 metros do solo. Ela completa uma rotação em 3 minutos. Um passageiro embarca na plataforma, que está no ponto mais baixo da roda.

   a) Escreva uma função $h(t)$ que modele a altura do passageiro em relação ao solo em função do tempo t em minutos. (Dica: use uma função cosseno com reflexão).

   b) Qual será a altura do passageiro após 1 minuto de passeio?

   c) Em que instantes, durante a primeira volta, o passageiro estará a exatamente 35 metros de altura?

3. Climatologia / Variação de temperatura - A temperatura média mensal de uma cidade agrícola pode ser aproximada pela função $T(m) = 12 - 8\cos\left(\frac{\pi}{6}(m-1)\right)$, onde T é a temperatura em graus Celsius e m é o mês do ano ($m = 1$ para janeiro).

   a) Qual a temperatura média anual e a amplitude térmica?

   b) Em que mês ocorre a temperatura mais alta do ano? E a mais baixa?

4. Engenharia de Energia / Turbina de maré - A velocidade da correnteza em uma região costeira varia de forma senoidal ao longo de um ciclo de 12 horas. A velocidade máxima é de 2 m/s e a mínima é de -2 m/s. A turbina só gera energia de forma eficiente quando a velocidade da correnteza é superior a 1 m/s (em qualquer direção).

   a) Escreva a função $v(t)$ que modela a velocidade, assumindo que em $t = 0$ a velocidade é zero e está aumentando.

   b) Durante quantas horas, em um único ciclo de 12 horas, a turbina opera de forma eficiente?

5. Ecologia / Ciclo predador-presa - Em um ecossistema isolado, a população de lebres (presa, em milhares) pode ser modelada por $L(t) = 10 + 4\cos(\frac{\pi}{6}t)$, e a população de linces (predador, em centenas) por $P(t) = 3 + 2\sin(\frac{\pi}{6}t)$.

a) Qual o período do ciclo populacional de ambas as espécies?

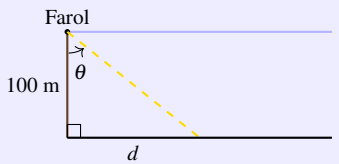
b) A população de presas atinge seu máximo no mês $t = 0$. Em que mês a população de predadores atinge seu máximo? O que esse "atraso" (deslocamento de fase) significa biologicamente?

6. Acústica e Música / Síntese de som - Em um sintetizador, a nota musical Lá (A4) é gerada pela função de pressão do ar $P(t) = 0,5\sin(880\pi t)$, enquanto a nota Dó (C5) é gerada por $Q(t) = 0,5\sin(1046\pi t)$, onde t é o tempo em segundos.

   a) A amplitude das duas notas é a mesma. O que isso significa em termos de percepção sonora (volume)?

   b) O período de uma onda sonora está relacionado à sua frequência (tom ou "pitch"). Calcule o período de cada uma das notas. Qual nota é mais "aguda" (possui maior frequência/menor período)?

7. Topografia e Óptica / Farol giratório - Um farol em um penhasco a 100 metros do mar gira a uma taxa constante. A luz do farol atinge uma praia retilínea. A distância d, em metros, do ponto da praia diretamente em frente ao farol até o ponto iluminado pela luz, é uma função do ângulo θ que o feixe de luz faz com a linha perpendicular à praia.



   a) Qual função trigonométrica descreve a relação $d(\theta)$?

   b) O que acontece com a distância d quando o ângulo θ se aproxima de $90°$ ($\pi/2$ radianos)? Qual o significado físico das assíntotas verticais no gráfico desta função?

4.4.8 Funções trigonométricas inversas

Para que uma função admita inversa, ela deve ser bijetora (injetora e sobrejetora). Observa-se, contudo, que as funções trigonométricas são periódicas e, portanto, não são injetoras em seu domínio natural. Por exemplo, para a função seno, tem-se que $\text{sen}(0) = \text{sen}(\pi) = \text{sen}(2\pi) = 0$.

Para definir as inversas trigonométricas, faz-se necessário restringir o domínio das funções originais a intervalos onde sejam estritamente crescentes ou decrescentes.

Comentário do autor

Atenção à notação: Resolvendo uma grande confusão
Uma das maiores dificuldades no estudo de Cálculo reside na ambiguidade da notação exponencial. É fundamental distinguir:

- **Função Inversa:** A notação $f^{-1}(x)$ indica a função que desfaz a operação de f.

$$y = \text{sen}^{-1}(x) \iff \text{sen}(y) = x$$

  Lê-se: "y é o arco cujo seno vale x" . Por isso, a notação $\text{arcsen}(x)$ é frequentemente preferível para evitar erros.

- **Inverso Multiplicativo:** A notação com expoente fora de parênteses ou aplicada à imagem.

$$[\text{sen}(x)]^{-1} = \frac{1}{\text{sen}(x)} = \text{cossec}(x)$$

Em resumo:

$$\text{sen}^{-1}(x) \neq \frac{1}{\text{sen}(x)} = [\text{sen}(x)]^{-1}$$

Neste livro, privilegia-se o uso dos prefixos **arc** (arcsen, arccos, arctg) para eliminar a ambiguidade.

Definição 4.4.5: Função Arco-Seno

A função arco-seno, denotada por $y = \text{arcsen}(x)$ ou $y = \text{sen}^{-1}(x)$, é a inversa da função seno restrita ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$y = \text{arcsen}(x) \iff \text{sen}(y) = x, \quad \text{com } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \text{ e } -1 \leq x \leq 1$$

Definição 4.4.6: Função Arco-Cosseno

A função arco-cosseno, denotada por $y = \arccos(x)$ ou $y = \cos^{-1}(x)$, é a inversa da função cosseno restrita ao intervalo $[0, \pi]$.

$$y = \arccos(x) \iff \cos(y) = x, \quad \text{com } 0 \leq y \leq \pi \text{ e } -1 \leq x \leq 1$$

Definição 4.4.7: Função Arco-Tangente

A função arco-tangente, denotada por $y = \text{arctg}(x)$ ou $y = \text{tg}^{-1}(x)$, é a inversa da função tangente restrita ao intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$$y = \text{arctg}(x) \iff \text{tg}(y) = x, \quad \text{com} -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \text{ e } x \in \mathbb{R}.$$

No cálculo de valores e resolução de equações, a compreensão das funções inversas baseia-se na pergunta: "*Qual é o ângulo (ou arco) dentro do intervalo restrito que possui este valor de seno/cosseno/tangente?*."

Isso permite perceber que, nas aplicações em Ciências e Engenharia, as funções trigonométricas inversas são ferramentas indispensáveis para recuperar ângulos a partir de medidas lineares ou vetoriais.

Exercício resolvido 4.4.8

1. Determine o valor exato de y (em radianos) para cada caso:

a) $y = \text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ b) $y = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ c) $y = \text{arctg}(-1)$

Resolução:

a) Busca-se um ângulo $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tal que $\text{sen}(y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Sabe-se que $\text{sen}(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Como $\frac{\pi}{3}$ está no intervalo, tem-se:

$$\boxed{y = \frac{\pi}{3}.}$$

b) Busca-se um ângulo $y \in [0, \pi]$ tal que $\cos(y) = -\frac{1}{2}$. Sabe-se que $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$. Como o cosseno é negativo no 2° quadrante, utiliza-se a simetria: $y = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

$$\boxed{y = \frac{2\pi}{3}.}$$

c) Busca-se um ângulo $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ tal que $\text{tg}(y) = -1$. Sabe-se que $\text{tg}(\frac{\pi}{4}) = 1$. Como a tangente é ímpar e o intervalo permite ângulos negativos:

$$\boxed{y = -\frac{\pi}{4}.}$$

2. Na **Física/Ótica a Lei de Snell-Descartes** é dada pela equação $n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2$. Se um raio de luz viaja do ar ($n_1 \approx 1,0$) para uma lâmina de vidro ($n_2 = 1,5$). Se o raio incide com ângulo de 45°, qual é o ângulo de refração θ_2?

Resolução: Pela Lei de Snell ($n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2$):

$$1{,}0 \cdot \operatorname{sen}(45^\circ) = 1{,}5 \cdot \operatorname{sen}(\theta_2) \implies \frac{\sqrt{2}}{2} = 1{,}5 \cdot \operatorname{sen}(\theta_2)$$

$$\theta_2 = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \approx \operatorname{arcsen}(0{,}4714) \approx \boxed{28{,}1^\circ.}$$

3. **Engenharia Mecânica – Projeto de inclinação de Rampa**
Seja uma rampa com "inclinação de 15%" que sobe 15 unidades verticais para cada 100 horizontais. Determine o ângulo de inclinação θ.

Resolução: A porcentagem define a tangente: $\operatorname{tg}(\theta) = \frac{15}{100} = 0{,}15$.

$$\theta = \operatorname{arctg}(0{,}15) \approx \boxed{8{,}53^\circ.}$$

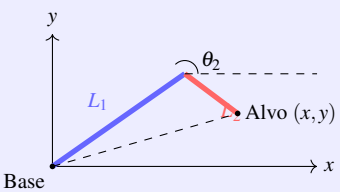
4. **Engenharia de Produção – Processo de Usinagem Cônica**
Para tornear uma peça cônica com diâmetro maior $D = 50$ mm, menor $d = 30$ mm e comprimento $L = 60$ mm, usa-se a relação geométrica é dada por $\operatorname{tg}(\alpha) = \dfrac{D-d}{2L}$. Para esse processo, qual deve ser o ângulo de ajuste α do torno?

Resolução:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{50-30}{120} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} \implies \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{6}\right) \approx \boxed{9{,}46^\circ.}$$

Exercício 4.4.8

1. Robótica / Cinemática Inversa - Um braço robótico simples de dois elos, com comprimentos $L_1 = 50$ cm e $L_2 = 30$ cm, precisa alcançar um ponto no plano com coordenadas $(x, y) = (70, 20)$. O ângulo do segundo elo, θ_2, em relação à extensão do primeiro, pode ser encontrado usando a Lei dos Cossenos no triângulo formado.



A geometria do problema leva à relação $x^2 + y^2 = L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_2\cos(180^\circ - \theta_2)$. Use esta fórmula para determinar o ângulo θ_2 do segundo elo.

2. Energia Solar / Ângulo de Elevação - Para otimizar a eficiência de um painel solar, um engenheiro precisa saber o ângulo de elevação do sol. Em um determinado momento, uma haste vertical de 2 metros de altura projeta uma sombra de 3,5 metros no chão horizontal. Qual é o ângulo de elevação do sol, α, acima do horizonte?

3. Computação Gráfica / Mira Automática - Em um jogo 2D, uma torre de defesa localizada na origem $(0,0)$ precisa mirar em um alvo que apareceu na coordenada $(85,50)$. Para que o projétil seja disparado na direção correta, o sistema precisa calcular o ângulo θ do canhão em relação ao eixo horizontal (eixo x). Determine este ângulo.

4. Navegação Aérea / Cálculo de Rota - Um avião decola de um aeroporto e voa 150 km para Leste. Em seguida, ele faz uma curva e voa 200 km para Norte. Qual é a proa (ângulo medido no sentido horário a partir do Norte) que o piloto deve seguir para voar diretamente do aeroporto até seu ponto final?

5. Biomecânica / Análise de Movimento - Um fisioterapeuta analisa a flexão do joelho de um atleta durante um agachamento. Usando um software de análise de vídeo, ele mapeia as coordenadas da anca (quadril), joelho e tornozelo em um determinado instante: Anca (A) = (50, 80), Joelho (J) = (60, 40) e Tornozelo (T) = (50, 0). Use a Lei dos Cossenos para calcular o ângulo de flexão do joelho ($\angle AJT$).

4.5 Função módulo

4.5.1 Motivação

Em vários problemas de Matemática aplicada, Engenharia e Ciências, torna-se necessário quantificar *tamanho*, *distância* e *erro* sem permitir cancelamentos por sinal. Nesse contexto, o *módulo* (ou *valor absoluto*) fornece uma forma sistemática de transformar qualquer número real em uma medida não negativa, preservando a noção de magnitude. No Cálculo, a função módulo aparece de modo recorrente na escrita de funções definidas por partes, em estimativas de erro, em desigualdades fundamentais (como a desigualdade triangular) e na descrição geométrica de distâncias no eixo real.

Historicamente, a ideia por trás do módulo antecede a própria notação moderna: em problemas geométricos e de mensuração, a noção de *comprimento* já impunha uma quantidade sempre não negativa. Com a consolidação do uso de números negativos e, mais adiante, com a formalização da reta real, passou a ser necessário um operador que representasse *distância orientada sem orientação*, isto é, o afastamento em relação à origem (ou a um ponto de referência), independente do lado do eixo em que o número se encontrasse. O módulo organiza essa necessidade em uma definição algébrica precisa e em uma interpretação geométrica simples.

4.5.2 Função módulo

Definição 4.5.1: Função modular

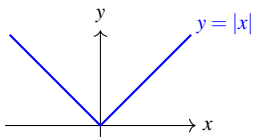
Define-se a **função módulo** por

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \qquad f(x) = |x|.$$

Representação por partes e gráfico

A função módulo é uma função definida por partes:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x < 0, \\ x, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$



Do gráfico e da definição, seguem-se propriedades estruturais relevantes:

- domínio: $\mathbb{R}$;
- imagem: $[0, +\infty)$;
- paridade: $f(-x) = f(x)$ (função par);
- monotonicidade: decrescente em $(-\infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty)$;
- continuidade: contínua em todo $\mathbb{R}$;
- ponto angular: em $x = 0$, as expressões $-x$ e x encontram-se com inclinações distintas; assim, a função é *não derivável* em 0 (aspecto típico em funções definidas por partes).

Transformações e interpretação geométrica

A função

$$g(x) = |x - a|$$

representa a distância entre x e a. O gráfico de $y = |x - a|$ é o gráfico de $y = |x|$ transladado horizontalmente, com vértice em $(a, 0)$. De modo geral,

$$y = |ax + b|$$

produz combinações de dilatação, reflexão e translação, úteis para modelar *desvios* e *erros* em torno de um valor-alvo.

Equações e inequações com módulo

Para $r \geq 0$ e $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} |x-a| = r & \iff x = a-r \text{ ou } x = a+r & \implies S = \{a-r,\ a+r\}, \\ |x-a| < r & \iff a-r < x < a+r & \implies S =]a-r,\ a+r[, \\ |x-a| \geq r & \iff x \leq a-r \text{ ou } x \geq a+r & \implies S = (-\infty, a-r] \cup [a+r, +\infty), \\ |x-a| < -r & & \implies S = \varnothing. \end{cases}$$

Essas equivalências conectam, de maneira direta, o módulo à geometria da reta real e servem de base para a leitura de intervalos, vizinhanças e tolerâncias.

Exercício resolvido 4.5.2

1. Resolver a equação $|x-3| = 2$.

Resolução:

Pela interpretação geométrica, $|x-3| = 2$ significa que a distância entre x e 3 é 2. Logo, há exatamente dois pontos na reta real a distância 2 de 3:

$$x-3 = 2 \ \Rightarrow\ x = 5, \qquad x-3 = -2 \ \Rightarrow\ x = 1.$$

Portanto, o conjunto solução é $\boxed{S = \{1,5\}}$.

2. Resolver a desigualdade $|2x-1| < 5$.

Resolução:

Tem-se

$$|2x-1| < 5 \iff -5 < 2x-1 < 5.$$

Somando 1 e dividindo por 2, obtém-se

$$-2 < x < 3.$$

Portanto, a solução é o intervalo $\boxed{S =]-2,3[}$.

3. Resolver a desigualdade $|3x+2| \leq 4$.

Resolução:

A desigualdade $|3x+2| \leq 4$ equivale a:

$$-4 \leq 3x+2 \leq 4.$$

Subtraindo 2 de todos os termos:

$$-6 \leq 3x \leq 2.$$

Dividindo por 3:

$$-2 \leq x \leq \frac{2}{3} \Longrightarrow \boxed{S = \left[-2,\ \frac{2}{3}\right]}.$$

4. Resolver a desigualdade $|x+1| > 3$.

Resolução:

A desigualdade $|x+1| > 3$ equivale a:

$$x+1 < -3 \quad \text{ou} \quad x+1 > 3.$$

Resolvendo cada parte:

$$x < -4 \quad \text{ou} \quad x > 2.$$

Portanto, $\boxed{S = (-\infty, -4) \cup (2, +\infty)}$.

5. Resolver a desigualdade $|2x-5| \geq 1$.

Resolução:

A desigualdade $|2x-5| \geq 1$ equivale a:

$$2x-5 \leq -1 \quad \text{ou} \quad 2x-5 \geq 1.$$

Resolvendo cada parte:

$$2x \leq 4 \ \Rightarrow\ x \leq 2, \qquad 2x \geq 6 \ \Rightarrow\ x \geq 3.$$

Portanto, $\boxed{S = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)}$.

Resolução:

Como o módulo de qualquer número real é sempre não negativo:

$$|x-2| \geq 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, a desigualdade $|x-2| < -1$ é impossível, pois não existe número real cujo módulo seja menor que um número negativo. Consequentemente, $\boxed{S = \varnothing}$.

7. Resolver a desigualdade $|3x+4| \leq 0$.

Resolução:

Como $|3x+4| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, a única possibilidade para $|3x+4| \leq 0$ é quando $|3x+4| = 0$. Assim:

$$3x+4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{4}{3}. \quad \therefore \boxed{S = \left\{-\frac{4}{3}\right\}}.$$

8. Resolver a equação $|x^2-4x+3|=2$.

Resolução:

A equação modular $|P(x)|=k$ equivale a resolver duas equações quadráticas:

$$|x^2-4x+3|=2 \iff \begin{cases} x^2-4x+3=2, \\ \text{ou} \\ x^2-4x+3=-2. \end{cases}$$

Caso 1: $x^2-4x+3=2$

$$x^2-4x+1=0.$$

Usando a fórmula quadrática:

$$x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot1}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}.$$

Caso 2: $x^2-4x+3=-2$

$$x^2-4x+5=0.$$

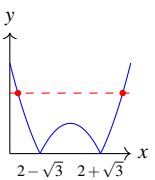
Calculando o discriminante:

$$\Delta=(-4)^2-4\cdot1\cdot5=16-20=-4<0.$$

Como $\Delta<0$, não há soluções reais para este caso.

Portanto, o conjunto solução é:

$$\boxed{S=\left\{2-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}\right\}}.$$



O gráfico da função $f(x)=|x^2-4x+3|$ intersecta a reta horizontal $y=2$ exatamente nos pontos $x=2\pm\sqrt{3}$.

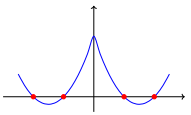
9. Resolver a equação $|x|^2-3|x|+2=0$.

Resolução: Fazendo $t=|x|\geq0$, a equação torna-se:

$$t^2-3t+2=0 \quad\Rightarrow\quad (t-1)(t-2)=0 \quad\Rightarrow\quad t=1 \text{ ou } t=2.$$

Retornando à variável original:

$$|x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1, \qquad |x| = 2 \Rightarrow x = \pm 2.$$



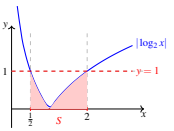
Portanto, $\boxed{S = \{-2, -1, 1, 2\}}$.

10. Resolver a inequação $|\log_2 x| < 1$.

Resolução: Fazendo $t = \log_2 x$, temos $|t| < 1 \iff -1 < t < 1$. Logo:

$$-1 < \log_2 x < 1 \implies \log_2 2^{-1} < \log_2 x < \log_2 2^1 \implies 2^{-1} < x < 2^1 \implies \frac{1}{2} < x < 2.$$

Considerando que $\log_2 x$ só está definido para $x > 0$,



$$\boxed{S = \left]\frac{1}{2}, 2\right[}.$$

11. Resolver a equação $|2^x - 4| = 2$.

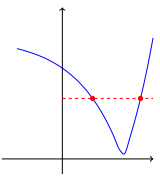
Resolução:

Fazendo $t = 2^x > 0$, a equação torna-se:

$$|t - 4| = 2 \quad \Rightarrow \quad t - 4 = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad t = 2 \text{ ou } t = 6.$$

Retornando à variável original:

$$2^x = 2 \Rightarrow x = 1, \qquad 2^x = 6 \Rightarrow x = \log_2 6.$$



Portanto, $\boxed{S = \{1, \log_2 6\}}$.

Exercício 4.5.2

1. (PUC-SP) Para definir módulo de um número real x podemos dizer que:

   (A) é igual ao valor de x se x é real.

   (B) é o maior valor do conjunto formado por x e o oposto de x.

   (C) é o valor de x tal que $x \in \mathbb{N}$.

   (D) é o oposto do valor de x.

   (E) é o maior inteiro contido em x.

2. (FGV-SP) A soma das raízes da equação $|5x - 1| = 6$ é?

(A) 0 (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{3}{5}$ (E) $\frac{4}{5}$

3. (FGV-SP) Quantos números inteiros não-negativos satisfazem a inequação $|x-2|<5$?

(A) infinitos (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

4. (FEI-SP) Se $|2x-1|\geq 3$, então:

(A) $x\leq -1$ ou $x\geq 2$. (B) $x\geq 3$. (C) $x\leq -\frac{1}{2}$.

(D) $x\leq 0$. (E) $-1\leq x\leq 2$.

5. (ITA-SP) Sabendo que as soluções da equação $|x|^2-|x|-6=0$ são raízes da equação $x^2-ax+b=0$, pode-se afirmar que:

(A) $a=1$ e $b=6$. (B) $a=0$ e $b=-6$.

(C) $a=1$ e $b=-6$. (D) $a=0$ e $b=-9$.

(E) não existem a e b tais que $x^2-ax+b=0$ contenha todas as raízes da equação.

6. (UFPI) O conjunto S das soluções da equação $-2+2x=|3x-2|$ é:

(A) $S=\{0\}$ (B) $S=\left\{-\frac{4}{5}\right\}$ (C) $S=\left\{0,\frac{4}{5}\right\}$ (D) $S=\left\{-\frac{4}{5}\right\}$ (E) $S=\varnothing$

7. (UECE) Dados os conjuntos $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid |x-5|<3\}$ e $B=\{x\in\mathbb{Z}\mid |x-4|\geq 1\}$, a soma dos elementos de $A\cap B$ é igual a:

(A) 19 (B) 20 (C) 21 (D) 22 (E) 23

8. (UFG) O conjunto solução da equação $\frac{2x+4}{|x-2|}\leq 0$ é:

(A) $\{x\in\mathbb{R}\mid x=-2\}$ (B) $\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq 2\}$ (C) $\{x\in\mathbb{R}\mid x=2\}$

(D) $\{x\in\mathbb{R}\mid -2\leq x\leq 2\}$ (E) $\{x\in\mathbb{R}\mid x<-2 \text{ ou } x>2\}$

9. Engenharia de Produção / Controle de Qualidade - Uma máquina em uma agroindústria envasa pacotes de café com um peso alvo de 500g. A regulamentação permite uma tolerância de, no máximo, 4g para mais ou para menos.

a) Escreva uma inequação modular que represente o intervalo de pesos aceitáveis para um pacote de café de peso p.

b) Durante uma inspeção, foram pesados 5 pacotes: 503g, 495g, 504g, 497g e 504.1g. Quais pacotes devem ser rejeitados?

10. Agronomia / Controle de pH em Hidroponia - Para o cultivo de alface hidropônica, o pH da solução nutritiva deve ser mantido em 6,0, com uma tolerância de $\pm 0,4$. Um sensor automatizado mede o pH continuamente. Se o desvio absoluto do pH em relação ao alvo ultrapassar 0,4, um alarme é acionado.

    a) Escreva a inequação modular que descreve a condição em que o alarme é acionado.

    b) Suponha que, devido a um desequilíbrio, o pH comece a subir linearmente segundo a função $P(t) = 6,0 + 0,05t$, onde t é o tempo em horas. Após quanto tempo o alarme irá soar?

11. Engenharia Elétrica / Proteção de Circuito - A tensão em uma rede de corrente alternada (AC) é modelada por $V(t) = 170\,\text{sen}(120\pi t)$, onde V é a tensão em Volts e t é o tempo em segundos. Um dispositivo de proteção desarma o circuito se o valor absoluto da tensão, $|V(t)|$, exceder 155 Volts para evitar danos a equipamentos sensíveis. Determine o primeiro intervalo de tempo, para $t > 0$, em que o circuito estará desarmado. (Use $\arcsen(155/170) \approx 1,15$ rad).

12. Estatística / Análise de Dispersão - Um agrônomo mede a altura (em cm) de 10 plantas de uma nova variedade de soja: $\{48, 51, 50, 53, 47, 52, 49, 55, 46, 49\}$. A altura média é de 50 cm. Para analisar a variabilidade, ele calcula o desvio absoluto médio, que é a média dos valores $|x_i - 50|$ para cada planta. Calcule o desvio absoluto médio para este conjunto de dados.

13. Otimização e Logística - Dois silos de armazenamento estão localizados em uma estrada retilínea nos quilômetros 30 e 90. Uma nova estação de processamento precisa ser construída nesta mesma estrada em um ponto x. Para minimizar os custos de transporte, a localização ideal é aquela que minimiza a soma das distâncias aos dois silos, dada pela função $S(x) = |x - 30| + |x - 90|$.

    a) Calcule $S(x)$ para $x = 20$, $x = 50$ e $x = 100$.

    b) Esboce o gráfico da função $S(x)$ e determine o intervalo de localizações ótimas para a nova estação (ou seja, onde o valor de $S(x)$ é mínimo).

Aplicações da função módulo a dados experimentais

Em análise de dados, o módulo aparece naturalmente ao medir **desvio absoluto** e **erro absoluto**.

Definição 4.5.2

Dados $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ e um valor de referência $c \in \mathbb{R}$, define-se o **desvio absoluto** de x_i em relação a c por

$$d_i = |x_i - c|.$$

A **média dos desvios absolutos** em relação a c é

$$\text{AAD}(c) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - c|.$$

Uma escolha relevante de c é a **mediana** dos dados, pois essa centralidade está fortemente ligada a critérios

com valor absoluto (minimização de soma de desvios absolutos). Esse ponto é central em métodos robustos: medidas baseadas em módulo tendem a ser menos sensíveis a *outliers*[9] do que medidas baseadas em quadrados, em várias situações práticas.

Definição 4.5.3

A **mediana do desvio absoluto** (MAD) de $x_1, \ldots, x_n$ é definida por

$$\text{MAD} = \text{mediana}\left(|x_1 - \tilde{x}|, \ldots, |x_n - \tilde{x}|\right),$$

em que $\tilde{x}$ denota a mediana de $x_1, \ldots, x_n$.[a]

[a] Definição e uso em estatística robusta: *Median absolute deviation (MAD)* (Wikipedia). Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Median_absolute_deviation. Acesso em: 2026.

Exemplo – robustez a *outliers* em medidas de dispersão):

Considere o conjunto de observações (simuladas)[10]:

$$x = (11{,}8,\ 12{,}0,\ 12{,}1,\ 12{,}4,\ 50{,}0).$$

A mediana é $\tilde{x} = 12{,}1$. Logo, os desvios absolutos em relação à mediana são

$$|x_i - \tilde{x}| = (0{,}3,\ 0{,}1,\ 0,\ 0{,}3,\ 37{,}9),$$

e, portanto,

$$\text{MAD} = 0{,}3.$$

Nesse exemplo, o valor extremo 50,0 altera de forma drástica medidas baseadas na média, mas a MAD permanece pequena e coerente com a concentração principal dos dados.

Erro absoluto médio (MAE) em comparação entre modelo e observação.

Em problemas de previsão, mede-se frequentemente o erro por

$$\text{MAE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |y_i - \hat{y}_i|,$$

em que y_i são valores observados e $\hat{y}_i$ valores previstos.[11]

Esse critério tem leitura imediata: trata-se do *erro típico* em unidades da própria variável, sem elevar erros ao quadrado. Em séries de temperatura, precipitação, vazão, consumo energético e outras variáveis ambientais e

[9] Pesquise na internet e faça uma leitura sobre o que é um *outlier*.

[10] Dados simulados apenas para ilustração didática.

[11] Definição e interpretação do MAE: *Mean absolute error (MAE)* (Wikipedia). Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Mean_absolute_error. Acesso em: 2026.

de engenharia, o MAE fornece uma métrica direta e comparável entre modelos. Bases abertas de clima podem ser obtidas em repositórios públicos, como o *Climate Data Online* da NOAA.[12]

Ajuste por mínimos desvios absolutos (LAD) e norma L^1.

Na regressão linear, uma alternativa ao método de mínimos quadrados consiste em ajustar parâmetros minimizando soma de módulos dos resíduos:

$$\min_{a,b\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} \big|y_i - (a + bx_i)\big|.$$

Esse critério, conhecido como *least absolute deviations* (LAD), está ligado à norma L^1 e costuma apresentar maior robustez a observações aberrantes.[13]

Sugestão de contexto com dados abertos (para exercícios e projetos).

Bases abertas amplamente utilizadas para ilustração de métodos quantitativos incluem:

- séries climáticas (temperatura/precipitação) da NOAA (via CDO);[4]
- emissões anuais de CO_2 (Our World in Data), adequadas para discutir *erros absolutos* em ajustes e previsões.[14]

Exercício 4.5.2

14. Estatística Robusta / Análise de qualidade de frutos - Um agrônomo mede o teor de sólidos solúveis (em graus Brix, °Bx) de uma amostra de laranjas para avaliar a doçura. Os valores coletados foram:

$$X = \{12,2;\ 12,5;\ 12,1;\ 12,4;\ 18,5;\ 12,3\}$$

O valor $18,5$ é um claro *outlier*, provavelmente um erro de medição ou uma fruta de outra variedade.

a) Calcule a média e o desvio padrão da amostra (incluindo o outlier).

b) Calcule a mediana e o Desvio Absoluto Mediano (MAD) da amostra.

c) Compare os resultados. Qual medida de dispersão (desvio padrão ou MAD) descreve melhor a variabilidade "típica" das laranjas, e por quê?

15. Modelagem / Erro Absoluto Médio (MAE) - Um modelo de previsão de evapotranspiração (ET) para uma cultura de soja é testado. A tabela abaixo compara os valores previstos pelo modelo ($\widehat{ET}$) com os

[12] Repositório público de dados climáticos (NOAA/NCEI): *Climate Data Online (CDO)*. Disponível em: https://www.ncei.noaa.gov/cdo-web/. Acesso em: 2026.

[13] Visão geral do critério LAD: *Least absolute deviations* (Wikipedia). Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Least_absolute_deviations. Acesso em: 2026. Ver também discussão técnica: Chen et al., *Analysis of least absolute deviation* (PDF, HKUST/Columbia). Disponível em: https://www.math.hkust.edu.hk/~makchen/Paper/LAD.pdf. Acesso em: 2026.

[14] Base aberta de emissões: *CO_2 emissions* (Our World in Data). Disponível em: https://ourworldindata.org/co2-emissions. Acesso em: 2026.

valores reais observados (ET_{real}), em mm/dia.

Dia	1	2	3	4	5
ET observada	4,5	4,8	5,2	4,9	5,5
ET prevista	4,7	4,6	5,0	5,1	5,3

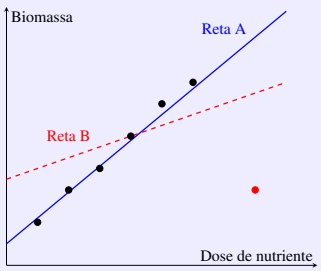
Calcule o Erro Absoluto Médio (MAE) do modelo para este período de 5 dias. O que o valor resultante significa em termos práticos?

16. Engenharia de Irrigação / Controle de planicidade - Na preparação de um terreno para irrigação por sulcos, a declividade deve ser constante. Um topógrafo usa um laser para medir o desvio vertical (d_i) em relação a um plano de referência em vários pontos. A especificação do projeto exige que o desvio absoluto máximo não exceda 2 cm, ou seja, $\max(|d_i|) \leq 2$ cm. As medições foram:

$$D = \{-1,5;\ 0,8;\ -0,5;\ 1,9;\ -2,1;\ 1,2\} \text{ cm}$$

O serviço de nivelamento do terreno atende à especificação? Justifique.

17. Conceitual / Regressão Robusta LAD - Um pesquisador analisa a relação entre a dose de um nutriente (x) e a biomassa produzida por uma planta (y). Ele obtém os dados do gráfico abaixo. Um dos pontos é um claro *outlier* (círculo vermelho), possivelmente uma planta que sofreu com uma doença. Duas retas de regressão são ajustadas aos dados: uma pelo método de Mínimos Quadrados (LS) e outra pelo método de Mínimos Desvios Absolutos (LAD).



Qual reta (A ou B) provavelmente representa o ajuste por Mínimos Desvios Absolutos (LAD)? Justifique sua resposta com base na sensibilidade de cada método a outliers.

18. Logística e Cadeia de Frio - Um caminhão frigorífico transporta vacinas que devem ser mantidas a uma temperatura de 5°C. O custo operacional de refrigeração, C, é proporcional à integral do desvio absoluto da temperatura em relação ao alvo ao longo do tempo, ou seja, $C \propto \int |T(t) - 5| dt$. Em um dia, a temperatura interna do caminhão variou segundo a função $T(t) = 5 + 2\cos(\frac{\pi}{6}t)$, onde t é o tempo em horas. Qual o desvio absoluto da temperatura no instante $t = 4$ horas?

Capítulo 5

Sequências e Progressões

5.1 Introdução

Sequências e progressões aparecem, historicamente, como uma das primeiras formas de a matemática organizar *padrões* e *regularidades* observados em contagens, medidas e repartições. Registra-se que problemas de natureza aritmética, ligados a calendários, tributos, comércio e construção, já exigiam formas sistemáticas de descrever "o que acontece no passo seguinte" e como um processo evolui quando se repete uma mesma regra.

Diversos fenômenos nas engenharias e nas ciências não são observados de modo contínuo, mas em *etapas*, *gerações*, *ciclos* ou *períodos*. Nesses contextos, registra-se uma grandeza em instantes discretos e obtém-se uma lista ordenada de valores. Tal lista, quando indexada por um número natural n, constitui o objeto central deste capítulo: uma **sequência**.

Com o avanço da ciência experimental, tornou-se natural descrever medições sucessivas e refinamentos de procedimentos por meio de sequências: melhora-se a precisão ao repetir etapas, registra-se uma variável em instantes sucessivos, controla-se um erro por ajustes graduais. Nessa perspectiva, uma sequência não é apenas uma lista de números: vê-se nela um modo de representar *evolução*, *tendência* e *acumulação*.

Em química e bioquímica, faz-se frequente o acompanhamento de concentrações por ciclos de reação ou por doses repetidas; em biologia, descrevem-se variações geracionais e cadeias reprodutivas por regras iterativas; em física, modelam-se processos de amortecimento e discretizações temporais em simulações; em ciências sociais, analisam-se dinâmicas de difusão de informação, crescimento de redes e indicadores coletados periodicamente. Em todos esses casos, tem-se uma pergunta recorrente: *qual é o comportamento do processo quando o número de etapas cresce?*

Progressões aritméticas e geométricas surgem como modelos-base. A progressão aritmética organiza variações com incremento constante, e a progressão geométrica organiza variações com fator multiplicativo constante. Ainda que simples, tais modelos são decisivos por dois motivos didáticos: (i) permitem separar claramente *descrição* (termo geral, recorrência) de *interpretação* (o que o padrão significa no fenômeno) e (ii) fornecem um laboratório conceitual para discutir *crescimento*, *decrescimento*, *acumulação* e *limites*.

A robustez do estudo de sequências não reside apenas em calcular termos, mas em aprender a raciocinar sobre *propriedades que valem para todo índice natural*. É nesse ponto que se insere, de modo natural, o princípio da indução: um método de prova que formaliza a passagem do "caso inicial" para "todos os casos", e que treina o pensamento matemático necessário para generalizar padrões, validar fórmulas e justificar procedimentos iterativos.

5.2 Sequências

5.2.1 Conceito e notação

Considera-se uma sequência como uma forma de organizar valores segundo uma regra, explícita ou implícita, indexada por números naturais. Em termos de leitura, entende-se que cada índice $n \in \mathbb{N}$ identifica uma etapa, uma posição ou um instante discreto. Assim, uma sequência é um objeto adequado para descrever padrões, regularidades e processos iterativos.

Definição 5.2.1: Sequência real

Diz-se que uma **sequência real** a_n (Lê-se a índice n) é uma função

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad n \longmapsto a_n.$$

O número a_n é o n**-ésimo termo** da sequência, e a sequência pode ser indicada por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou, abreviadamente, por (a_n).

Observação

Adota-se, quando conveniente, $\mathbb{N}^* = \{1,2,3,\dots\}$. Caso se use $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$, explicita-se o índice inicial no contexto do problema.

5.2.2 Sequências definidas por fórmula (forma explícita)

Diz-se que uma sequência está dada de forma explícita quando se apresenta uma expressão para a_n diretamente em função de n. Nessa situação, calcula-se qualquer termo sem depender dos anteriores.

Exemplo

1. Considere-se a sequência (a_n) definida por $a_n = 2n-1$ para $n \in \mathbb{N}$.

Tem-se:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 7, \ \dots$$

Logo, reconhece-se que (a_n) descreve os números ímpares positivos.

Interpreta-se, adicionalmente, que o crescimento é *aditivo* com incremento constante 2, isto é, a diferença $a_{n+1} - a_n$ é constante.

2. Considere-se (b_n) dada por $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ para $n \in \mathbb{N}$.

Calcula-se:

$$b_1 = 3, \quad b_2 = 6, \quad b_3 = 12, \quad b_4 = 24, \ \dots$$

Observa-se que cada termo é obtido multiplicando-se o anterior por 2. Assim, identifica-se um crescimento *multiplicativo*, típico de duplicações sucessivas.

5.2.3 Sequências definidas por recorrência

Diz-se que uma sequência está dada por recorrência quando um termo é definido a partir de termos anteriores, juntamente com condição(ões) inicial(is).

Definição 5.2.2: Sequência definida por recorrência

Diz-se que (a_n) é definida por **recorrência** quando se especifica:

- uma condição inicial (por exemplo, a_1 ou a_0);
- uma regra que relaciona a_{n+1} com termos anteriores (por exemplo, a_n, a_{n-1}, etc.).

Exemplo

1. Considerando (a_n) definida por

$$a_1 = 5 \qquad \text{e} \qquad a_{n+1} = a_n + 3, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Calcula-se:

$$a_2 = 8, \quad a_3 = 11, \quad a_4 = 14, \ \ldots$$

Verifica-se que o processo adiciona sempre 3 em cada etapa. Portanto, trata-se de uma sequência com variação aditiva constante.

2. Considerando uma grandeza Q_n que é medida por ciclos (por exemplo, ao final de cada período de observação), com o seguinte comportamento: em cada ciclo retém-se uma fração p do valor anterior e adiciona-se uma contribuição fixa c, i.e.,

$$Q_1 = Q_0 \qquad \text{e} \qquad Q_{n+1} = p\,Q_n + c \quad (n \geq 0),$$

onde $0 < p < 1$.

Interpreta-se que p representa uma *retenção* e c uma *entrada constante*. Modelos desse tipo aparecem, por exemplo, em processos de acumulação com perdas proporcionais e entradas regulares, comuns em diferentes áreas científicas.

3. Considerando a sequência (F_n) definida por recorrência:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \qquad \text{e} \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 3).$$

Calculando-se sucessivamente os próximos termos, obtém-se:

$$F_3 = F_2 + F_1 = 2, \quad F_4 = F_3 + F_2 = 3, \quad F_5 = F_4 + F_3 = 5, \quad F_6 = F_5 + F_4 = 8,$$

e, portanto, os primeiros termos são

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \ldots$$

Observe que cada termo é a soma dos dois anteriores, o que caracteriza um processo iterativo de ordem 2.

Essa sequência é conhecida por A Sequência de Fibonacci, associada ao matemático Leonardo de Pisa (Fibonacci), e conhecida por surgir em padrões naturais e morfológicos, como em contagens de folhas e ramificações em certas plantas, em disposições espirais de sementes (por exemplo, em flores) e em estruturas de crescimento em que a etapa atual combina duas etapas anteriores.

Exercício 5.2

1. Considerando $a_n = n^2 - n$. Calcule a_1, a_2, a_3, a_4 e identifique um padrão de crescimento.

2. Considerando $b_1 = 2$ e $b_{n+1} = 3b_n$. Determine b_2, b_3, b_4 e escreva b_n em função de n.

3. Seja $c_1 = 1$ e $c_{n+1} = c_n + (2n+1)$. Calcule c_2, c_3, c_4 e investigue uma fórmula explícita para c_n.

4. Seja $d_0 = 100$ e $d_{n+1} = 0{,}9\,d_n$. Interprete o significado de d_n como um processo de decaimento percentual.

5. Física / O salto da bola - Uma bola de alta performance é solta de uma altura de 2 metros. A cada colisão com o solo, ela recupera 80

   a) Escreva a sequência (h_n) que descreve a altura máxima da bola após a n-ésima colisão. Esta é uma progressão aritmética ou geométrica?

   b) Qual será a altura máxima da bola após a 5ª colisão com o solo?

   c) Determine a distância total percorrida pela bola até ela parar completamente. (Dica: a distância total é a queda inicial mais a soma das subidas e descidas subsequentes).

6. Farmacocinética / Acúmulo de fármaco - Um paciente recebe uma injeção de 250 mg de um antibiótico a cada 12 horas. Sabe-se que, nesse período, o corpo metaboliza 60% do fármaco presente no organismo. Seja Q_n a quantidade de fármaco no sangue imediatamente após a n-ésima injeção.

   a) Escreva a relação de recorrência para Q_{n+1} em função de Q_n.

   b) Sabendo que $Q_1 = 250$ mg, calcule a quantidade de fármaco no organismo após a 2ª, 3ª e 4ª injeções.

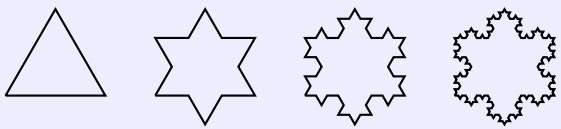
   c) Para onde parece convergir a quantidade de fármaco no longo prazo (o “estado de equilíbrio”)?

7. Ecologia / Modelo populacional logístico - Em um ambiente com recursos limitados, uma população não cresce indefinidamente. O modelo logístico discreto descreve a população P_n no ano n como uma fração da capacidade máxima do ambiente. A relação é:

$$P_{n+1} = r \cdot P_n \cdot (1 - P_n)$$

onde r é a taxa de crescimento. Se a população atinge um "equilíbrio", significa que $P_{n+1} = P_n$. Para uma população de peixes em um lago com uma taxa de crescimento $r = 2$, determine os possíveis pontos de equilíbrio da população.

8. Geometria Fractal / O perímetro do floco de neve de Koch - O floco de neve de Koch é construído a partir de um triângulo equilátero de lado L. A cada passo (iteração), o terço central de cada segmento de reta é substituído por dois novos segmentos, formando um novo triângulo equilátero para fora.



$n = 0$ $n = 1$ $n = 2$ $n = 3$

a) Seja N_n o número de segmentos no floco na iteração n. Encontre a sequência para N_n, sabendo que $N_0 = 3$.

b) Seja L_n o comprimento de cada segmento individual na iteração n. Encontre a sequência para L_n, sabendo que $L_0 = L$.

c) O perímetro total é $P_n = N_n \cdot L_n$. Encontre a sequência para P_n e determine o que acontece com o perímetro quando $n \to \infty$.

9. Matemática Pura / A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro - A Sequência de Fibonacci, definida por $F_1 = 1, F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, possui uma propriedade notável. Considere a sequência das razões de termos consecutivos, $R_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$.

a) Calcule os primeiros 8 termos da sequência R_n.

b) Para qual valor famoso a sequência R_n parece estar convergindo? (Este valor é conhecido como a Razão Áurea ou Número de Ouro, ϕ).

c) Assumindo que a sequência converge para um limite $L > 0$, i.e., $\lim_{n\to\infty} R_n = L$, use a definição da sequência de Fibonacci para mostrar que L deve satisfazer a equação $L^2 - L - 1 = 0$.

5.3 Séries

Somas parciais e a ideia de soma infinita

Ao se somarem os termos de uma sequência, obtém-se uma nova sequência, chamada sequência de somas parciais. Essa construção é a porta de entrada conceitual para séries, pois desloca-se o foco do termo individual para a *acumulação* ao longo dos índices.

Definição 5.3.1: Sequência de somas parciais e Série

Seja (a_n) uma sequência real. Define-se a **sequência das somas parciais** (s_n) por

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Nesse caso, escreve-se formalmente a **série** associada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

entendendo-se que o estudo da série é, essencialmente, o estudo do comportamento de (s_n).

Observação

Diz-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge** quando existe $S \in \mathbb{R}$ tal que $s_n \to S$ quando $n \to \infty$. Nessa situação, escreve-se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Caso contrário, diz-se que a série **diverge**.

Exemplo

1. Considerando $a_n = r^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $r \in \mathbb{R}$. A soma parcial é

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}.$$

Quando $r \neq 1$, obtém-se a expressão

$$s_n = \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

Multiplicando-se a igualdade por r, obtém-se

$$r s_n = r + r^2 + \cdots + r^n.$$

Subtraindo-se membro a membro, vem que

$$s_n - r s_n = (1 + r + \cdots + r^{n-1}) - (r + \cdots + r^n) = 1 - r^n,$$

isto é,

$$(1-r)s_n = 1 - r^n.$$

Se $r \neq 1$, segue que

$$s_n = \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

Se $r = 1$, tem-se $s_n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$. Esse exemplo a soma parcial possui forma fechada e permite discutir, de modo controlado, o comportamento quando n cresce.

2. Considerando a série harmônica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Suas somas parciais são

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \ \ldots$$

Verifica-se (e demonstra-se em cursos posteriores por argumentos de comparação) que s_n cresce sem se estabilizar em um valor finito; logo, a série diverge. Esse exemplo é pedagógico por mostrar que termos que tendem a zero não garantem, por si, a existência de soma infinita.

Exercício 5.3

1. Considerando $s_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$ e reconheça-se uma expressão simples para s_n.

2. Para $|r| < 1$, use a expressão de s_n do Exemplo 1 para investigar o que ocorre com r^n quando $n \to \infty$.

3. Seja $a_n = \frac{1}{2^n}$. Escreva $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ e simplifique s_n.

4. (Série Telescópica) Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

   a) Usando a identidade de frações parciais $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, escreva os primeiros termos da sequência de somas parciais s_1, s_2, s_3, s_4.

   b) Encontre uma fórmula explícita para a soma parcial s_n. (Dica: observe o cancelamento dos termos intermediários).

   c) Calcule o valor da soma infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

5. Dízimas Periódicas como Séries Geométricas - Uma dízima periódica, como $0,363636\ldots$, pode ser escrita como a soma de uma série geométrica infinita:

$$0,36 + 0,0036 + 0,000036 + \ldots$$

Use a fórmula da soma de uma série geométrica infinita para encontrar a fração irredutível que representa este número.

6. Paradoxo de Zenão / A flecha - Uma flecha é atirada em direção a um alvo a 100 metros de distância. Para atingir o alvo, a flecha deve primeiro percorrer metade da distância (50 m), depois metade da distância restante (25 m), depois metade da nova distância restante (12,5 m), e assim por diante, infinitamente.

   a) Escreva a distância total percorrida pela flecha como a soma de uma série infinita.

   b) Mostre que, apesar de ser uma soma de infinitos termos, a distância total percorrida pela flecha converge para 100 metros.

7. Finanças / Presente valor de uma perpetuidade - Uma bolsa de estudos perpétua planeja pagar R$ 10.000,00 ao final de cada ano, para sempre. Para que isso seja possível, a instituição precisa investir hoje um montante inicial (o "Presente Valor") cujo rendimento anual cubra o pagamento. Se a taxa de juros anual é de 5% ($i = 0,05$), o Presente Valor (PV) é a soma dos valores de cada pagamento futuro trazidos ao presente:

$$PV = \frac{10000}{1,05^1} + \frac{10000}{1,05^2} + \frac{10000}{1,05^3} + \dots$$

   Calcule o valor do investimento inicial necessário para fundar esta bolsa.

5.4 Recorrência

5.4.1 Modelos discretos por regras iterativas

Quando uma lei é aplicada repetidamente e o estado futuro depende do estado atual por uma mesma regra, uma recorrência descreve um *processo iterativo*.

Definição 5.4.1: Equação de recorrência

Diz-se que uma **equação de recorrência** é uma relação que define a_{n+1} em termos de a_n e, eventualmente, de outros termos anteriores, acompanhada de condição(ões) inicial(is).

5.4.2 Recorrência linear de primeira ordem

Definição 5.4.2: Recorrência linear de primeira ordem

Diz-se que a recorrência

$$a_{n+1} = r a_n + b$$

é uma **recorrência linear de primeira ordem** com coeficientes constantes, onde $r, b \in \mathbb{R}$ são constantes e uma condição inicial (por exemplo, a_1) é dada.

Exemplo Considerando

$$a_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad a_{n+1} = 0{,}8\,a_n + 10.$$

Calcula-se:

$$a_2 = 10, \quad a_3 = 18, \quad a_4 = 24{,}4, \quad a_5 = 29{,}52, \ \ldots$$

Observa-se que a sequência cresce, mas os incrementos diminuem. Interpreta-se que o termo $0{,}8\,a_n$ representa retenção parcial do estado anterior e o termo 10 representa aporte constante por etapa.

Exercício 5.4

1. Seja $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = 1{,}5\,a_n$. Determine a_n explicitamente.

2. Seja $b_0 = 50$ e $b_{n+1} = 0{,}9\,b_n + 5$. Calcule b_1, b_2, b_3 e descreva qualitativamente o comportamento.

3. Seja $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Calcule $F_3, \ldots, F_8$.

4. Matemática Financeira / Amortização Discreta - Um produtor rural financia um implemento agrícola. O saldo devedor S_n, em reais, após n meses é modelado pela equação de recorrência $S_{n+1} = 1{,}01S_n - 2000$, com saldo inicial $S_0 = 100.000$. Calcule o saldo devedor após 2 meses de amortização.

5. Dinâmica Populacional / Controle biológico - Uma praga em uma lavoura apresenta uma taxa de reprodução que triplica a população a cada semana. Simultaneamente, a introdução de um agente de controle biológico elimina 500 indivíduos por semana. O modelo discreto é dado por $P_{n+1} = 3P_n - 500$. Se a população inicial detectada for $P_0 = 200$ indivíduos, determine se a praga será erradicada e em qual semana isso ocorrerá.

6. (IFPI) Uma sequência crescente de números inteiros $a_1, a_2, a_3, \ldots$, é tal que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$. Se $a_5 = 59$, o maior valor possível para a_1 é:

   (A) 4 (B) 7 (C) 10 (D) 11 (E) 12

5.5 Princípio da Indução

5.5.1 A ideia de prova por etapas

O princípio da indução formaliza uma estratégia frequente: valida-se uma afirmação no caso inicial e prova-se que, se ela vale em uma etapa, então vale na etapa seguinte. Conclui-se, assim, que a afirmação vale para todo número natural.

Teorema 5.5.1: Princípio da Indução Matemática

Seja $P(n)$ uma proposição definida para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponha-se que:

1. $P(1)$ é verdadeira;
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ é verdadeira.

Então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Pela hipótese, tem-se que $P(1)$ é verdadeira. Além disso, sempre que $P(n)$ é verdadeira, segue que $P(n+1)$ também é verdadeira. Logo, obtém-se sucessivamente $P(2)$, $P(3)$, e assim por diante. Conclui-se que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Observação

Em termos conceituais, entende-se a indução como uma ponte entre um *caso inicial* e uma *regra de propagação*. A relevância para sequências e progressões é imediata, pois fórmulas e identidades dependem do índice natural n.

Exercício resolvido 5.5

1. Demonstre, por indução, que

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}, \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Resolução:

Passo 1 (início). Para $n=1$, tem-se $1=\frac{1\cdot 2}{2}=1$, logo a igualdade vale.

Passo 2 (passo indutivo). Suponha-se que, para algum $n \in \mathbb{N}$, vale

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Então:

$$\underbrace{1+2+\cdots+n}_{\frac{n(n+1)}{2}}+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n}{2}(n+1)+(n+1)=(n+1)\underbrace{\left(\frac{n}{2}+1\right)}_{\frac{n+2}{2}}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Logo, a fórmula vale para $n+1$.

Conclui-se, por indução, que a identidade é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

2. Mostre, por indução, que $2^n \geq n+1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Resolução:

Início. Para $n = 1$, tem-se $2^1 = 2 \geq 2$.

Passo indutivo. Suponha-se $2^n \geq n+1$. Então

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2(n+1) = 2n+2 \geq n+2,$$

pois $2n+2-(n+2) = n \geq 0$. Logo, vale para $n+1$.

Conclui-se que $2^n \geq n+1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Exercício 5.5

1. Demonstre, por indução, que $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$.
2. Demonstre, por indução, que $3^n \geq 2n+1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. Demonstre, por indução, que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
4. Ciência da Computação / Complexidade de algoritmos - O número mínimo de movimentos M_n necessários para resolver o clássico problema das Torres de Hanói com n discos satisfaz a recorrência $M_1 = 1$ e $M_{n+1} = 2M_n + 1$. Demonstre, por indução matemática, que a solução explícita para o número de movimentos é $M_n = 2^n - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Geometria e Topologia / Particionamento do plano - Em projetos de irrigação, canais retilíneos dividem um terreno plano. Sabe-se que o número máximo de regiões R_n em que n retas (canais) dividem o plano satisfaz $R_1 = 2$ e $R_{n+1} = R_n + (n+1)$. Demonstre, por indução, que $R_n = \frac{n^2+n+2}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

5.6 Progressão Aritmética (PA)

5.6.1 Definição e caracterização

Definição 5.6.1: Progressão aritmética

Diz-se que (a_n) é uma **progressão aritmética** (PA) quando existe uma constante $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$a_{n+1} = a_n + r, \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

O número r é dito a **razão** da PA.

Propriedades básicas da PA

Se (a_n) é uma PA de razão r, então:

1. (termo geral) tem-se
$$a_n = a_1 + (n-1)r;$$
2. (diferença constante) vale $a_{n+1} - a_n = r$ para todo n;
3. (média aritmética) para $n \geq 2$, tem-se
$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Proposição 5.6.1: Soma dos n primeiros termos de uma PA

Se (a_n) é uma PA, então a soma dos n primeiros termos é
$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Exercício resolvido 5.6

1. Use recorrência para deduzir a fórmula do termo geral de uma PA.

Resolução:

Considere-se uma PA (a_n) de razão r, i.e.,
$$a_{n+1} = a_n + r, \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Subtraindo-se a_n em ambos os membros, obtém-se
$$a_{n+1} - a_n = r.$$

Somando-se essas igualdades de $n = 1$ até $n = n-1$, vem que
$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n-1} r.$$

No lado esquerdo ocorre *cancelamento telescópico*, assim:
$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_1,$$

e no lado direito tem-se a soma de $(n-1)$ termos iguais a r:

$$\sum_{k=1}^{n-1} r = (n-1)r.$$

Logo,

$$a_n - a_1 = (n-1)r,$$

i.e.,

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r}.$$

2. Considere uma PA com $a_1 = 7$ e $r = -2$. Encontre a fórmula do termo geral para a partir dela exibir o 5° termo bem como a soma dos 5 primeiros termos.

Resolução:

Tem-se:

$$a_n = 7 + (n-1)(-2) = 9 - 2n.$$

Calcula-se:

$$a_5 = 9 - 10 = -1, \qquad S_5 = \frac{5}{2}(a_1 + a_5) = \frac{5}{2}(7-1) = 15.$$

3. Considere a sequência definida por blocos de inteiros consecutivos:

$$1; \quad 2+3; \quad 4+5+6; \quad 7+8+9+10; \quad 11+12+13+14+15; \ldots$$

Seja T_n a soma do n-ésimo bloco. Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n = \frac{n(n^2+1)}{2}.$$

Resolução:

Denote-se por T_n a soma do n-ésimo bloco. Observa-se que o n-ésimo bloco possui exatamente n parcelas e que tais parcelas são inteiros consecutivos; logo, o n-ésimo bloco é uma PA com n termos.

Seja I_n o primeiro inteiro do n-ésimo bloco. Então:

$$I_1 = 1, \qquad I_2 = 2, \qquad I_3 = 4, \qquad I_4 = 7, \qquad I_5 = 11, \ldots$$

Para passar do primeiro termo de um bloco ao primeiro termo do bloco seguinte, soma-se o tamanho do bloco. Assim,

$$I_{n+1} = I_n + n.$$

Portanto, I_n pode ser visto como o acumulado dos tamanhos dos blocos anteriores:

$$I_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \frac{(n-1)n}{2}.$$

O último inteiro do n-ésimo bloco é

$$F_n = I_n + (n-1),$$

pois há n termos consecutivos.

Como T_n é a soma de uma PA de n termos, primeiro termo I_n e último termo F_n, tem-se

$$T_n = \frac{n(I_n + F_n)}{2} = \frac{n\big(I_n + (I_n + n - 1)\big)}{2} = \frac{n(2I_n + n - 1)}{2}.$$

Substituindo-se $I_n = 1 + \frac{(n-1)n}{2}$, obtém-se

$$2I_n = 2 + n(n-1),$$

logo

$$2I_n + n - 1 = 2 + n(n-1) + n - 1 = 1 + n^2.$$

Assim,

$$T_n = \frac{n(n^2+1)}{2}.$$

■

4. Considere novamente a sequência por blocos e a soma T_n do n-ésimo bloco. Demonstre, por indução, que

$$T_n = \frac{n(n^2+1)}{2}, \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Resolução:

Passo 1 (início). Para $n = 1$, tem-se $T_1 = 1$. Além disso,

$$\frac{1(1^2+1)}{2} = 1.$$

Logo, a fórmula vale para $n = 1$.

Passo 2 (hipótese de indução). Suponha-se que, para algum $n \in \mathbb{N}$, vale

$$T_n = \frac{n(n^2+1)}{2}.$$

Passo 3 (passo indutivo). Mostra-se que a mesma expressão vale para $n+1$.

O bloco $n+1$ possui $n+1$ termos consecutivos e começa imediatamente após o último termo do bloco n. Pelo desenvolvimento do item anterior, o último termo do bloco n é

$$F_n = \frac{n(n+1)}{2},$$

logo o primeiro termo do bloco $n+1$ é

$$I_{n+1} = F_n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1,$$

e o último termo do bloco $n+1$ é $I_{n+1}+n$. Assim, pela soma finita de uma PA,

$$T_{n+1} = \frac{(n+1)\big(I_{n+1} + (I_{n+1}+n)\big)}{2} = \frac{(n+1)(2I_{n+1}+n)}{2}.$$

Substituindo-se $I_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + 1$, obtém-se

$$2I_{n+1} + n = n(n+1) + 2 + n = n^2 + 2n + 2 = (n+1)^2 + 1.$$

Logo,

$$T_{n+1} = \frac{(n+1)\big((n+1)^2+1\big)}{2}.$$

Conclui-se, por indução, que

$$T_n = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

5. (UEMA) Considere a sequência cujos termos são somas de blocos de inteiros consecutivos:

$$1; \quad 2+3; \quad 4+5+6; \quad 7+8+9+10; \quad 11+12+13+14+15; \ldots$$

É correto afirmar que o 21° termo dessa sequência vale:

(A) 4461 (B) 4614 (C) 4416 (D) 4641

Resolução:

Pelos itens anteriores, a soma do n-ésimo bloco é

$$T_n = \frac{n(n^2+1)}{2}.$$

Para $n = 21$, tem-se

$$T_{21} = \frac{21(21^2+1)}{2} = \frac{21(441+1)}{2} = \frac{21\cdot 442}{2} = 21\cdot 221 = 4641.$$ **Resposta**: alternativa (D).

Exercício 5.6

1. Seja $a_1 = 4$ e $r = 3$. Calcule a_{10} e S_{10}.

2. Em uma PA, tem-se $a_3 = 11$ e $a_8 = 26$. Determine r e a_1.

3. Mostre que, em uma PA, vale $a_p + a_q = a_r + a_s$ sempre que $p + q = r + s$.

4. Demonstre pelo princípio da indução matemática a fórmula do termo geral de uma PA.

5. Conta a história que um professor exigente, para aquietar seus alunos com média de 10 anos, pediu que eles somassem de 0 a 100. Para surpresa do professor, um garoto por nome Carl Friedrich Gauss (1777-1855) apresentou em poucos minutos o resultado. Nascia ali um dos mais proeminentes matemáticos. Use o raciocínio de Gauss para demonstrar a Proposição 5.6.1.

6. Engenharia Agrícola / Curvas de Nível - Um pomar é projetado para ser plantado em fileiras acompanhando as curvas de nível de um terreno acidentado, visando à conservação do solo. A primeira fileira comporta 20 árvores, a segunda 24, a terceira 28, mantendo-se esse padrão de incremento linear. Se o projeto topográfico comporta exatamente 15 fileiras, determine o número total de árvores plantadas no pomar.

7. Física Clássica / Discretização da queda livre - Um objeto em queda livre, partindo do repouso, percorre aproximadamente 4,9 m no primeiro segundo, 14,7 m no segundo segundo, e 24,5 m no terceiro segundo. Mostre que as distâncias percorridas a cada segundo formam uma Progressão Aritmética e calcule a distância percorrida estritamente durante o 10° segundo de queda.

5.7 Progressão Geométrica (PG)

5.7.1 Definição e caracterização

Definição 5.7.1: Progressão geométrica

Diz-se que (a_n) é uma **progressão geométrica** (PG) quando existe uma constante $q \in \mathbb{R}$ tal que

$$a_{n+1} = q\,a_n, \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

O número q é dito a **razão** da PG.

Propriedades básicas da PG

Se (a_n) é uma PG de razão q, então:

1. (termo geral) tem-se
$$a_n = a_1\,q^{n-1};$$
2. (quociente constante) vale $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$ sempre que $a_n \neq 0$;
3. (média geométrica) para $n \geq 2$ e termos positivos, tem-se
$$a_n = \sqrt{a_{n-1}\,a_{n+1}}.$$

Proposição 5.7.1: Soma dos n primeiros termos de uma PG

Se (a_n) é uma PG e $q \neq 1$, então

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1\,\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Se $q = 1$, então $S_n = n \cdot a_1$.

Exercício resolvido 5.7

1. Use recorrência para deduzir a fórmula do termo geral de uma PG.

Demonstração:

Considere-se uma PG (a_n) de razão q, i.e.,

$$a_{n+1} = q\,a_n, \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Aplicando-se a recorrência sucessivamente, obtém-se

$$a_2 = q\,a_1, \qquad a_3 = q\,a_2 = q(q\,a_1) = q^2 a_1, \qquad a_4 = q\,a_3 = q(q^2 a_1) = q^3 a_1,$$

e, em geral, verifica-se o padrão

$$a_n = a_1\,q^{n-1}.$$

Logo, o termo geral de uma PG é dado por

$$\boxed{a_n = a_1\,q^{n-1}}$$ ■

2. Considere a PG com $a_1 = 3$ e $q = 2$. Enconte (i) a fórmula do termo geral, (ii) o sexto termo e (iii) a soma dos seis primeiros termos.

Resolução:

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}.$$

Logo,

$$a_6 = 3 \cdot 2^5 = 96 \qquad \text{e} \qquad S_6 = 3\,\frac{1-2^6}{1-2} = 3 \cdot 63 = 189.$$

3. Considere a PG com $a_1 = 100$ e $q = 0{,}9$. Encontre o termo geral a sequência encontrada.

Resolução:

$$a_n = 100 \cdot (0{,}9)^{n-1}.$$

Interpreta-se que, a cada etapa, ocorre uma retenção de 90% do valor anterior. Assim, descreve-se um decaimento percentual constante.

4. Use a proposição 5.7.1 para demonstrar que a soma dos n primeiros termos de uma PG também pode ser dada por

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1}.$$

Demonstração:

Considere uma PG (a_n) de primeiro termo a_1 e razão q. Pela Proposição 5.7.1, para $q \neq 1$ tem-se

$$S_n = a_1\,\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Além disso, como (a_n) é uma PG, vale

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Multiplicando-se por q, obtém-se

$$a_n q = a_1 q^n.$$

Substituindo-se $a_1 q^n$ por $a_n q$ na expressão de S_n, vem que

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}.$$

Multiplicando-se numerador e denominador por -1, obtém-se a forma equivalente

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1}.$$

Conclui-se, assim, que a soma dos n primeiros termos de uma PG também pode ser escrita como

$$\boxed{S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1}} \qquad (q \neq 1).$$

■

5. Demonstre que, se (a_n) é uma PG com primeiro termo a_1 e razão q tal que $|q| < 1$, então a série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge e vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Demonstração:

Considerando a PG (a_n) dada por $a_n = a_1 q^{n-1}$. Define-se a soma parcial

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = a_1 \sum_{k=1}^{n} q^{k-1}.$$

Para $q \neq 1$, tem-se (pela soma finita de uma PG)

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q},$$

e, portanto,

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Como $|q| < 1$, conclui-se que $q^n \to 0$ quando $n \to \infty$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \frac{1-0}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Assim, a série geométrica converge e sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Observa-se, adicionalmente, que a condição $|q| < 1$ é essencial: se $|q| \geq 1$, então q^n não tende a zero (exceto casos triviais com $a_1 = 0$), e as somas parciais não se estabilizam em um valor finito. ■

6. Use o resultado do exercício anterior para determinar o valor exato do número

$$0{,}7 + 0{,}07 + 0{,}007 + \cdots.$$

Interprete o resultado como uma representação decimal periódica.

Resolução:

Considere a série

$$0{,}7 + 0{,}07 + 0{,}007 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{10^n}.$$

Aí, reconhece-se uma PG com primeiro termo

$$a_1 = \frac{7}{10} \quad \text{e razão} \quad q = \frac{1}{10},$$

de modo que $|q| < 1$. Pelo exercício anterior, a soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{10^n} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{7}{9}.$$

Conclui-se que

$$0{,}7 + 0{,}07 + 0{,}007 + \cdots = \frac{7}{9}.$$

Observa que a soma do lado esquerdo corresponde ao decimal periódico $0{,}\overline{7}$, de modo que

$$0{,}\overline{7} = \frac{7}{9}.$$

Exercício 5.7

1. Seja $a_1 = 5$ e $q = 3$. Calcule a_7 e S_7.

2. Em uma PG, tem-se $a_2 = 12$ e $a_5 = 96$. Determine q e a_1.

3. Verifique que, em uma PG com termos positivos, vale $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}$.

4. Demonstre a proposição 5.7.1 usando indução matemática.

5. Geometria Fractal / Área de Sierpinski - Considere um quadrado de área 1. Na primeira iteração, remove-se o quadrado central de área 1/9. Na segunda iteração, remove-se o quadrado central de cada um dos 8 quadrados restantes, e assim por diante. A área total removida é a soma das áreas removidas em cada etapa.

   A área removida na primeira etapa é $A_1 = 1/9$. Na segunda, é $A_2 = 8 \cdot (1/81)$.

   a) Mostre que a sequência de áreas removidas forma uma progressão geométrica.

   b) Calcule a área total removida do quadrado original.

6. Engenharia Econômica / Depreciação de maquinário - Uma colheitadeira de alta precisão sofre uma depreciação anual de 15% sobre o seu valor no ano anterior. Sabendo-se que o valor de aquisição (ano 0) foi de R$ 500.000,00, escreva a expressão para o valor residual V_n no ano n e calcule o valor contábil do equipamento após 4 anos de uso.

7. Fitopatologia / Disseminação exponencial - Uma área agrícola foi infectada por um fungo cuja área de contaminação dobra a cada mês, configurando uma expansão geométrica. Se a área inicialmente detectada era de 2 hectares, determine a partir de qual mês a área infectada ultrapassará a marca crítica de 256 hectares, inviabilizando a safra.

5.8 Limites de Sequências

5.8.1 Sequências infinitas e a ideia de aproximação

Uma sequência (a_n) pode ser interpretada como um processo que gera valores em etapas sucessivas. Em muitos problemas, não interessa apenas calcular termos isolados, mas compreender o *comportamento global* do processo quando o índice n cresce sem limite.

Definição 5.8.1: Convergência

Diz-se que a sequência (a_n) **converge** para $L \in \mathbb{R}$, e escreve-se

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L,$$

quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, tem-se

$$|a_n - L| < \varepsilon.$$

Nesse caso, L é dito o **limite** de (a_n). Caso não exista tal L, diz-se que (a_n) **diverge**.

Observação

A condição $|a_n - L| < \varepsilon$ significa que, a partir de certa etapa, todos os termos da sequência ficam dentro do intervalo aberto $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Interpreta-se, assim, que a_n pode ser tornado *tão próximo de L quanto se deseje*, desde que n seja suficientemente grande.

Exemplo

1. A sequencia $a_n = \dfrac{1}{n}$ converge em zero.

Demonstração:

Para todo $\varepsilon > 0$, basta tomar $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Então, para $n \geq N$, tem-se

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

■

2. A sequência $b_n = (-1)^n$ é divergente.

Demonstração:

Observa-se que b_n alterna entre 1 e -1, de modo que não se estabiliza em torno de um único número real. Logo, (b_n) diverge. ■

Proposição 5.8.1: Limite de uma potência geométrica

Se $r \in \mathbb{R}$ e $|r| < 1$, então

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0.$$

Observação

O caso $r = 1$ produz a sequência constante $1, 1, 1, \ldots$, cujo limite é 1, e o caso $r = -1$ produz a sequência alternante do Exemplo 2, que diverge. Logo, a condição $|r| < 1$ é decisiva para a convergência a 0.

5.8.2 Critérios de convergência e divergência

Definição 5.8.2: Critérios de convergência de Cauchy

Diz-se que a sequência (a_n) é **de Cauchy** quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todos $m, n \geq N$, vale

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Teorema 5.8.1: Critério de Cauchy para sequências reais

Uma sequência real (a_n) converge se, e somente se, é uma sequência de Cauchy.

Observação

Esse critério é conceitualmente importante porque permite detectar convergência *sem conhecer o limite a priori*. Interpreta-se que os termos passam a ficar arbitrariamente próximos entre si quando n cresce.

5.8.3 Cotas, sequências limitadas e representação na reta real

Definição 5.8.3: Cotas e Sequências limitadas

Seja $A \subset \mathbb{R}$. Diz-se que:

- $M \in \mathbb{R}$ é uma **cota superior** de A quando $x \leq M$ para todo $x \in A$;
- $m \in \mathbb{R}$ é uma **cota inferior** de A quando $m \leq x$ para todo $x \in A$.

Diz-se que A é **limitado superiormente** quando admite alguma cota superior, e **limitado inferiormente** quando admite alguma cota inferior. Diz-se que A é **limitado** quando é limitado superior e inferiormente.

Definição 5.8.4: Sequência limitada

Diz-se que a sequência (a_n) é **limitada** quando existe $M > 0$ tal que

$$|a_n| \leq M, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Observação

Se (a_n) converge, então é limitada. Em outras palavras, uma sequência convergente não pode "escapar" para valores arbitrariamente grandes em módulo.

5.8.4 Ínfimo e supremo (formal)

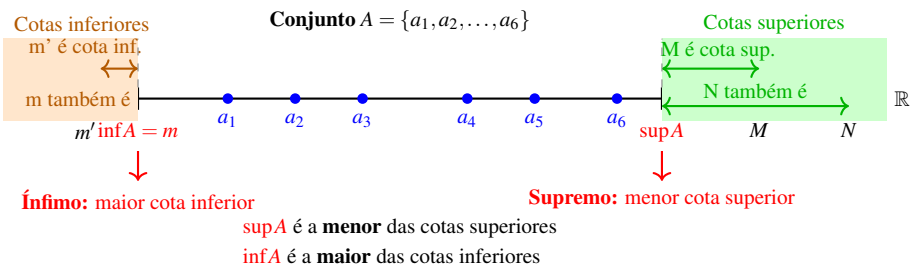
Definição 5.8.5: Supremo e Ínfimo

Seja $A \subset \mathbb{R}$ não vazio.

- O número $s \in \mathbb{R}$ é o **supremo** de A, e escreve-se $s = \sup A$, quando:
  1. s é cota superior de A;
  2. para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in A$ tal que $s - \varepsilon < x$.
- O número $i \in \mathbb{R}$ é o **ínfimo** de A, e escreve-se $i = \inf A$, quando:
  1. i é cota inferior de A;
  2. para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in A$ tal que $x < i + \varepsilon$.

Observação

O supremo é a *menor* das cotas superiores, ainda que não pertença ao conjunto. De modo análogo, o ínfimo é a *maior* das cotas inferiores.



5.8.5 Sequências monótonas e Teorema da Convergência Monótona

Definição 5.8.6: Monotonicidade

Diz-se que a sequência (a_n) é:

- **crescente** quando $a_{n+1} \geq a_n$ para todo n;
- **decrescente** quando $a_{n+1} \leq a_n$ para todo n.

Diz-se que (a_n) é **monótona** quando é crescente ou decrescente.

Teorema 5.8.2: Convergência Monótona

1. Se (a_n) é crescente e limitada superiormente, então (a_n) converge e

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

2. Se (a_n) é decrescente e limitada inferiormente, então (a_n) converge e

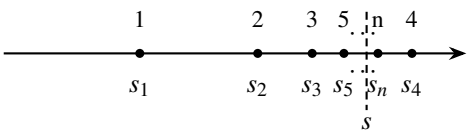
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Observação

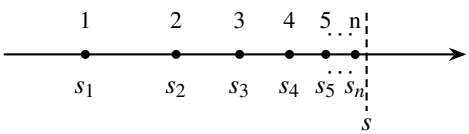
Esse resultado é um dos mais úteis do capítulo: em vez de calcular um limite diretamente, verifica-se *monotonicidade* e *limitação*. Em muitos problemas aplicados, esses dois fatos são mais acessíveis do que uma fórmula fechada para a_n.

Ilustrações dos tipos de sequências na reta real com índices naturais acima e termos abaixo.

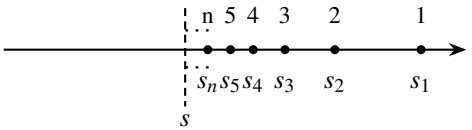
a) **convergente (não-monótona):** oscila e aproxima s.



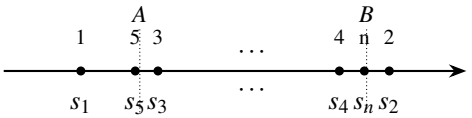
b) **convergente (monótona crescente):** aproxima s por baixo.



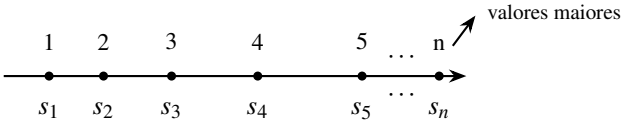
c) **convergente (monótona decrescente):** aproxima s por cima.



d) **divergente limitada (oscilante):** permanece entre A e B, mas não tende a um único valor.



e) **divergente não-limitada:** cresce sem cota superior.



Exemplo Considere-se a sequência definida por

$$a_1 = 1 \qquad \text{e} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + 2}{2}.$$

Mostra-se que $a_{n+1} \geq a_n$ e que $a_n \leq 2$ para todo n. Assim, (a_n) é crescente e limitada superiormente, logo converge pelo Teorema 5.8.5. Interpreta-se que se trata de um processo iterativo que "puxa" os termos em direção a 2. ■

5.8.6 Limite superior e limite inferior de uma sequência

Definição 5.8.7: Limite superior e limite inferior

Para uma sequência real (a_n), definem-se

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \left(\sup\{a_k : k \geq n\}\right) \quad \text{e} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \left(\inf\{a_k : k \geq n\}\right),$$

quando tais limites existirem (admitindo-se valores em $\mathbb{R}$).

Relação entre os limites $\limsup$ e $\liminf$

Se (a_n) é uma sequência real, então:

1. sempre que $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe, tem-se
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n;$$
2. reciprocamente, se $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$, então $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe e é igual a esse valor comum.

Exemplo Para $a_n = (-1)^n$, tem-se que a cauda $\{a_k : k \geq n\}$ sempre contém 1 e -1. Logo,

$$\sup\{a_k : k \geq n\} = 1 \quad \text{e} \quad \inf\{a_k : k \geq n\} = -1,$$

para todo n. Assim,

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1 \qquad \text{e} \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = -1,$$

o que evidencia a divergência.

5.8.7 A série harmônica e a ideia de crescimento sem soma finita

Ao estudar séries, trabalha-se com a sequência de somas parciais. Assim, a convergência de uma série é, essencialmente, um problema de limite de sequência.

Exemplo Demonstre que a série harmônica diverge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Demonstração:
Considere-se a sequência de somas parciais $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Agrupando-se os termos em blocos de tamanho potência de 2, vem:

$$s_{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right).$$

Em cada bloco, estima-se por baixo usando o maior denominador do bloco. Por exemplo,

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} \geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2},$$

e, em geral, no bloco

$$\frac{1}{2^{j-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^j}$$

existem 2^{j-1} termos, e cada um deles é $\geq \frac{1}{2^j}$, logo

$$\frac{1}{2^{j-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^j} \geq 2^{j-1}\cdot\frac{1}{2^j}=\frac{1}{2}.$$

Assim,

$$s_{2^m} \geq 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{m-1 \text{ vezes}}=1+\frac{m}{2}.$$

Como $1+\frac{m}{2}\to\infty$ quando $m\to\infty$, conclui-se que s_{2^m} é ilimitada, e portanto (s_n) não converge. Logo, a série harmônica diverge. ■

A demonstração da divergência da série harmônica fornece uma "régua" fundamental para o estudo de outras séries. Em muitas aplicações práticas, não é possível calcular o valor exato de uma soma infinita, mas é crucial saber se ela converge ou diverge. Para isso, utiliza-se o método de comparar a série desconhecida com uma série de comportamento já estabelecido.

Teorema 5.8.3: Critério da Comparação para Séries

Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos não negativos, isto é, $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponha-se que exista um índice $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq b_n$ para todo $n \geq N$. Então:

1. Se a série "maior" $\sum b_n$ converge, então a série "menor" $\sum a_n$ também converge.

2. Se a série "menor" $\sum a_n$ diverge, então a série "maior" $\sum b_n$ também diverge.

Observação

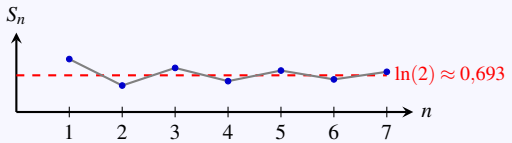
Interpreta-se esse critério como um princípio de dominância. Se uma série cujos termos são maiores possui soma finita, a série com termos menores está contida e não pode escapar para o infinito. De modo análogo, se a série menor já acumula um valor infinito, a série maior, que a domina, obrigatoriamente também divergirá.
Na modelagem matemática em ciências agrárias e engenharias, esse resultado é amplamente utilizado para garantir a estabilidade de sistemas: basta limitar a série que modela o erro ou a dissipação do sistema por uma série convergente conhecida (como uma progressão geométrica de razão $|q|<1$).

Aprofundamento: A Série Harmônica Alternada e o Critério de Leibniz

Observou-se anteriormente que a série harmônica diverge, pois a soma contínua de termos positivos, mesmo que decrescentes, acumula-se sem limite. No entanto, o comportamento muda radicalmente quando os sinais dos termos se alternam.
Considere-se a **série harmônica alternada**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

Ao analisar a sequência das somas parciais (S_n), nota-se um efeito de "vai e volta" (amortecimento). Adiciona-se 1, subtrai-se $1/2$ (recuando), adiciona-se $1/3$ (avançando menos do que se recuou), e assim sucessivamente.



Esse comportamento é garantido pelo **Critério de Leibniz** para séries alternadas. O critério estabelece que uma série da forma $\sum(-1)^{n+1}a_n$ converge se satisfizer duas condições simultâneas:

1. A sequência (a_n) é decrescente, i.e., $a_{n+1} \leq a_n$ para todo n;

2. O limite dos termos é zero, i.e., $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Como $a_n = 1/n$ satisfaz ambas as condições, a série converge. Demonstra-se no Cálculo Integral que essa soma converge exatamente para o logaritmo natural de 2 ($\ln 2$).
Aplicação em Engenharia e Computação: O Critério de Leibniz fornece uma ferramenta poderosa para o *controle de erros*. Em algoritmos de aproximação, o erro cometido ao truncar a série na n-ésima etapa é sempre menor ou igual ao valor absoluto do *primeiro termo descartado* (a_{n+1}). Isso permite aos engenheiros e cientistas de dados saberem exatamente com quantas iterações devem programar um laço de repetição (loop) para garantir uma precisão desejada.

5.8.8 Raio de convergência (séries de potência)

Em várias aplicações, descrevem-se funções por meio de séries de potência. Nesse caso, a convergência depende do valor de x e da forma como os coeficientes se comportam.

Definição 5.8.8: Raio de convergência

Uma **série de potência** centrada em $a \in \mathbb{R}$ é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n,$$

onde (c_n) é uma sequência real. Define-se o **raio de convergência** $R \in [0, \infty]$ como o número tal que:

- a série converge para todo x com $|x-a| < R$;
- a série diverge para todo x com $|x-a| > R$.

O comportamento nos pontos $|x-a| = R$ deve ser estudado separadamente.

Exercício resolvido 5.8

1. Considere-se a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Suas somas parciais são

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad (x \neq 1).$$

Se $|x| < 1$, então $x^{n+1} \to 0$ e obtém-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Se $|x| \geq 1$, as somas parciais não convergem para um número real finito. Logo, o raio de convergência é $R = 1$.

2. (IFSC) Calculando o raio de convergência da série de potência

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n$$

você encontra:

(A) 3 (B) 1 (C) 2 (D) $\frac{x}{3}$ (E) $\frac{1}{3}$

Resolução:

Observa-se que a série dada é uma **série geométrica** de razão

$$q = \frac{x}{3},$$

pois seus termos são $(x/3)^1, (x/3)^2, (x/3)^3, \ldots$. Sabe-se que uma série geométrica infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$$

converge se, e somente se, $|q| < 1$. Logo, no caso em estudo, exige-se

$$\left|\frac{x}{3}\right| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |x| < 3.$$

Portanto, o conjunto de convergência é o intervalo $(-3, 3)$, e o **raio de convergência** é

$$R = 3.$$

Conclui-se que a alternativa correta é **(A)**.

Exercício 5.8

1. Mostre que, se (a_n) converge para L, então a sequência $(|a_n|)$ converge para $|L|$.

2. Determine $\limsup$ e $\liminf$ da sequência $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

3. Verifique que a sequência $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ é crescente e limitada superiormente, e conclua seu limite.

4. Mostre que, se (a_n) é crescente e limitada superiormente, então para todo $\varepsilon > 0$ existe n tal que $\sup\{a_k\} - \varepsilon < a_n$.

5. Use o exemplo da ideia de crescimento sem soma finita da série harmônica para concluir que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

também diverge.

6. Considere a série infinita gerada pela soma das áreas de infinitos quadrados, onde o primeiro tem área igual a 2 e cada quadrado subsequente possui área igual a um terço da área do quadrado anterior. O valor da soma dessa série infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

é igual a:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) $2/3$ (E) $3/2$

7. Engenharia Civil / Limite de Deformação Estrutural - A deformação residual d_n, em milímetros, de uma viga de concreto submetida a n ciclos de carga pesada é modelada empiricamente pela sequência $d_n = 5 - \frac{2}{n}$. Determine a deformação máxima limite esperada para a estrutura quando o número de ciclos tende ao infinito ($n \to \infty$).

8. Ciência do Solo / Saturação de nutrientes - A concentração C_n de um nutriente no solo (em mg/kg) após a n-ésima aplicação de uma dose fixa de fertilizante é dada pela função racional $C_n = \frac{50n+10}{2n+1}$. Calcule a concentração de saturação do solo, i.e., o limite $\lim_{n\to\infty} C_n$, e interprete o resultado.

9. Análise Numérica / Controle de erro de truncamento - Sabe-se pelo Critério de Leibniz que, ao aproximar a soma de uma série alternada convergente $\sum(-1)^{n+1}a_n$ pela sua soma parcial S_n, o erro absoluto cometido é menor ou igual ao primeiro termo omitido, i.e., $|E| \leq a_{n+1}$. Deseja-se aproximar o valor de $\ln(2)$ usando a série harmônica alternada com um erro estritamente menor que 0,01. Determine o número mínimo de termos n que devem ser somados para garantir essa precisão.

10. (IFPI) A respeito de séries de números reais, é INCORRETO afirmar que:

    (A) se $\sum a_k$ e $\sum b_k$ são duas séries de termos não negativos, tal que $a_k \leq b_k$, então $\sum a_k$ diverge $\Rightarrow$ $\sum b_k$ diverge.

    (B) se $\sum a_k$ converge e $a_k \geq 0$, então $\sum \frac{a_k^2}{1+a_k^2}$ converge.

    (C) se $\sum a_k$ é uma série convergente de termos positivos e (b_k) é uma sequência limitada de elementos positivos, então $\sum a_k b_k$ converge.

    (D) se $\sum a_k^2$ e $\sum b_k^2$ são convergentes, então $\sum a_k b_k$ converge absolutamente.

    (E) se $\sum a_k$ é uma série absolutamente convergente e (b_k) é uma sequência limitada de elementos positivos, então $\sum a_k b_k$ diverge.

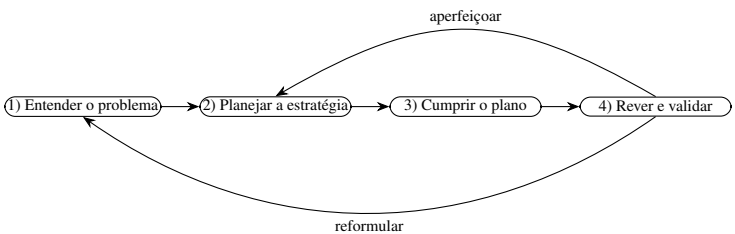
Capítulo 6

Interpretação e Resolução de Problemas

6.1 Introdução

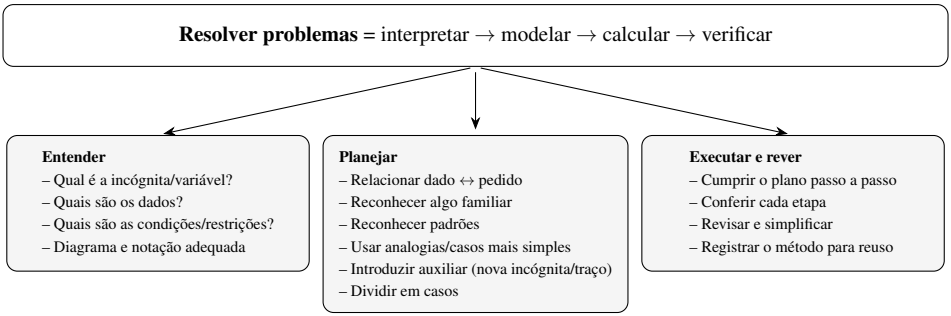
A **resolução de problemas** em *Engenharia* e *Ciências* exige três capacidades integradas: (i) **modelagem** — Entender o problema para traduzir o fenômeno em grandezas e relações a fim de planejar uma estratégia de resolução, (ii) **cálculo** — aplicar técnicas operatórias corretas para cumprir o plano e (iii) **validação** — rever unidades, escalas e plausibilidade para verificar a validade do modelo. Este capítulo organiza ferramentas fundamentais para essas etapas, de modo a perceber que resolver problemas em Ciências e Engenharia não é apenas "calcular": é interpretar situações, modelá-las, executar procedimentos e validar resultados. Não existem regras infalíveis que garantam sucesso, mas há **passos gerais** e **princípios práticos** que tornam o processo mais controlável, reprodutível e menos sujeito a erros.

Ilustrativamente, a resolução de problemas pode ser tratada como um **ciclo** que se resume a:



A etapa 1 evita que um erro de leitura se transforme em uma cadeia de contas corretas para um problema errado. A etapa 2 organiza a ponte entre *dados* e *pedido*. A etapa 3 exige execução com justificativas mínimas. A etapa 4 impõe validação (dimensão, ordem de grandeza, coerência) e transforma soluções em método.

Os **Princípios operacionais** da resolução de problemas assumem a **visão compacta** expressa no diagrama:



Observação

Em problemas aplicados, especialmente em Engenharia, a qualidade da solução é julgada tanto pela conta quanto pela **coerência do resultado**: unidades corretas, valores plausíveis, comportamento esperado (aumenta/diminui) e consistência com as hipóteses assumidas.

6.2 Regras de três

6.2.1 Razão, proporção e grandezas proporcionais

Razão

Dadas grandezas A e B com mesma unidade (ou compatíveis após conversão), a **razão** é o quociente

$$\frac{A}{B}.$$

Quando A e B têm unidades distintas, a razão carrega unidade composta (ex.: km/h, mol/L).

Proporção

Uma **proporção** é uma igualdade entre duas razões:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

Em termos operatórios, implica o *produto cruzado* $A \cdot D = B \cdot C$, preservando consistência de unidades.

Grandezas diretamente e inversamente proporcionais

- **Diretamente proporcionais**: São grandezas cuja razão entre seus valores correspondentes é constante. Quando uma aumenta, a outra aumenta na mesma proporção:

$$y \propto x \iff y = kx \iff \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = k$$

onde k é a constante de proporcionalidade.

- **Inversamente proporcionais**: São grandezas cujo produto entre seus valores correspondentes é constante. Quando uma aumenta, a outra diminui na mesma proporção:

$$y \propto \frac{1}{x} \iff y = \frac{k}{x} \iff y_1 x_1 = y_2 x_2 = k \quad \text{ou} \quad \frac{y_1}{x_2} = \frac{y_2}{x_1} = k$$

onde k é a constante de proporcionalidade.

Conceito geral de regras de três

Regra de três é o cálculo ou processo matemático utilizado para resolver problemas que envolvam duas ou mais grandezas diretas ou grandezas inversamente proporcionais.

Definição 6.2.1: Regra de Três — Formal e Geral

Considere grandezas Y e variáveis $X_1, \ldots, X_n$ relacionadas por uma lei de proporcionalidade do tipo

$$Y \propto \prod_{i=1}^{n} X_i^{\alpha_i},$$

onde cada $\alpha_i \in \{-1, +1\}$ no caso clássico (direta: $\alpha_i = +1$; inversa: $\alpha_i = -1$). Dados dois estados comparáveis $(Y^{(1)}, X_1^{(1)}, \ldots, X_n^{(1)})$ e $(Y^{(2)}, X_1^{(2)}, \ldots, X_n^{(2)})$, vale

$$\frac{Y^{(2)}}{Y^{(1)}} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i^{(2)}}{X_i^{(1)}} \right)^{\alpha_i}.$$

Conhecidos todos os termos exceto um, a equação determina o desconhecido. Este enunciado engloba as formas de regra de três *simples* ($n = 1$) e *compostas* ($n \geq 2$).

6.2.2 Estrutura lógica para regras de três

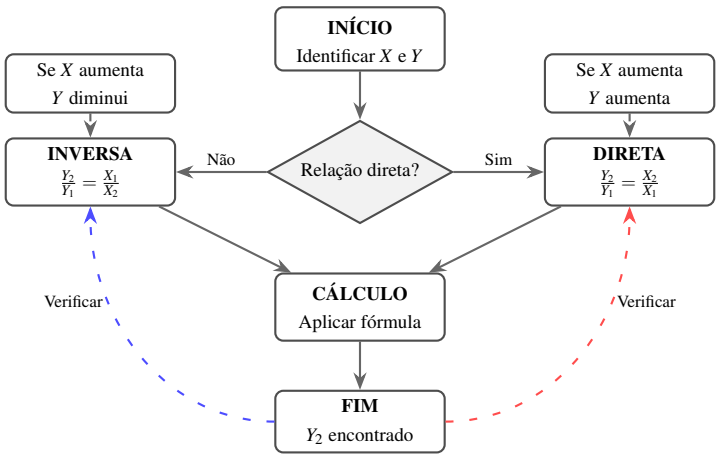
A resolução de problemas envolvendo regra de três segue uma sequência lógica sistemática que garante a correta aplicação do método. Inicia-se pela identificação clara das grandezas envolvidas e do contexto físico do

problema, assegurando a compreensão qualitativa das relações. Em seguida, verifica-se a compatibilidade das unidades de medida, realizando conversões quando necessário para estabelecer coerência dimensional.

A etapa crucial consiste na classificação da relação de proporcionalidade entre as grandezas, determinando se a variação é direta (ambas as grandezas aumentam ou diminuem conjuntamente) ou inversa (uma grandeza aumenta enquanto a outra diminui). Esta classificação define o expoente $\alpha = +1$ para relações diretas e $\alpha = -1$ para relações inversas na formulação matemática.

Com a relação devidamente caracterizada, monta-se a proporção geral seguindo a estrutura formal $\frac{Y_2}{Y_1} = \prod \left(\frac{X_i^{(2)}}{X_i^{(1)}} \right)^{\alpha_i}$, onde a escolha do expoente reflete a natureza da proporcionalidade. Isola-se então a incógnita e procede-se ao cálculo numérico. Finalmente, realiza-se a verificação da solução quanto às unidades, ordem de grandeza e coerência física com o contexto do problema.

Este passo a passo pode ser visto no seguinte esquema lógico:



6.2.3 Regra de três simples

Ideia central

Quando a quantidade de interesse Y depende de uma única grandeza X, atuando de forma **direta** ou **inversa**, compara-se dois estados equivalentes via uma **razão simples**. A grandeza entra com expoente $+1$, se direta, ou -1, se inversa, na relação de proporcionalidade.

Definição 6.2.2: Formal

Se $Y \propto X^{\alpha}$, com $\alpha \in \{+1, -1\}$, então para dois estados comparáveis

$$\frac{Y^{(2)}}{Y^{(1)}} = \left(\frac{X^{(2)}}{X^{(1)}}\right)^{\alpha}.$$

Dados todos os termos exceto um, a equação determina o desconhecido por isolamento algébrico, respeitando **unidades** e **coerência dimensional**.

Definição 6.2.3: Básica

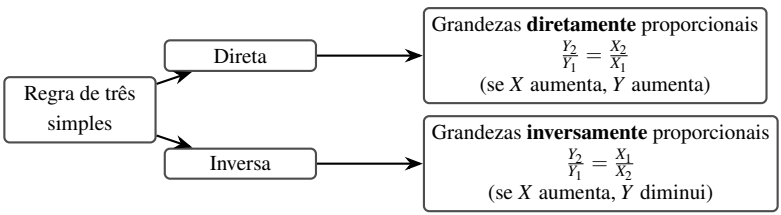
Dadas grandezas X e Y com relação proporcional simples:

– **Direta**: $\frac{Y_2}{Y_1} = \frac{X_2}{X_1}$.

– **Inversa**: $\frac{Y_2}{Y_1} = \frac{X_1}{X_2}$.

Conhecidos três valores entre X_1, X_2, Y_1, Y_2, determina-se o quarto por produto cruzado, respeitando a relação (direta ou inversa) e as unidades.

Esquema prático para regra de três simples direta e inversa



Exercício resolvido 6.2.3

1. Engenharia / Bombeamento *vs*. Vazão - Uma bomba transfere $12\,\mathrm{m}^3$ de água em $30\,\mathrm{min}$. Mantidas as condições, em quanto tempo transfere $18\,\mathrm{m}^3$?

Resolução:

Modelagem: Volume $V \propto$ vazão $Q \times$ tempo t. Para mesmas condições, Q é constante $\Rightarrow V \propto t$ (direta).

Cálculo:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{V_2}{V_1} \Rightarrow \frac{t_2}{30} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \Rightarrow t_2 = 30\,\mathrm{min} \cdot \frac{3}{2} = \boxed{45\,\mathrm{min}.}$$

Validação: Mais volume, mais tempo (coerente); unidades consistentes.

2. Administração / Produtividade *vs*. Tempo - Uma equipe produz 240 unidades em 8 h. Com produtividade $+25\%$, quanto tempo para 240 unidades?

Resolução:

Modelagem: Produção $P = \text{produtividade} \times t$. Fixando P, tem-se $t \propto \dfrac{1}{\text{produtividade}}$ (inversa).

Cálculo:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{\text{prod}_1}{\text{prod}_2} = \frac{1}{1,25} = 0,8 \Rightarrow t_2 = 0,8 \cdot 8\,\text{h} = \boxed{6,4\ h.}$$

Validação. Produtividade maior, tempo menor (coerente).

3. Ciências Agrárias / Dosagem *vs*. Área - Recomenda-se 3 L/ha de herbicida. Para 2.5 ha, qual volume?

Resolução:

Modelagem: Volume $V \propto$ área A (direta) com taxa fixa.

Cálculo: $V = 3L/ha \times 2,5ha = \boxed{7,5 \text{ Litros}}$

Validação: Unidades compatíveis e escala linear com a área (coerente).

4. Química / Estequiometria - A amônia (NH_3) é um dos mais importantes compostos industriais, sendo matéria-prima para a fabricação de fertilizantes. A reação de síntese da amônia ocorre segundo a proporção estequiométrica:

3 massas de H_2 reagem com 14 massas de N_2 para formar 17 massas de NH_3.

Considere que essa proporção se mantém constante.

(a) Se 56 g de N_2 reagem completamente com 12 g de H_2, quantos gramas de NH_3 serão formados?

(b) Verifique se as massas de N_2 e H_2 estão na proporção correta para a reação.

Resolução:

Modelagem e Planejamento: O problema envolve a Lei das Proporções Definidas (estequiometria). As massas dos reagentes e produtos mantêm uma razão constante. Quando as massas de dois reagentes são fornecidas, é mandatório primeiro verificar se a proporção entre eles está correta para determinar se há um reagente limitante (item b). A quantidade de produto formado (item a) depende exclusivamente da quantidade do reagente limitante. Portanto, a estratégia será resolver o item (b) para, então, com segurança, resolver o item (a).

Cálculo (Execução do Plano):

(i) **Verificação da Proporção (Respondendo ao item b):**
A proporção estequiométrica entre N_2 e H_2 é de 14 para 3. Usa-se uma regra de três simples para determinar quanto de H_2 seria necessário para reagir com 56 g de N_2.

$$\frac{\text{massa de } N_2}{\text{massa de } H_2} = \frac{14}{3} = \frac{56}{x}$$

Resolvendo para x:

$$14x = 56 \times 3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{168}{14} = 12 \text{ g de } H_2.$$

Como a quantidade de H_2 necessária (12 g) é exatamente a quantidade fornecida, conclui-se que os reagentes estão na proporção estequiométrica correta. **Não há reagente em excesso.**

(ii) **Cálculo da Massa de Amônia (Respondendo ao item a):**

Agora que se sabe que ambos os reagentes serão completamente consumidos, pode-se usar qualquer um deles para calcular a massa de amônia (NH_3) produzida. Usando a massa de N_2:

$$\frac{\text{massa de } N_2}{\text{massa de } NH_3} = \frac{14}{17} = \frac{56}{y}$$

Resolvendo para y:

$$14y = 56 \times 17 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{952}{14} = \boxed{68 \text{ g de } NH_3.}$$

Validação: A massa dos reagentes (56 g + 12 g = 68 g) é igual à massa do produto formado (68 g), o que satisfaz a Lei da Conservação das Massas. As proporções foram mantidas, e o resultado é coerente.

Exercício 6.2.3

1. Engenharia de Alimentos / Pasteurização - Para pasteurizar 150 litros de leite, um laticínio consome 45 kWh de energia. Qual será o consumo de energia para processar um lote de 250 litros, mantendo as mesmas condições de operação?

2. Ciências Agrárias / Irrigação - Um sistema de irrigação por gotejamento aplica uma lâmina de 5 mm de água em uma área de 2 hectares em 8 horas. Para aplicar a mesma lâmina em uma área de 3,5 hectares, quantas horas serão necessárias?

3. Engenharia Mecânica / Produção - Uma máquina CNC (Controle Numérico Computadorizado) produz 80 peças metálicas em 4 horas de operação contínua. Quantas peças a mesma máquina produzirá se operar por 6,5 horas?

4. Zootecnia / Nutrição Animal - Um lote de 50 frangos de corte consome 12 kg de ração por dia. Para um lote de 320 frangos da mesma idade e linhagem, qual é o consumo diário de ração esperado?

5. Engenharia Civil / Mão de Obra - Uma equipe de 6 operários consegue assentar 90 m^2 de piso em um dia de trabalho. Se 2 operários forem remanejados para outra obra, quantos metros quadrados de piso a equipe restante conseguirá assentar no mesmo período?

6. Física / Movimento Uniforme - Um veículo percorre 240 km em 3 horas, mantendo uma velocidade constante. Se a viagem continuasse nas mesmas condições por mais 2 horas, qual seria a distância total percorrida desde o início?

7. Farmacologia / Preparo de Soluções - Para preparar uma solução salina, um técnico dissolve 18 g de NaCl em água para obter um volume final de 2 litros. Se ele precisar preparar apenas 750 mL da mesma solução, quantos gramas de NaCl ele deverá utilizar?

8. Engenharia de Produção / Velocidade e Tempo - Para completar um determinado percurso, um robô autônomo leva 40 minutos a uma velocidade de 3 m/s. Se a velocidade do robô for aumentada para 5 m/s, quanto tempo ele levará para completar o mesmo percurso?

9. Agronegócio / Colheita - Uma colheitadeira é capaz de colher uma área de 12 hectares em 8 horas. Devido a uma previsão de chuva, o operador precisa colher uma área restante de 5 hectares no menor tempo possível. Quanto tempo a máquina levará para realizar essa tarefa?

10. Química / Diluição de Ácidos - Um químico precisa diluir um ácido concentrado. Ele sabe que 20 mL do ácido, quando adicionados a 80 mL de água, resultam em uma solução com a concentração desejada. Se ele precisar usar 50 mL do mesmo ácido, qual volume de água ele deverá adicionar para obter a mesma concentração final?

6.2.4 Regra de três composta

Ideia central

Quando a quantidade de interesse Y depende simultaneamente de várias grandezas $X_1, X_2, \ldots, X_n$, cada uma atuando de forma **direta** ou **inversa**, comparamos dois estados equivalentes via um **produto de razões**. Cada fator entra com expoente $+1$ (direta) ou -1 (inversa).

Definição 6.2.4: Definição formal

Se $Y \propto \prod_{i=1}^{n} X_i^{\alpha_i}$, com $\alpha_i \in \{+1, -1\}$, então para dois estados comparáveis

$$\frac{Y^{(2)}}{Y^{(1)}} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i^{(2)}}{X_i^{(1)}} \right)^{\alpha_i}.$$

Dados todos os termos exceto um, a equação determina o desconhecido por isolamento algébrico, respeitando **unidades** e **coerência dimensional**.

Heurística prática

1) Liste as grandezas relevantes;

2) Padronize unidades;

3) Classifique cada relação como **direta** $(+1)$ ou **inversa** (-1);

4) Monte o produto de razões;

5) Isole a incógnita;

6) Valide ordem de grandeza e sentido físico.

Definição 6.2.5: Definição básica

Dadas grandezas Y dependendo de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ com relações proporcionais:

- **Direta**: A grandeza entra na razão normalmente
- **Inversa**: A grandeza entra na razão invertida

Regra prática:

$$\frac{Y_2}{Y_1} = \frac{X_1^{(2)}}{X_1^{(1)}} \times \frac{X_2^{(2)}}{X_2^{(1)}} \times \cdots \times \frac{X_n^{(2)}}{X_n^{(1)}}$$

onde cada razão $\frac{X_i^{(2)}}{X_i^{(1)}}$ fica invertida se X_i for inversamente proporcional a Y.

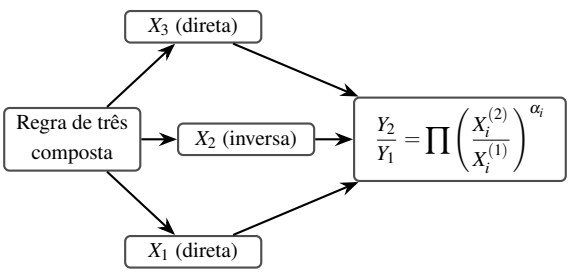
Definição 6.2.6: Definição básica reduzida

Para grandezas Y relacionadas a X_1, X_2:

- **Direta**: razão normal $\left(\frac{X_2}{X_1}\right)$
- **Inversa**: razão invertida $\left(\frac{X_1}{X_2}\right)$

Montagem: Multiplicam-se as razões correspondentes

Esquema prático para regra de três composta



Procedimento algorítmico (passo a passo)

1. Identifique Y e os fatores X_i.
2. Uniformize unidades e defina dois estados comparáveis.
3. Para cada X_i, determine $\alpha_i = +1$ (direta) ou $\alpha_i = -1$ (inversa).
4. Escreva $\dfrac{Y^{(2)}}{Y^{(1)}} = \prod_i \left(\dfrac{X_i^{(2)}}{X_i^{(1)}} \right)^{\alpha_i}$.
5. Isole a incógnita (por exemplo, $Y^{(2)}$ ou algum $X_k^{(2)}$).
6. Calcule e valide o resultado física e dimensionalmente.

Erros comuns e checagens

- Misturar unidades (ex.: m^3/h com L/min) sem converter.
- Classificar incorretamente um fator como direto quando é inverso (ou vice-versa).
- Comparar estados *não equivalentes* (mudança de tecnologia, qualidade, regime de operação).
- Não validar a plausibilidade do resultado (ordem de grandeza e sentido da variação).

Exercício resolvido 6.2.4

1. Engenharia / capacidade × eficiência × tempo - Uma linha fabrica 1200 peças em 6 h com **capacidade** instalada C_1 e **eficiência** operacional $E_1 = 80\%$. Após um *upgrade*, a **capacidade** aumenta $+25\%$ ($C_2 = 1.25\,C_1$) e a **eficiência** cai para 75% ($E_2 = 0.75$). Em quanto **tempo** t_2 se produzem as mesmas 1200 peças?

Resolução:

Modelagem: Produção $P = C \cdot E \cdot t$. Para P fixo, $t \propto \dfrac{1}{CE}$ (relação **inversa** com ambos os fatores).

Cálculo:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{C_1 E_1}{C_2 E_2} = \frac{1 \cdot 0.80}{1.25 \cdot 0.75} = \frac{0.80}{0.9375} \approx 0.8533.$$

Logo, $t_2 \approx 0.8533 \times 6\,\mathrm{h} \approx 5.12\,\mathrm{h} \approx 5\,\mathrm{h}\,07\,\mathrm{min}$.

Validação: Capacidade maior reduz tempo; eficiência menor aumenta tempo; o efeito líquido foi de redução moderada (coerente).

2. Administração / demanda × equipe × tempo - Uma central de atendimento com 20 agentes (N_1) resolve 2400 chamados em 8 h (t_1). Para uma **demanda** 3000 chamados ($+25\%$) com 24 agentes ($+20\%$), quanto tempo t_2 mantendo a mesma produtividade por agente?

Resolução:

Modelagem: Total resolvido $P \propto N \cdot t$. Para produtividade fixa, $t \propto \dfrac{P}{N}$ (direta com P, inversa com N).

Cálculo:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{N_1}{N_2} = \frac{3000}{2400} \cdot \frac{20}{24} = 1.25 \cdot \frac{5}{6} \approx 1.0417.$$

Logo, $t_2 \approx 1.0417 \times 8\,\text{h} \approx 8.33\,\text{h} \approx 8\,\text{h}\,20\,\text{min}$.

Validação: Mais demanda e leve aumento de equipe resultam em tempo ligeiramente maior (consistente).

3. Ciências Agrárias / dosagem × concentração × volume - Prepara-se solução nutritiva: concentração c (g/L) = massa m dividida pelo volume V. Com $m_1 = 600\,\text{g}$ em $V_1 = 200\,\text{L}$, obtém-se $c_1 = 3\,\text{g/L}$. Para obter a **mesma concentração** $c_2 = c_1$ com $m_2 = 750\,\text{g}$, qual volume V_2?

Resolução:

Modelagem: $c = \dfrac{m}{V}$. Mantendo c fixo, $V \propto m$ (direta com massa; inversa com concentração, que é fixa).

Cálculo:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{750}{600} = 1.25 \;\Rightarrow\; V_2 = 1.25 \times 200\,\text{L} = 250\,\text{L}.$$

Validação: Mais soluto exige mais volume para preservar a mesma concentração (coerente).

4. Consumo total de concentrado em confinamento de bovinos - Em um confinamento, um lote piloto com $N_1 = 50$ bovinos de peso médio $W_1 = 450\,\text{kg}$ consumiu, em $d_1 = 1\,\text{dia}$, um total de $Y_1 = 300\,\text{kg}$ de **concentrado**. Pretende-se planejar o suprimento para um lote maior, com $N_2 = 120$ bovinos de peso médio $W_2 = 525\,\text{kg}$ por $d_2 = 7\,\text{dias}$, mantendo a mesma dieta (mesma proporção de concentrado na MS e mesmas condições). Qual a massa total Y_2 de concentrado necessária?

Resolução:

Modelagem:
Para mesmas condições de dieta, o total de concentrado consumido é *diretamente* proporcional ao número de animais, ao peso médio (pois a ingestão diária $\propto$ % do peso vivo) e ao número de dias:

$$Y \propto N \cdot W \cdot d.$$

Proporção composta:

$$\frac{Y_2}{Y_1} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{+1} \left(\frac{W_2}{W_1}\right)^{+1} \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{+1}.$$

Cálculo numérico:

$$\frac{Y_2}{300} = \left(\frac{120}{50}\right)\left(\frac{525}{450}\right)\left(\frac{7}{1}\right) = 2.4 \times 1.166\overline{6} \times 7 \approx 19.6.$$

Logo, $Y_2 \approx 19.6 \times 300\,\text{kg} = 5880\,\text{kg} = 5.88\,\text{t}$.

Validação:
Mais animais, maior peso médio e mais dias $\Rightarrow$ consumo total *aumenta*. Ordem de grandeza condizente para 120 bovinos em uma semana.

5. Volume total de vermífugo e tempo de aplicação em caprinos - Em um rebanho caprino, a dosagem de um vermífugo é de $\delta = 7.5\,\text{mg/kg}$. O produto comercial tem concentração $c = 25\,\text{mg/mL}$. O lote a tratar possui $N = 180$ animais de peso médio $W = 32\,\text{kg}$. Duas equipes de aplicação trabalham em paralelo, cada uma com taxa de $r = 40\,\text{animais/h}$.

(a) Qual o **volume total** V do produto (em mL) necessário?

(b) Qual o **tempo total** t de aplicação?

Resolução:

Modelagem: Seguindo o roteiro do *esquema prático*:

(a) *Identificar grandezas* e contexto físico
- Variável-alvo (a): volume total de produto V.
- Variável-alvo (b): tempo total de aplicação t.
- Fatores: número de animais N, peso médio W, dose por kg δ, concentração c, taxa por equipe r, número de equipes $e = 2$.

(b) *Unidades compatíveis*
- δ em mg/kg, c em mg/mL $\Rightarrow$ volume por animal $= \dfrac{\delta \cdot W}{c}$ em mL.
- Taxas em animais/h.

(c) *Classificar relações* (direta/inversa)
- $V \propto N^{+1} \cdot W^{+1} \cdot \delta^{+1} \cdot c^{-1}$.
- $t \propto N^{+1} \cdot r^{-1} \cdot e^{-1}$ (mais equipes reduzem o tempo).

(d) *Montar a proporção geral*
- Para V (comparando com um estado unitário de referência):

$$V = N \cdot \left(\frac{\delta \cdot W}{c} \right).$$

- Para t:

$$t = \frac{N}{e \cdot r}.$$

(e) *Isolar a incógnita* e calcular —- ver abaixo

(f) *Verificar coerência* dimensional, sentido físico e ordem de grandeza

Procedimento algorítmico (passo a passo):

(a) **Identifique Y e X_i.** - Parte (a): $Y \equiv V$; fatores: N, W, δ, c. - Parte (b): $Y \equiv t$; fatores: N, r, e.

(b) **Uniformize unidades.** - $\delta = 7.5\,\text{mg/kg}$, $W = 32\,\text{kg}$, $c = 25\,\text{mg/mL} \Rightarrow$ dose por animal $v_{1\text{cap}} = \dfrac{7.5 \times 32}{25}$ mL.

(c) **Classifique α_i.** - Para V: $\alpha_N = +1$, $\alpha_W = +1$, $\alpha_\delta = +1$, $\alpha_c = -1$. - Para t: $\alpha_N = +1$, $\alpha_r = -1$, $\alpha_e = -1$.

(d) **Escreva a razão composta.** - $V = N \cdot \dfrac{\delta W}{c}, \quad t = \dfrac{N}{e\,r}$.

(e) **Isole a incógnita** (já isoladas) e **calcule**.

Parte (a):

$$v_{1\text{cap}} = \frac{7.5 \times 32}{25} = \frac{240}{25} = 9.6\,\text{mL/animal}.$$

$$V = N \cdot v_{1\text{cap}} = 180 \times 9.6 = 1728\,\text{mL} = 1.728\,\text{L}.$$

Parte (b):

$$\text{Capacidade total} = e \cdot r = 2 \times 40 = 80\,\text{animais/h}.$$

$$t = \frac{N}{e\,r} = \frac{180}{80} = 2.25\,\text{h} = 2\,\text{h}\,15\,\text{min}.$$

(f) **Valide:** - *Dimensões*: V em mL/L (ok); t em horas (ok).
- *Sentido físico*: mais animais e mais peso $\Rightarrow$ mais volume; mais equipes $\Rightarrow$ menos tempo (coerente).
- *Ordem de grandeza*: ~ 10 mL por caprino é típico para doses por kg com concentrações nessa faixa; tempo de ~ 2 a 3 horas para 180 animais com duas equipes é plausível.

Resposta: (a) $V = 1.728$ L do produto. (b) $t = 2\,\text{h}\,15\,\text{min}$.

Exercício 6.2.4

1. Engenharia de Produção / Fabricação - Em uma fábrica, 10 máquinas operando 8 horas por dia produzem 16.000 peças em 5 dias. Se 2 máquinas forem paradas para manutenção e a fábrica precisar produzir 24.000 peças em 6 dias, quantas horas por dia as máquinas restantes deverão operar?

2. Agronegócio / Armazenamento de Grãos - Um silo com capacidade para 2.000 toneladas de soja é preenchido por 3 esteiras transportadoras em 10 horas. Se a empresa adquirir mais 2 esteiras de mesma capacidade e precisar preencher um silo de 3.000 toneladas, em quanto tempo a operação será concluída?

3. Engenharia Civil / Construção - Para construir um muro de 90 metros de comprimento e 2 metros de altura, 8 operários levaram 5 dias. Quantos operários serão necessários para construir um muro de 120 metros de comprimento e 3 metros de altura em 4 dias?

4. Zootecnia / Consumo de Silagem - Em uma fazenda leiteira, 60 vacas consomem 1.800 kg de silagem em 3 dias. Se o rebanho aumentar para 80 vacas e o estoque de silagem for de 4.000 kg, por quantos dias o estoque será suficiente para alimentar o rebanho?

5. Logística / Transporte - Para transportar 500 toneladas de fertilizantes por uma distância de 600 km, uma frota de 10 caminhões levou 3 dias. Quantos caminhões seriam necessários para transportar 800 toneladas por uma distância de 450 km em 2 dias?

6. Indústria Têxtil / Tecelagem - Em uma tecelagem, 12 teares funcionando 6 horas por dia produzem 2.160 metros de tecido em 2 dias. Se a demanda aumentar para 3.600 metros de tecido e a empresa

puder operar por 8 horas diárias, quantos teares serão necessários para atender ao pedido em 2 dias?

7. Engenharia Ambiental / Reflorestamento - Uma equipe de 15 pessoas planta 900 mudas de árvores em uma área de 6 hectares durante 4 dias. Para um projeto de reflorestamento de 10 hectares, quantas pessoas seriam necessárias para plantar 1.500 mudas em 5 dias?

8. Gráfica / Impressão - Uma gráfica utiliza 4 impressoras que, operando 5 horas por dia, produzem 20.000 folhetos em 2 dias. Se uma das impressoras quebrar e a gráfica precisar entregar um pedido de 30.000 folhetos em 3 dias, quantas horas por dia as impressoras restantes deverão operar?

9. Construção Civil / Escavação - Para escavar uma vala de 120 metros de comprimento, 1,5 metro de profundidade e 1 metro de largura, 5 operários levaram 6 dias. Quantos dias serão necessários para que 8 operários escavem uma vala de 100 metros de comprimento, 2 metros de profundidade e 1,2 metro de largura?

10. Agricultura / Pulverização - Um pulverizador agrícola, com um tanque de 600 litros, consegue cobrir uma área de 15 hectares em 4 horas, deslocando-se a uma velocidade de 5 km/h. Se a velocidade for reduzida para 4 km/h, quantas horas serão necessárias para pulverizar uma área de 12 hectares, considerando que a taxa de aplicação (litros por hectare) permanece a mesma?

6.3 Problemas resolvidos por (M.D.C.) e por (M.M.C.)

A resolução de problemas que envolvem contagem, ciclos e divisões equitativas fundamenta-se em dois conceitos centrais da Teoria dos Números: o Máximo Divisor Comum e o Mínimo Múltiplo Comum. O domínio dessas ferramentas permite a modelagem de situações que variam desde o corte de materiais na engenharia civil até o sincronismo de sinais em telecomunicações.

6.3.1 Máximo Divisor Comum (M.D.C.)

Definição 6.3.1: Máximo Divisor Comum — M.D.C.

Sejam a e b dois números inteiros não nulos. O Máximo Divisor Comum de a e b, denotado por $\text{mdc}(a,b)$, é o maior número inteiro que divide simultaneamente a e b. Formalmente, define-se pelo conjunto interseção dos divisores positivos:

$$\text{mdc}(a,b) = \max\{d \in \mathbb{Z}_+^* : d|a \text{ e } d|b\}$$

Como identificar problemas resolvidos por M.D.C.

Utiliza-se o M.D.C. quando o problema apresentar as seguintes características simultâneas:

1. **Ideia de Divisão:** O problema sugere repartir, cortar, dividir ou distribuir elementos.
2. **Equidade:** As partes divididas devem ter o mesmo tamanho ou quantidade.
3. **Maximização:** Busca-se o *maior* tamanho possível para cada parte ou o *menor* número total de partes.
4. **Sem Sobras:** A divisão deve ser exata, sem resto.

Palavras-chave: "Maior tamanho possível´´, "dividir em partes iguais", "máximo de grupos´´.

Dispositivo Prático (Decomposição Simultânea)

Para o cálculo prático, utiliza-se a fatoração simultânea. O M.D.C. é obtido pelo produto dos fatores primos que dividem **todos** os números ao mesmo tempo.

Números	**Fatores Primos**
$24, 36$	$2 \rightarrow$ divide ambos **(V)**
$12, 18$	$2 \rightarrow$ divide ambos **(V)**
$6, 9$	$2 \rightarrow$ divide apenas o 6 (F)
$2, 3$	$3 \rightarrow$ divide ambos **(V)**
$1, 3$	$3 \rightarrow$ divide apenas o 3 (F)
$1, 1$	

$\text{mdc}(24, 36) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

Exercício resolvido 6.3.1

1. Engenharia Civil - Um engenheiro possui três vigas de aço com comprimentos de 120 cm, 180 cm e 240 cm. Pretende-se cortá-las em pedaços de mesmo comprimento, de modo que o tamanho de cada pedaço seja o maior possível e não haja desperdício de material. Determine o comprimento de cada pedaço e o número total de vigas obtidas.

Resolução: Identifica-se a necessidade de dividir quantidades em partes iguais com o maior tamanho possível. Aplica-se o cálculo do $\text{mdc}(120, 180, 240)$.

Fatorando os números, obtém-se $\text{mdc} = 60$. Portanto, cada pedaço terá **60 cm**.

Para o número total de pedaços:

- Viga 1: $120/60 = 2$ pedaços.
- Viga 2: $180/60 = 3$ pedaços.

- Viga 3: $240/60 = 4$ pedaços.

Total = $2+3+4 = 9$ pedaços.

2. Engenharia Agrícola / Dimensionamento de pastagens - Um projeto de reordenamento territorial visa dividir três glebas de terra retangulares, com áreas de 840 hectares, 1200 hectares e 1440 hectares, em lotes menores para pastagem rotacionada. Determina-se que todos os lotes devem ter a mesma área, sendo esta a maior possível, para otimizar a gestão do gado e a manutenção das cercas. Calcule a área de cada lote e o total de lotes formados.

Resolução: O problema exige a divisão de áreas diferentes em partes iguais de tamanho máximo. Trata-se de um cálculo de máximo divisor comum: $\text{mdc}(840, 1200, 1440)$.

Decompõem-se os números em fatores primos ou utiliza-se o método das divisões sucessivas:

- $840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
- $1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$
- $1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$

O mdc é o produto dos fatores comuns com os menores expoentes: $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 8 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.

Portanto, cada lote terá **120 hectares**.

Total de lotes:

$$\frac{840}{120} + \frac{1200}{120} + \frac{1440}{120} = 7 + 10 + 12 = 29 \text{ lotes.}$$

3. Engenharia de Produção / Gestão de estoques - Uma linha de produção fabrica três tipos de componentes eletrônicos. No final do turno, contabilizam-se 180 unidades do componente A, 240 unidades do B e 300 unidades do C. O gerente de logística determina que os componentes sejam embalados em caixas idênticas, contendo o mesmo número de peças e sem misturar tipos diferentes. Para economizar embalagens, deve-se colocar a maior quantidade possível de peças em cada caixa. Quantas peças haverá por caixa e quantas caixas serão necessárias?

Resolução: Busca-se o maior número que divide simultaneamente as três quantidades de produção. Calcula-se o $\text{mdc}(180, 240, 300)$.

Observa-se que todos são múltiplos de 10 e de 6. Fatorando:

$$\text{mdc}(180, 240, 300) = 60$$

Logo, cada caixa conterá **60 peças**.

O número de caixas necessárias será:

$$\text{Caixas A} = 180/60 = 3; \quad \text{Caixas B} = 240/60 = 4; \quad \text{Caixas C} = 300/60 = 5.$$

Totalizando $3+4+5 = 12$ caixas.

4. Teoria da Administração / Formação de equipes - Uma consultoria empresarial precisa montar equipes multidisciplinares para um projeto. A empresa dispõe de 48 analistas de RH, 72 analistas financeiros e 60 analistas de marketing. A diretoria exige que todos os funcionários sejam alocados, que as equipes tenham o mesmo tamanho dentro de cada área de atuação e que esse tamanho seja o maior possível para facilitar a liderança. Quantos analistas haverá em cada grupo de especialidade?

Resolução: O objetivo é dividir os departamentos em grupos de mesmo tamanho máximo. Calcula-se $\text{mdc}(48, 72, 60)$.

- Divisores comuns: 2, 3, 4, 6, 12.
- O maior divisor comum é 12.

Conclui-se que cada grupo será formado por **12 analistas** da respectiva área.

5. Teoria da Administração / Equipes Multidisciplinares - Com base no exercício anterior, suponha agora que a diretoria decida mudar a estratégia. O objetivo passa a ser formar o maior número possível de equipes de consultoria idênticas, de modo que cada equipe contenha analistas das três áreas (RH, Finanças e Marketing) e que não sobre nenhum funcionário. Determine quantas equipes serão formadas e qual será a composição exata de cada uma.

Resolução: Nesta situação, busca-se o número máximo de grupos que divide simultaneamente o total de funcionários de cada setor. Novamente, utiliza-se o cálculo do $\text{mdc}(48, 72, 60)$.

Como calculado anteriormente, $\text{mdc} = 12$. Isso significa que serão formadas **12 equipes multidisciplinares**.

Para determinar a composição de cada equipe, divide-se o total de profissionais de cada área pelo número de equipes:

- RH: $48 \div 12 = 4$ analistas.
- Finanças: $72 \div 12 = 6$ analistas.
- Marketing: $60 \div 12 = 5$ analistas.

Conclui-se que cada uma das 12 equipes será composta por 4 analistas de RH, 6 financeiros e 5 de marketing, totalizando 15 profissionais por equipe.

6. Ciências Econômicas / Distribuição de dividendos - Um fundo de investimento imobiliário obteve lucros líquidos de três empreendimentos distintos nos valores de R$ 15.000,00, R$ 22.500,00 e R$ 37.500,00. O gestor decide distribuir esses lucros em cotas de participação de valor igual e máximo possível, de modo que o lucro de cada empreendimento seja um múltiplo exato desse valor da cota. Qual deve ser o valor de cada cota?

Resolução: Para encontrar o valor máximo da cota que divide exatamente os três montantes, utiliza-se o mdc. Para facilitar, pode-se trabalhar com os valores divididos por 100 (centenas) ou 1000, ajustando no final.

Calculando $\text{mdc}(15000, 22500, 37500)$: Nota-se que 7500 divide todos os valores:

$$15000 = 2 \times 7500$$

$$22500 = 3 \times 7500$$

$$37500 = 5 \times 7500$$

Portanto, o valor de cada cota deve ser **R$ 7.500,00**.

Exercício 6.3.1

1. Engenharia Civil / Otimização de Materiais - Um construtor tem três rolos de cabo de aço com comprimentos de 360 metros, 480 metros e 600 metros. Para um projeto, ele precisa cortar os cabos em pedaços de mesmo comprimento, sendo este o maior possível, sem que haja sobras. Qual será o comprimento de cada pedaço e quantos pedaços serão obtidos no total?

2. Agronomia / Planejamento de Cultivo - Um agrônomo planeja dividir três áreas de terra, com 288, 432 e 504 hectares, em talhões de mesma área para o cultivo experimental de uma nova variedade de soja. Para facilitar o manejo, os talhões devem ter a maior área possível. Qual será a área de cada talhão e qual o número total de talhões criados?

3. Engenharia de Alimentos / Gestão de Estoque - Um laticínio produziu 720 litros de iogurte natural, 900 litros de iogurte de morango e 1260 litros de iogurte de pêssego. A produção deve ser armazenada em tanques de mesmo volume, sendo este o maior possível, sem misturar os sabores. Qual a capacidade de cada tanque e quantos tanques serão necessários?

4. Zootecnia / Formação de Lotes - Um pecuarista adquiriu 180 novilhos da raça Nelore, 252 da raça Angus e 324 da raça Brahman para um sistema de confinamento. Ele deseja separar os animais em lotes, por raça, de modo que todos os lotes tenham o mesmo número de animais e que este número seja o maior possível. Quantos animais haverá em cada lote?

5. Engenharia Florestal / Inventário - Para um inventário florestal, uma área retangular de 196 metros por 140 metros deve ser quadriculada com parcelas quadradas de mesma área, sendo a área de cada parcela a maior possível. Qual será a medida do lado de cada parcela quadrada?

6. Logística / Armazenamento - Um centro de distribuição recebeu três tipos de caixas com as seguintes dimensões (em cm): (60, 48, 36), (90, 60, 48) e (120, 90, 60). Para otimizar o empilhamento, as caixas devem ser agrupadas em paletes cúbicos, todos do mesmo tamanho e com a maior aresta possível. Qual deve ser a medida da aresta de cada palete cúbico?

7. Engenharia de Produção / Embalagem - Uma indústria farmacêutica produziu 450.000 comprimidos de paracetamol, 600.000 de ibuprofeno e 750.000 de dipirona. A produção será embalada em cartelas (blisters), todas com a mesma quantidade de comprimidos, sendo esta a maior possível. Quantos comprimidos cada cartela conterá?

8. Topografia / Georreferenciamento - Três propriedades rurais vizinhas, com perímetros de 2100 m, 2400 m e 3000 m, precisam ter seus limites demarcados com mourões. Os mourões devem ser igualmente

espaçados ao longo do perímetro de cada propriedade, e a distância entre eles deve ser a maior possível. Qual será o espaçamento entre os mourões?

9. Indústria Química / Fracionamento - Um laboratório possui em seu estoque 10,5 litros de ácido clorídrico, 12,0 litros de ácido sulfúrico e 15,0 litros de ácido nítrico. O químico responsável precisa fracionar esses ácidos em recipientes menores, todos de mesma capacidade e com o maior volume possível. Qual deverá ser a capacidade, em litros, de cada recipiente?

10. Engenharia Elétrica / Projeto de Circuitos - Para um projeto de placa de circuito impresso, um engenheiro precisa cortar tiras de cobre de três barramentos com comprimentos de 132 mm, 156 mm e 180 mm. As tiras devem ter o mesmo comprimento, o maior possível, para padronizar os componentes. Qual será o comprimento de cada tira?

6.3.2 Mínimo Múltiplo Comum (M.M.C.)

Definição 6.3.2: Mínimo Múltiplo Comum — M.M.C.

Sejam a e b dois números inteiros não nulos. O Mínimo Múltiplo Comum, denotado por $\text{mmc}(a,b)$, é o menor número inteiro positivo que é múltiplo simultaneamente de a e b.

$$\text{mmc}(a,b) = \min\{m \in \mathbb{Z}_+^* : a|m \text{ e } b|m\}$$

Como identificar problemas resolvidos por de M.M.C.

Utiliza-se o M.M.C. quando o problema apresentar as seguintes características simultâneas:

1. **Ideia de Encontro:** Eventos que ocorrem periodicamente e busca-se quando ocorrerão juntos novamente.

2. **Ciclos/Tempo:** Envolve repetições em intervalos de tempo ou distância diferentes.

3. **Projeção Futura:** Pergunta-se sobre o "próximo alinhamento" ou a "menor distância" para coincidir.

Palavras-chave: "Coincidir novamente", "próximo encontro", "simultaneamente", "menor tempo possível".

Dispositivo Prático

No cálculo do M.M.C., multiplicam-se **todos** os fatores primos obtidos na decomposição, independentemente de dividirem todos os números ou não.

Números	Fatores Primos
$6,8$	2
$3,4$	2
$3,2$	2
$3,1$	3
$1,1$	

$\text{mmc}(6,8) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$

Propriedade: Relação Fundamental

Para quaisquer inteiros positivos a e b, verifica-se que o produto dos números é igual ao produto do seu mdc pelo seu mmc:

$$a \cdot b = \text{mdc}(a,b) \cdot \text{mmc}(a,b)$$

Esta propriedade é útil para encontrar um valor quando se conhece os outros três.

Exercício resolvido 6.3.2

1. Manutenção Industrial - Em uma fábrica, a manutenção preventiva da máquina A ocorre a cada 6 dias, e a da máquina B ocorre a cada 8 dias. Se ambas receberam manutenção hoje, determine daqui a quantos dias as manutenções coincidirão novamente.

Resolução: Trata-se de um problema de periodicidade e encontro futuro. Busca-se o menor intervalo de tempo que seja múltiplo tanto de 6 quanto de 8.

Calcula-se o $\text{mmc}(6,8)$. Pela decomposição anterior, sabe-se que $\text{mmc}(6,8) = 24$. Conclui-se que as máquinas receberão manutenção juntas novamente em **24 dias**.

2. Tecnologia da Informação / Rotinas de backup - Um desenvolvedor de sistemas configura *scripts* automatizados em um servidor. O *script* de backup incremental é executado a cada 4 horas, o de verificação de integridade a cada 6 horas e o de atualização de banco de dados a cada 10 horas. Se todos os *script* foram iniciados simultaneamente às 00:00, determina-se após quantas horas eles voltarão a ser executados no mesmo instante.

Resolução: Identifica-se a necessidade de encontrar o menor intervalo de tempo que seja múltiplo comum das três frequências de execução. Calcula-se o $\text{mmc}(4,6,10)$.

Fatorando os valores:

- $4 = 2^2$
- $6 = 2 \cdot 3$
- $10 = 2 \cdot 5$

O mmc é dado por $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$. Conclui-se que os processos coincidirão novamente após **60 horas** (ou 2 dias e meio).

3. Astronomia / Fenômenos Periódicos - Dois cometas periódicos orbitam o Sol e são visíveis da Terra em intervalos regulares. O cometa A possui um período orbital de 45 anos, enquanto o cometa B retorna a cada 75 anos. Sabendo-se que o último periélio simultâneo (momento de maior proximidade com o Sol) de ambos ocorreu em 1950, calcule em que ano o fenômeno se repetirá.

Resolução: Busca-se o próximo ano em que os ciclos orbitais se sincronizam. Calcula-se o $\text{mmc}(45, 75)$.

Decomposição em fatores primos:

- $45 = 3^2 \cdot 5$
- $75 = 3 \cdot 5^2$

$\text{mmc}(45, 75) = 3^2 \cdot 5^2 = 9 \cdot 25 = 225$.

O fenômeno ocorre a cada 225 anos. Somando-se ao ano base: $1950 + 225 = 2175$. Prevê-se a próxima ocorrência simultânea para o ano de **2175**.

4. Ciências da Saúde / Farmacologia - Um paciente internado necessita receber três medicamentos distintos. O medicamento X deve ser administrado a cada 6 horas, o medicamento Y a cada 8 horas e o medicamento Z a cada 12 horas. A primeira dose dos três foi aplicada simultaneamente às 7h da manhã. Determina-se o horário da próxima aplicação simultânea.

Resolução: É necessário encontrar o menor intervalo de tempo para o reencontro dos horários da administração dos medicamentos. Calcula-se então o $\text{mmc}(6, 8, 12)$.

Observa-se que 12 é múltiplo de 6, então o mmc será o mesmo que $\text{mmc}(8, 12)$.

$$\text{mmc}(6, 8, 12) = 24 \text{ horas}.$$

Conclui-se que a coincidência ocorrerá 24 horas depois, ou seja, às **7h da manhã do dia seguinte**.

5. Mobilidade Urbana / Semáforos - Em um cruzamento complexo, três semáforos operam em ciclos independentes de tempos verdes. O semáforo 1 inicia um novo ciclo verde a cada 40 segundos, o semáforo 2 a cada 60 segundos e o semáforo 3 a cada 90 segundos. Supondo que todos abriram juntos em um instante inicial $t = 0$, calcula-se quanto tempo levará para que abram juntos novamente.

Resolução: O problema exige a sincronização de ciclos temporais. Calcula-se o $\text{mmc}(40, 60, 90)$.

Decomposição:

- $40 = 2^3 \cdot 5$
- $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
- $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

$\text{mmc} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 360$.

Os semáforos sincronizarão novamente após **360 segundos** (ou 6 minutos).

6. Logística e Periodicidade - João recebe periodicamente a visita de três amigos que trabalham em outras localidades. O amigo A o visita a cada 10 dias, o amigo B a cada 18 dias e o amigo C a cada 30 dias. Sabendo que, por ocasião das festas de fim de ano, os três coincidiram a visita em 30 de dezembro, determina-se a data exata do próximo encontro simultâneo dos três amigos. (Considere o ano seguinte como não bissexto).

Resolução: O problema consiste em determinar o menor intervalo de tempo que seja múltiplo comum dos três períodos de visita. Calcula-se o $\text{mmc}(10, 18, 30)$.

Decomposição em fatores primos:

- $10 = 2 \cdot 5$
- $18 = 2 \cdot 3^2$
- $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

$$\text{mmc} = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 2 \cdot 9 \cdot 5 = 90 \text{ dias.}$$

Conclui-se que o encontro ocorrerá 90 dias após 30 de dezembro. Para determinar a data, faz-se a contagem dos dias pelo calendário:

- Dezembro (restante): 1 dia (31 de dez). Restam 89 dias.
- Janeiro: 31 dias. Restam $89 - 31 = 58$ dias.
- Fevereiro: 28 dias. Restam $58 - 28 = 30$ dias.
- Março: Utilizam-se os 30 dias restantes.

Portanto, a próxima visita conjunta ocorrerá no dia **30 de março**.

Exercício 6.3.2

1. Engenharia de Manutenção / Ciclos Preditivos - Em uma planta industrial, um sensor de vibração é inspecionado a cada 20 dias, um sensor de temperatura a cada 25 dias e um sensor de pressão a cada 30 dias. Se todos foram inspecionados hoje, daqui a quantos dias ocorrerá a próxima inspeção simultânea dos três tipos de sensores?

2. Agronomia / Irrigação Automatizada - Um sistema de pivô central irriga três setores de uma lavoura com ciclos diferentes: o setor A é irrigado a cada 12 horas, o setor B a cada 15 horas e o setor C a cada 18 horas. Se os três setores iniciaram a irrigação simultaneamente às 6h da manhã de uma segunda-feira, em que dia e horário eles iniciarão a irrigação juntos novamente?

3. Engenharia Mecânica / Engrenagens - Duas engrenagens, uma com 48 dentes e outra com 60 dentes, estão acopladas. Um dente de cada engrenagem é marcado com tinta. Após o início do movimento, quantas voltas a engrenagem menor deverá dar até que os dentes marcados se encontrem novamente pela primeira vez?

4. Logística / Abastecimento de Frota - Três caminhões de uma transportadora fazem rotas distintas. O caminhão A retorna à base para reabastecer a cada 4 dias, o caminhão B a cada 6 dias e o caminhão C a cada 9 dias. Se os três saíram da base hoje, após quantos dias eles se encontrarão novamente na base para reabastecer?

5. Astronomia / Conjunção Planetária - Três planetas de um sistema estelar fictício têm períodos orbitais de 8, 12 e 15 anos terrestres. Se eles se alinharam com sua estrela no ano de 2024, qual será o próximo ano em que ocorrerá um novo alinhamento simultâneo?

6. Engenharia Biomédica / Sinais Fisiológicos - Em um experimento, três sinais biológicos são medidos e seus picos ocorrem com as seguintes periodicidades: o sinal cardíaco a cada 0,8 segundos, o respiratório a cada 3 segundos e uma onda cerebral a cada 1,2 segundos. Se os três picos coincidiram em um determinado instante, após quantos segundos eles coincidirão novamente?

7. Engenharia de Produção / Linha de Montagem - Em uma linha de montagem, um robô A realiza uma tarefa a cada 50 segundos, um robô B a cada 75 segundos e um robô C a cada 90 segundos. Se os três iniciaram suas tarefas simultaneamente, após quantos minutos eles iniciarão uma nova tarefa juntos?

8. Zootecnia / Programas de Vacinação - Em um rebanho, a vacina contra a febre aftosa é aplicada a cada 6 meses, a vacina contra a raiva a cada 12 meses e um vermífugo é administrado a cada 4 meses. Se todos os tratamentos foram aplicados em janeiro de 2025, em que mês e ano eles serão aplicados simultaneamente outra vez?

9. Engenharia de Telecomunicações / Sincronismo de Sinais - Três sinais digitais são transmitidos em pacotes com durações de 15 ms, 20 ms e 25 ms, respectivamente. Se a transmissão dos três sinais começou no mesmo instante, após quanto tempo, em milissegundos, o início de um novo pacote de cada um dos três sinais coincidirá novamente?

10. Física / Ondulatória - Três fontes sonoras emitem pulsos em intervalos regulares de 1/2 segundo, 3/4 de segundo e 5/6 de segundo. Se elas emitiram um pulso simultaneamente, após quantos segundos os pulsos coincidirão novamente?

6.4 Fatorial e Princípio Fundamental da Contagem

A resolução de problemas em engenharia e ciências frequentemente exige a quantificação de possibilidades de arranjo de sistemas ou a expansão de funções em séries de potências. Para tais fins, define-se a operação fatorial.

Antes de formalizar o fatorial, apresenta-se o princípio lógico que o fundamenta.

6.4.1 Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

O Princípio Fundamental da Contagem – PFC, ou Princípio Multiplicativo, é a base para a análise combinatória e para o cálculo de probabilidades em sistemas discretos.

Definição 6.4.1: Princípio Fundamental da Contagem

Se um evento E pode ser decomposto em duas etapas independentes e sucessivas, onde:

- A 1ª etapa pode ocorrer de m maneiras distintas;
- A 2ª etapa pode ocorrer de n maneiras distintas;

Então, o número total de maneiras de o evento E ocorrer é dado pelo produto $m \cdot n$.

Exercício resolvido 6.4.1

1. Um engenheiro de redes precisa configurar um caminho de dados entre um servidor A e um cliente C, passando necessariamente por um roteador intermediário B. Sabe-se que existem 3 rotas de fibra óptica de A para B e 4 rotas de micro-ondas de B para C. De quantas formas distintas pode-se configurar a transmissão de A até C?

Resolução:

- Etapa 1 ($A \to B$): 3 possibilidades.
- Etapa 2 ($B \to C$): 4 possibilidades.

Pelo PFC, o total de configurações é:

$$\boxed{T = 3 \cdot 4 = 12 \text{ rotas distintas.}}$$

2. (UFSC) Dispõe-se de cimento, 3 tipos de areia e 4 tipos de brita. Determine a quantidade de tipos diferentes de concreto que poderiam ser feitos, aparecendo os três materiais na sua formação.

Resolução:

Pelo PFC, consideram-se as etapas como eventos independentes e sucessivos. Multiplicam-se as possibilidades de cada etapa:

$$T = (\text{rotas } A \to B) \cdot (\text{rotas } B \to C)$$

$$\boxed{T = 3 \cdot 4 = 12 \text{ tipos de concreto}}$$

Conclui-se que existem 12 configurações distintas para a transmissão de dados.

3. (UFSC) Os presentes a uma determinada reunião, ao final da mesma, cumprimentaram-se mutuamente com apertos de mão. Os cumprimentos foram em número de 66. Determinar o número de pessoas presentes à reunião.

Resolução:

Seja n o número de pessoas presentes. Cada pessoa cumprimenta todas as outras $(n-1)$ pessoas. Pelo PFC, ter-se-ia inicialmente $n \cdot (n-1)$ apertos de mão.

No entanto, deve-se observar que o cumprimento entre a pessoa A e a pessoa B é o mesmo que entre B e A. Portanto, o produto $n(n-1)$ conta cada aperto de mão duas vezes. Para corrigir essa duplicidade, divide-se o total por 2:

$$\frac{n(n-1)}{2} = 66$$

Resolvendo a equação resultante:

$$n(n-1) = 132$$

$$n^2 - n - 132 = 0$$

Calculando-se as raízes da equação quadrática:

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-132) = 1 + 528 = 529$$

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{529}}{2} = \frac{1 \pm 23}{2}$$

Daí, obtêm-se dois valores:

$$n_1 = \frac{24}{2} = 12 \quad \text{e} \quad n_2 = \frac{-22}{2} = -11$$

Como o número de pessoas deve ser positivo, descarta-se a raiz negativa. Conclui-se que havia **12 pessoas** na reunião.

6.4.2 Fatorial

O conceito de fatorial surge naturalmente ao aplicarmos o PFC para o ordenamento de uma sequência de n elementos distintos (permutação).

Definição 6.4.2: Fatorial

Seja n um número natural ($n \in \mathbb{N}$). Define-se o fatorial de n, denotado por $n!$, como o produto de todos os números naturais consecutivos de n até 1.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, \quad \text{para } n \geq 1.$$

Propriedades

1. **Definição por convenção:** Para garantir a consistência das fórmulas de análise combinatória e séries de potências, define-se:
$$0! = 1$$

2. **Propriedade Recursiva:** Um fatorial pode ser escrito em função do fatorial de seu antecessor, permitindo simplificações algébricas:
$$n! = n \cdot (n-1)!$$

Comentário do autor

Por que estudar isso em Engenharia? Embora pareça um conceito puramente estatístico, o fatorial é onipresente no Cálculo e na Física. Ele aparece nos denominadores das **Séries de Taylor**, que são usadas para aproximar funções complexas (como $\text{sen}(x)$ ou e^x) em softwares de engenharia. Além disso, é a base da **Mecânica Estatística** para descrever o comportamento de partículas em Termodinâmica.

Exemplo: Simplifique a expressão $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$.

Solução:

Utiliza-se a propriedade recursiva para expandir o termo maior $(n+1)$ até encontrar o termo menor $(n-1)$:

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n \cdot (n-1)!$$

Substituindo na fração:

$$\frac{(n+1) \cdot n \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}}$$

Cancelam-se os termos iguais e a aplicando a propriedade distributiva da multiplicação, tem-se:

$$(n+1) \cdot n = n^2 + n$$

Observação

O crescimento da função fatorial é extremamente rápido, superando funções exponenciais para valores grandes de n.

- $5! = 120$
- $10! = 3.628.800$

Em computação, isso exige cuidado com o tipo de variável utilizada para armazenamento (overflow).

Exercício 6.4

1. Genética Vegetal / Melhoramento Genético - Um pesquisador dispõe de 5 variedades de milho e 4 variedades de soja. Para testar a adaptação a um novo tipo de solo, ele precisa escolher uma variedade de milho e uma de soja. De quantas maneiras distintas essa dupla de culturas pode ser formada?

2. Engenharia de Computação / Segurança da Informação - Para acessar um sistema de irrigação automatizado, um usuário deve criar uma senha de 4 dígitos. Sabendo que os dígitos podem ser de 0 a 9, quantas senhas diferentes podem ser criadas se a repetição de dígitos for permitida?

3. Engenharia Civil / Seleção de Materiais - Uma construtora precisa escolher o acabamento para um novo empreendimento. Há 6 tipos de piso, 4 tipos de tinta para as paredes e 3 tipos de esquadrias para as janelas. Quantas combinações diferentes de acabamento são possíveis para uma unidade habitacional?

4. Logística / Roteirização - Para transportar insumos do armazém A para a fábrica C, um caminhão deve passar obrigatoriamente pelo centro de distribuição B. Existem 4 rotas possíveis de A para B e 5 rotas de B para C. Qual o número total de trajetos distintos que o caminhão pode fazer?

5. Zootecnia / Identificação de Animais - Para identificar o gado de um rebanho, um criador utiliza um sistema de brincos com uma sequência de 3 letras (de um alfabeto de 26) seguidas por 2 dígitos (de 0 a 9). Quantos animais podem ser identificados de forma única por esse sistema, considerando que letras e dígitos podem ser repetidos?

6. Engenharia Elétrica / Circuitos Digitais - Um circuito lógico possui 8 chaves de entrada, onde cada chave pode estar em duas posições: ligada (1) ou desligada (0). Quantos estados diferentes de entrada esse circuito pode ter?

7. Administração / Formação de Comitês - Em uma cooperativa agrícola com 15 membros, precisa-se formar um comitê gestor composto por um presidente e um vice-presidente. De quantas maneiras distintas esses dois cargos podem ser preenchidos?

8. Agronomia / Rotação de Culturas - Um agricultor planeja a rotação de culturas para os próximos 3 anos em um mesmo talhão. Ele dispõe de 4 opções de cultura (soja, milho, algodão, feijão) e não deseja repetir a cultura em anos consecutivos. De quantas maneiras ele pode planejar essa rotação?

9. Química / Síntese de Peptídeos - Um peptídeo simples é formado pela sequência de três aminoácidos distintos. Se um laboratório dispõe de 5 tipos diferentes de aminoácidos, quantas sequências de tripeptídeos podem ser sintetizadas?

10. Engenharia de Software / Teste de Interfaces - Um aplicativo para gestão agrícola permite que o usuário configure sua tela inicial escolhendo 1 de 3 widgets de clima, 1 de 4 widgets de cotação de commodities e 1 de 5 widgets de notícias do setor. Quantas configurações de tela inicial diferentes são possíveis?

11. Agronomia / Delineamento Experimental - Um agrônomo precisa testar 6 diferentes dosagens de um novo fertilizante em 6 parcelas de terra idênticas, lado a lado. Para evitar qualquer viés de posição, ele decide aleatorizar a aplicação. De quantas maneiras distintas as 6 dosagens podem ser distribuídas entre as 6 parcelas?

12. Cálculo Numérico / Séries de Taylor - A função exponencial e^x, fundamental em modelos de crescimento (populacional, financeiro), pode ser aproximada pela série de Taylor:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Para uma aproximação de 5ª ordem, qual é o denominador do termo que contém x^5?

13. Engenharia de Produção / Controle de Qualidade - A probabilidade de encontrar exatamente k itens defeituosos em uma amostra de n itens, em certos modelos estatísticos, é dada pela distribuição Binomial, cuja fórmula envolve o coeficiente $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Se um inspetor retira uma amostra de 10 peças, de quantas maneiras ele pode encontrar exatamente 2 peças defeituosas?

14. Termodinâmica / Mecânica Estatística - O número de microestados (arranjos microscópicos) de um sistema simples com N partículas distinguíveis distribuídas em N posições distintas em uma rede cristalina é dado por $N!$. Calcule o número de microestados para um sistema simplificado com 7 partículas.

15. Bioinformática / Sequenciamento Genético - Um pequeno fragmento de RNA mensageiro (mRNA) é composto por 5 códons distintos. Para analisar a estabilidade da molécula, um pesquisador precisa testar todas as ordens possíveis desses 5 códons. Quantos arranjos diferentes ele precisará analisar?

6.5 Lógica de Conjuntos e Diagramas de Venn-Euler

Em muitas situações práticas da engenharia e das ciências agrárias, os dados não são mutuamente exclusivos. Um sensor pode falhar por múltiplos motivos, uma amostra de solo pode ter deficiência de mais de um nutriente, e uma população de pragas pode apresentar resistência a diferentes inseticidas. A ferramenta visual e analítica para modelar e quantificar essas sobreposições é o Diagrama de Venn-Euler.

Seu domínio permite traduzir problemas descritos em linguagem corrente para um modelo estruturado, onde a lógica de conjuntos (união, interseção, complemento) resolve ambiguidades e permite a contagem precisa de elementos.

Definição 6.5.1: Diagrama de Venn-Euler

Um **Diagrama de Venn-Euler** é uma representação gráfica que utiliza círculos (ou outras formas fechadas) sobrepostos para ilustrar as relações lógicas entre diferentes conjuntos. Cada círculo representa um conjunto, e a sobreposição entre eles representa a **interseção**, ou seja, os elementos que pertencem a ambos os conjuntos simultaneamente. O diagrama é tipicamente desenhado dentro de um retângulo maior, que representa o **conjunto universo** (U), contendo todos os elementos em consideração.

O poder analítico dos diagramas vem do **Princípio da Inclusão-Exclusão**, que formaliza a contagem de elementos na união de conjuntos.

Propriedade: Princípio da Inclusão-Exclusão

Sejam A e B conjuntos finitos. O número de elementos na união de A e B é dado por:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Para três conjuntos A, B e C, a fórmula se expande para:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$$

Observação

A fórmula corrige a dupla contagem. Ao somar $|A|$ e $|B|$, os elementos da interseção ($|A \cap B|$) são contados duas vezes. Portanto, subtrai-se a interseção uma vez para obter o resultado correto. A lógica é análoga para três ou mais conjuntos.

Exercício resolvido 6.5

1. Agronomia / Análise de Defensivos - Em uma pesquisa com 100 agricultores sobre o uso de defensivos em lavouras de soja, obteve-se os seguintes dados:

- 65 utilizam Fungicidas (F).
- 55 utilizam Inseticidas (I).
- 30 utilizam ambos.

Determine:

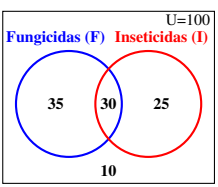
a) quantos agricultores utilizam pelo menos um dos defensivos;

b) quantos utilizam apenas Fungicidas;

c) quantos não utilizam nenhum dos dois.

Resolução:

Modelagem: O problema envolve dois conjuntos sobrepostos (F e I) dentro de um universo de 100 agricultores. A chave é preencher o diagrama de dentro para fora, começando pela interseção.



Cálculo:

- **Interseção:** A região onde os círculos se sobrepõem contém os agricultores que usam ambos: $|F \cap I| = 30$.
- **Apenas Fungicidas:** O total que usa F é 65. Como 30 deles também usam I, o número que usa *apenas* F é $65 - 30 = 35$.
- **Apenas Inseticidas:** Similarmente, o número que usa *apenas* I é $55 - 30 = 25$.

Respostas:

a) **Pelo menos um:** É a união dos conjuntos. Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão:

$$|F \cup I| = |F| + |I| - |F \cap I| = 65 + 55 - 30 = 90 \text{ agricultores.}$$

Alternativamente, somando as regiões do diagrama: $35 + 30 + 25 = 90$.

b) **Apenas Fungicidas:** Conforme calculado, são **35 agricultores**.

c) **Nenhum dos dois:** É o total do universo menos aqueles que usam pelo menos um:

$$100 - |F \cup I| = 100 - 90 = \textbf{10 agricultores.}$$

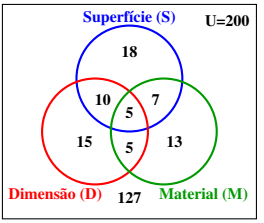
2. Engenharia de Produção / Controle de Qualidade - Uma inspeção em 200 peças metálicas classificou-as quanto a três tipos de defeitos: de Superfície (S), de Dimensão (D) e de Material (M). O relatório apontou:

- 40 peças tinham defeito S.
- 35 peças tinham defeito D.
- 30 peças tinham defeito M.
- 15 tinham defeitos S e D.
- 12 tinham defeitos S e M.
- 10 tinham defeitos D e M.
- 5 tinham os três defeitos (S, D e M).

Quantas peças não apresentaram nenhum dos três defeitos?

Resolução:

Modelagem: Este é um problema clássico de 3 conjuntos. A estratégia é preencher o diagrama de Venn a partir da interseção central.



Cálculo:

(a) **Interseção Tripla:** $|S \cap D \cap M| = 5$.

(b) **Interseções Duplas (apenas):**

- Apenas S e D: $|S \cap D| - |S \cap D \cap M| = 15 - 5 = 10$.
- Apenas S e M: $|S \cap M| - |S \cap D \cap M| = 12 - 5 = 7$.
- Apenas D e M: $|D \cap M| - |S \cap D \cap M| = 10 - 5 = 5$.

(c) **Apenas um Defeito:**

- Apenas S: $40 - (10 + 5 + 7) = 18$.
- Apenas D: $35 - (10 + 5 + 5) = 15$.
- Apenas M: $30 - (7 + 5 + 5) = 13$.

(d) **Total com Defeitos (União):** Soma de todas as 7 regiões internas:

$$18 + 15 + 13 + 10 + 7 + 5 + 5 = 73 \text{ peças.}$$

(Ou usando Inclusão-Exclusão: $40 + 35 + 30 - (15 + 12 + 10) + 5 = 73$).

(e) **Peças sem Defeitos:** Total do universo menos as peças com defeito:

$$200 - 73 = 127.$$

Resposta: 127 peças não apresentaram nenhum dos três defeitos.

Exercício 6.5

1. Zootecnia / Sanidade Animal - Em um rebanho de 300 caprinos, um veterinário constatou que 120 animais estavam com verminose, 80 com ectoparasitas e 40 com ambos os problemas. Quantos animais do rebanho não apresentavam nenhum desses problemas de saúde?

2. Engenharia de Materiais / Teste de Corrosão - Uma amostra de 150 ligas metálicas foi submetida a testes de resistência à corrosão em três ambientes: salino (S), ácido (A) e alcalino (L). Sabe-se que 10

ligas falharam em todos os três testes. Se 25 falharam em S e A, 20 em S e L, e 30 em A e L, quantas ligas falharam em exatamente dois ambientes?

3. Ciência da Computação / Análise de Logs - Um analista de segurança investigou 500 tentativas de acesso a um servidor. Ele descobriu que 200 acessos usaram senhas fracas, 150 vieram de IPs não autorizados e 70 usaram senhas fracas e vieram de IPs não autorizados. Quantas tentativas de acesso não se enquadram em nenhuma dessas duas categorias de risco?

4. Engenharia Ambiental / Monitoramento de Poluentes - Uma agência ambiental analisou 80 amostras de água de um rio, buscando por três poluentes: Chumbo (Pb), Mercúrio (Hg) e Arsênio (As). Os resultados foram: 30 continham Pb, 35 continham Hg, 40 continham As, 15 continham Pb e Hg, 12 continham Pb e As, 18 continham Hg e As, e 7 continham todos os três. Quantas amostras continham apenas um dos poluentes?

5. Logística / Gestão de Frota - Uma transportadora com 120 caminhões possui veículos com três características: Refrigeração (R), Rastreamento GPS (G) e Transmissão Automática (T). Sabe-se que: 50 têm R, 60 têm G, 45 têm T, 20 têm R e G, 15 têm R e T, 25 têm G e T, e 10 têm as três características. Quantos caminhões não possuem nenhuma dessas três tecnologias?

6. Engenharia de Alimentos / Preferência do Consumidor - Em uma pesquisa de mercado com 250 consumidores sobre novos sabores de iogurte, 110 gostaram do sabor Morango, 90 do sabor Pêssego e 80 do sabor Coco. Além disso, 40 gostaram de Morango e Pêssego, 30 de Morango e Coco, 20 de Pêssego e Coco, e 10 gostaram dos três. Quantos consumidores não gostaram de nenhum dos três sabores?

7. Engenharia Mecânica / Análise de Falhas - Uma análise de 60 motores que falharam em campo revelou que as falhas se deviam a problemas de Lubrificação (L), Superaquecimento (S) ou Vibração (V). Todas as 60 falhas se enquadravam em pelo menos uma dessas categorias. Sabendo que 32 falharam por L, 35 por S, 8 por L e S, 12 por L e V, e 7 por S e V, determine o número de motores que falharam apenas por problemas de Vibração.

8. Agronegócio / Certificação de Propriedades - De 180 fazendas de uma região, 95 possuem certificação ambiental, 70 possuem certificação de boas práticas agrícolas e 45 não possuem nenhuma das duas certificações. Quantas fazendas possuem ambas as certificações?

9. Engenharia de Software / Teste de Funcionalidades - Durante o teste de um aplicativo agrícola, 100 usuários testaram três novas funcionalidades: Mapeamento de Pragas (M), Previsão do Tempo (T) e Controle de Estoque (E). Sabe-se que 48 reportaram problemas em M, 45 em T, 52 em E, 20 em M e T, 23 em M e E, 25 em T e E, e 10 em todas as três. Quantos usuários não reportaram problema algum?

10. Biotecnologia / Análise de Genes - Em um estudo genômico, de um total de 500 genes analisados, 210 foram associados à resistência à seca, 250 à resistência a pragas e 180 à alta produtividade. Sabe-se que 80 genes têm as duas primeiras características, 70 as duas últimas, 90 a primeira e a última, e 50 genes possuem as três características. Quantos dos genes analisados não estão associados a nenhuma dessas três características?

6.6 Análise Dimensional e Estimativa

Na transição para as ciências exatas e engenharias, a matemática deixa de operar apenas com números abstratos e passa a descrever grandezas físicas. A Análise Dimensional é uma ferramenta poderosa que permite verificar a consistência de equações, converter unidades e até mesmo deduzir fórmulas físicas desconhecidas sem resolver equações diferenciais complexas.

Seu estudo é importante, uma vez que, por vezes, engenheiros precisam validar se um resultado faz sentido físico antes de confiar na calculadora. Saber estimar se uma força é 10^3 N ou 10^6 N sem fazer contas exatas é uma habilidade vital.

Antes de manipular dimensões com rigor, é fundamental desenvolver a intuição sobre a magnitude dessas grandezas.

6.6.1 Estimativa de ordem de grandeza (Problemas de Fermi)

Em situações reais de engenharia, frequentemente não se dispõe de dados precisos no início de um projeto. Nesses casos, busca-se uma estimativa de **ordem de grandeza**, ou seja, a potência de 10 mais próxima que representa a quantidade analisada. Essa técnica é conhecida como "Problemas de Fermi", em homenagem ao físico Enrico Fermi, famoso por sua habilidade em fazer aproximações rápidas e precisas.

O objetivo não é encontrar o valor exato, mas sim determinar se o resultado está na escala de unidades, milhares ou milhões.

Definição 6.6.1: Ordem de Grandeza

Seja N um número escrito em notação científica na forma $N = m \cdot 10^k$, onde $1 \leq m < 10$. A ordem de grandeza de N é definida como:

- 10^k, se $m < \sqrt{10}$ (aprox. 3,16);
- 10^{k+1}, se $m \geq \sqrt{10}$.

Exercício resolvido 6.6.1

1. Estimativa de Volume - Estime a ordem de grandeza do número de gotas de água necessárias para encher uma piscina olímpica.

Resolução:

- *Premissas:* Uma piscina olímpica tem dimensões aprox. $50 \times 25 \times 2$ metros. O volume de uma gota é aprox. $0,05$ mL.
- *Cálculo do Volume da Piscina (V_p):*

$$V_p \approx 50 \cdot 25 \cdot 2 = 2500 \text{ m}^3 = 2,5 \cdot 10^3 \text{ m}^3$$

Convertendo para mililitros (1 $m^3 = 10^6$ mL):

$$V_p \approx 2,5 \cdot 10^9 \text{ mL}$$

- *Cálculo do Número de Gotas (N):*

$$N = \frac{V_p}{V_{gota}} \approx \frac{2,5 \cdot 10^9}{5 \cdot 10^{-2}} = 0,5 \cdot 10^{11} = 5 \cdot 10^{10}$$

- *Ordem de Grandeza:* Como $5 > 3,16$, a ordem de grandeza é $10^{10+1} = 10^{11}$.

Conclui-se que são necessárias cerca de cem bilhões de gotas, $100 \cdot 10^9$.

6.6.2 Dimensões físicas e homogeneidade

Em Física e Engenharia, diferencia-se *dimensão* de *unidade*. A dimensão refere-se à natureza qualitativa de uma grandeza (ex: Comprimento, Tempo, Massa), enquanto a unidade é a escala padronizada usada para medi-la (ex: metro, segundo, quilograma).

Adota-se a notação de colchetes $[G]$ para representar a dimensão da grandeza G. No Sistema Internacional (SI), as dimensões fundamentais para a Mecânica são:

- **Massa:** $[M]$
- **Comprimento:** $[L]$
- **Tempo:** $[T]$

Qualquer outra grandeza mecânica pode ser expressa como uma combinação de potências dessas dimensões fundamentais, no que se chama *Princípio da Homogeneidade*:

$$[G] = M^{\alpha} \cdot L^{\beta} \cdot T^{\gamma}$$

Definição 6.6.2: Princípio da Homogeneidade Dimensional

Uma equação física só é válida se for dimensionalmente homogênea. Isso significa que todos os termos aditivos de uma equação devem possuir a mesma dimensão física. Não se pode somar “metros” com “segundos”.

Esse princípio é uma ferramenta poderosa para:

1. Verificar a consistência de fórmulas derivadas.
2. Deduzir a forma de equações físicas desconhecidas (Análise Dimensional).

Exercício resolvido 6.6.2

1. Verificação de Fórmula - Um estudante deduziu que o período P de um pêndulo simples depende do comprimento do fio L e da aceleração da gravidade g, chegando à fórmula $P = 2\pi\sqrt{\frac{g}{L}}$. Verifique se a equação é dimensionalmente consistente.

Resolução: Analisa-se a dimensão de cada lado da equação:

- Lado esquerdo (Período): $[P] = T$.
- Lado direito: $[2\pi]$ é adimensional (número puro).
- Dimensão de g (aceleração): $[g] = \frac{[L]}{[T]^2} = L \cdot T^{-2}$.
- Dimensão de L: $[L] = L$.

Substituindo na expressão proposta pelo estudante:

$$\left[\sqrt{\frac{g}{L}}\right] = \left(\frac{L \cdot T^{-2}}{L}\right)^{1/2} = (T^{-2})^{1/2} = T^{-1} = \frac{1}{T}$$

Compara-se os lados:

$$[P] = T \quad \neq \quad \left[\sqrt{\frac{g}{L}}\right] = T^{-1}$$

Conclui-se que a fórmula está **incorreta**. A análise sugere que a razão deveria ser invertida para $\frac{L}{g}$.

2. Dedução de Fórmula na Engenharia Civil - Suponha que a velocidade de propagação v de uma onda em uma corda tensionada dependa apenas da tensão τ (força) aplicada na corda e da densidade linear μ (massa por unidade de comprimento) da corda. Determine a forma da equação para v.

Resolução:

Assume-se uma relação do tipo $v = k \cdot \tau^a \cdot \mu^b$, onde k é uma constante adimensional. Escrevem-se as dimensões de cada grandeza:

- Velocidade $[v] = L \cdot T^{-1}$
- Força $[\tau] = \text{Massa} \cdot \text{Aceleração} = M \cdot (L \cdot T^{-2})$
- Densidade linear $[\mu] = \dfrac{\text{Massa}}{\text{Comprimento}} = M \cdot L^{-1}$

Aplicando-se o Princípio da Homogeneidade:

$$[v] = [\tau]^a \cdot [\mu]^b$$

$$L \cdot T^{-1} = (M \cdot L \cdot T^{-2})^a \cdot (M \cdot L^{-1})^b$$

$$L^1 \cdot T^{-1} = M^{a+b} \cdot L^{a-b} \cdot T^{-2a}$$

Igualam-se os expoentes das bases correspondentes:

- Para T: $-1 = -2a \implies a = 1/2$
- Para M: $0 = a + b \implies b = -a \implies b = -1/2$
- Para L: $1 = a - b$ (verificação: $1/2 - (-1/2) = 1$, consistente).

Substituem-se os expoentes na equação original:

$$v = k \cdot \tau^{1/2} \cdot \mu^{-1/2} = k\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

Conclui-se que a velocidade é proporcional à raiz quadrada da tensão dividida pela densidade linear.

Observação

A Análise Dimensional determina a relação entre as variáveis, mas não é capaz de determinar o valor das constantes numéricas adimensionais (como o 2π no pêndulo ou o k na corda). Esses valores devem ser obtidos por experimentação ou por dedução teórica baseada em leis fundamentais.

Exercício 6.6

1. Agronomia / Armazenamento de Grãos - Estime a ordem de grandeza do número de grãos de milho que podem ser armazenados em um silo cilíndrico com 10 metros de diâmetro e 20 metros de altura.

2. Engenharia Ambiental / Emissões Veiculares - Estime a ordem de grandeza da massa de dióxido de carbono (CO_2), em quilogramas, emitida em um único dia por todos os carros de uma metrópole com uma frota de aproximadamente 3 milhões de veículos.

3. Zootecnia / Consumo Hídrico - Estime a ordem de grandeza do volume de água, em litros, consumido por todo o rebanho bovino brasileiro (aproximadamente 200 milhões de cabeças) durante um ano.

4. Engenharia Civil / Orçamento de Materiais - Estime a ordem de grandeza do número de tijolos baianos (dimensões aproximadas de 9x19x19 cm) necessários para construir as paredes de um edifício residencial de 10 andares, com 4 apartamentos por andar.

5. Engenharia de Alimentos / Produção de Embalagens - Estime a ordem de grandeza do número de latas de alumínio de 350 mL necessárias para envasar toda a produção anual de refrigerantes de uma grande fábrica que produz cerca de 5 milhões de litros por mês.

6. Hidráulica / Equação de Torricelli - A velocidade de escoamento (v) de um fluido por um orifício em um grande reservatório é dada pela Lei de Torricelli, $v = \sqrt{2gh}$, onde g é a aceleração da gravidade e h é a altura da coluna de fluido acima do orifício. Verifique se esta equação é dimensionalmente consistente.

7. Engenharia Mecânica / Frequência de Vibração - A frequência fundamental (f) de vibração de uma corda esticada depende de seu comprimento (L), da força de tensão (τ) e de sua densidade linear de massa (μ). Utilizando análise dimensional, determine a relação de proporcionalidade entre essas grandezas, assumindo a forma $f = k \cdot L^a \cdot \tau^b \cdot \mu^c$, onde k é uma constante adimensional.

8. Engenharia Agrícola / Hidrologia - A Equação de Manning para a velocidade (v) de escoamento em um canal aberto é $v = \frac{1}{n} R_h^{2/3} S^{1/2}$, onde R_h é o raio hidráulico (dimensão de comprimento, [L]) e S é a declividade do canal (adimensional). Determine a dimensão do coeficiente de rugosidade de Manning, n.

9. Termodinâmica / Lei dos Gases Ideais - A equação de estado dos gases ideais é $PV = nRT$, onde P é a pressão, V é o volume, n é o número de mols, e T é a temperatura. Se a dimensão da pressão é $[P] = ML^{-1}T^{-2}$, qual é a dimensão da constante universal dos gases, R? (Considere a dimensão de quantidade de matéria como [N] e a de temperatura como [Θ]).

10. Engenharia Estrutural / Carga Crítica de Flambagem - A carga crítica de flambagem (P_{cr}) para uma coluna biapoiada, segundo Euler, depende do módulo de elasticidade do material (E), do momento de inércia da seção transversal (I) e do comprimento da coluna (L). Sabendo que $[E] = ML^{-1}T^{-2}$ e $[I] = L^4$, utilize a análise dimensional para encontrar os expoentes a, b, c na relação $P_{cr} = k \cdot E^a \cdot I^b \cdot L^c$.

6.7 Propagação de Incertezas

Na matemática pura, os números são exatos: π é exatamente π, e 2 é exatamente 2. No entanto, nas ciências experimentais e na engenharia, nenhuma medida é perfeitamente exata. Todo valor medido carrega consigo uma dúvida intrínseca, denominada **incerteza** (ou erro experimental).

Quando realizam-se operações matemáticas com valores que possuem incertezas (por exemplo, calcular a área de um retângulo medindo seus lados com uma régua), essa dúvida propaga-se para o resultado final. O estudo da propagação de incertezas permite quantificar a confiabilidade desse resultado.

É fundamental compreender que o resultado de uma medição não é apenas um número, mas um intervalo de confiança. Um erro muito comum entre estudantes iniciantes é calcular a incerteza corretamente, mas expressar o resultado final de forma incoerente. Por exemplo, escrever um resultado como $12,456 \pm 0,1$ é fisicamente incorreto, pois não faz sentido apresentar casas decimais de precisão (milésimos) que são muito menores que a própria dúvida da medida (décimos).

Para evitar tais erros, deve-se primeiramente dominar o conceito de algarismos significativos.

Algarismos significativos e Arredondamento científico

Em qualquer processo de medição, o valor obtido nunca é exato, estando sempre limitado pela precisão do instrumento utilizado. Define-se, portanto, o conceito de algarismos significativos para expressar corretamente essa precisão.

Definição 6.7.1: Algarismos significativos

Os algarismos significativos de uma medida são compostos por todos os dígitos conhecidos com exatidão (lidos diretamente na escala do instrumento), acrescidos de um único dígito final estimado (o dígito duvidoso).

Para compreender essa definição, considere a medição do comprimento de uma barra utilizando duas réguas distintas:

- **Régua A (graduada em cm):** A barra termina entre as marcas de 12 cm e 13 cm.
  - Dígitos exatos: 1 (dezena) e 2 (unidade). Sabe-se com certeza que o valor é "12 vírgula alguma coisa".
  - Dígito duvidoso: O operador estima visualmente a fração restante. Suponha-se que pareça estar na metade. Estima-se 5 mm.
  - Leitura: $12,5$ cm. (3 algarismos significativos: 1, 2 e 5). O "5" é incerto, mas significativo.
- **Régua B (graduada em mm):** A barra termina entre as marcas de 12,5 cm e 12,6 cm.
  - Dígitos exatos: 1, 2 e 5. O instrumento garante que é maior que 12,5.
  - Dígito duvidoso: O operador estima a fração entre os milímetros. Suponha-se $12,56$ cm.
  - Leitura: $12,56$ cm. (4 algarismos significativos). Agora o "5" é exato e o "6" é o duvidoso.

Definição 6.7.2: Regras para identificação

1. **Dígitos não nulos:** São sempre significativos. (Ex.: $45,6$ tem 3 significativos).
2. **Zeros entre não nulos:** São sempre significativos. (Ex.: $405,6$ tem 4 significativos).
3. **Zeros à esquerda:** Nunca são significativos; servem apenas para posicionar a vírgula. (Ex.: $0,0045$ tem apenas 2 significativos).
4. **Zeros à direita:** Se houver vírgula decimal, são significativos. (Ex.: $45,00$ tem 4 significativos, indicando maior precisão que 45).

Propriedade: Regra de Ouro da Incerteza

A incerteza experimental deve ser sempre arredondada para **um único algarismo significativo** (salvo exceções específicas de alta precisão). O valor principal da medida deve então ser arredondado para ter a mesma casa decimal da incerteza.

Exercício resolvido 6.7

1. Um estudante calculou a densidade de um material e obteve o valor $2,34567$ g/cm^3 e uma incerteza de $0,0421$ g/cm^3. Como expressar o resultado corretamente?

Resolução:

- Analisa-se a incerteza: $0,0421$. O primeiro algarismo significativo é o 4 (na casa dos centésimos).
- Arredonda-se a incerteza para 1 algarismo significativo: $\delta = 0,04$.
- O valor principal $2,34567$ deve ser arredondado até a mesma casa decimal da incerteza (centésimos).
- Como o dígito seguinte ao 4 é 5, arredonda-se para cima: $2,35$.
- **Resultado Final:** $(2,35 \pm 0,04)$ g/cm^3.

Observação

Em operações de multiplicação e divisão, o resultado final deve ter o mesmo número de algarismos significativos do componente com **menor** número de algarismos significativos.

Exercício 6.7

1. Metrologia / Algarismos Significativos - Determine o número de algarismos significativos em cada uma das seguintes medições experimentais:

   a) Uma massa de 1,020 kg medida em uma balança analítica.

   b) Um volume de 0,050 mL medido com uma micropipeta.

   c) Uma distância de 300 m medida com uma estação total de topografia.

2. Física Experimental / Expressão de Resultados - Um estudante realizou um experimento para medir a aceleração da gravidade (g) e obteve o valor calculado de $g = 9,81745$ m/s^2. A análise da propagação de incertezas resultou em uma incerteza de $\delta g = 0,0238$ m/s^2. Expresse o resultado final da medição de forma correta, seguindo as regras de arredondamento.

3. Engenharia de Materiais / Medição de Densidade - A densidade de uma liga metálica foi calculada como sendo $\rho = 8945,7$ kg/m^3, com uma incerteza associada de $\delta\rho = 52,1$ kg/m^3. Apresente o valor da densidade e sua incerteza de acordo com as convenções científicas.

4. Agronomia / Cálculo de Área - Um agrônomo mediu um talhão retangular para o plantio, obtendo os comprimentos de $25,4$ m e $12,5$ m. Calcule a área do talhão e expresse o resultado com o número correto de algarismos significativos.

5. Química Analítica / Preparo de Soluções - Para preparar uma solução, um químico pesou uma massa de

$4,500$ g de um reagente e a dissolveu em um volume de $0,250$ L de solvente. Calcule a concentração da solução em g/L, respeitando as regras de algarismos significativos para a divisão.

6. Engenharia Civil / Teste de Carga - Em um teste de carga, uma viga de concreto suportou uma força máxima de 15000 N. Um engenheiro colega reportou o mesmo valor como $1,50 \times 10^4$ N. Explique a diferença de informação transmitida entre as duas notações em termos de precisão e algarismos significativos.

7. Zootecnia / Ganho de Peso Diário - O ganho de peso médio diário (GPD) de um lote de animais foi calculado dividindo-se o ganho de peso total, $112,8$ kg, pelo número de dias, 30. O resultado na calculadora é $3,76$ kg/dia. Supondo que o número de dias é um valor exato, como o resultado do GPD deve ser expresso corretamente?

8. Engenharia de Alimentos / Análise de Umidade - A análise de umidade de uma amostra de grãos resultou em um valor de $13,582\%$. A incerteza do método foi calculada como sendo $0,215\%$. Apresente o resultado final da análise de umidade de forma cientificamente correta.

6.8 Sistemas Lineares e Matrizes

Na modelagem de problemas em Engenharia e Ciências, frequentemente lida-se com múltiplas variáveis que se relacionam de forma linear. A organização desses dados em estruturas matriciais e a resolução dos sistemas de equações resultantes são ferramentas essenciais para a interpretação de fenômenos complexos, desde o balanceamento de reações químicas até o dimensionamento de estruturas.

6.8.1 Estruturação de dados e Operações matriciais

Para manipular grandes volumes de dados, utiliza-se a notação matricial. Considere, por exemplo, o cenário agrícola do estado do Maranhão, um grande produtor de grãos da região MATOPIBA.

As tabelas a seguir apresentam a produção fictícia (em milhares de toneladas) das principais commodities em três mesorregiões maranhenses durante dois anos consecutivos.

Ano 1

Mesorregião	**Soja**	**Milho**	**Arroz**
Sul Maranhense	3200	1500	200
Leste Maranhense	800	400	150
Centro Maranhense	600	300	500

Ano 2

Mesorregião	**Soja**	**Milho**	**Arroz**
Sul Maranhense	3500	1800	180
Leste Maranhense	950	450	160
Centro Maranhense	650	320	550

Define-se a matriz A como a produção do Ano 1 e a matriz B como a produção do Ano 2. A operação de **adição de matrizes** ($S = A + B$) permite obter, de forma direta, a produção total acumulada no biênio por região e por cultura.

$$S = \begin{bmatrix} 3200 & 1500 & 200 \\ 800 & 400 & 150 \\ 600 & 300 & 500 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3500 & 1800 & 180 \\ 950 & 450 & 160 \\ 650 & 320 & 550 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6700 & 3300 & 380 \\ 1750 & 850 & 310 \\ 1250 & 620 & 1050 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de Matrizes na Engenharia

Uma aplicação crítica em projetos de engenharia é o cálculo de demanda de recursos. Suponha-se que, para cada tonelada de grão produzido, seja necessária uma quantidade específica de fertilizantes (Nitrogênio - N, Fósforo - P, Potássio - K).

Seja a matriz C a produção planejada (em milhares de toneladas) para uma safra futura no Sul Maranhense:

$$C = \begin{bmatrix} \text{Soja} & \text{Milho} & \text{Arroz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4000 & 2000 & 300 \end{bmatrix}$$

E seja a matriz F a necessidade de insumos (em kg por tonelada de grão):

$$F = \begin{bmatrix} 80 & 40 & 40 \\ 20 & 60 & 30 \\ 10 & 30 & 20 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{Soja} \\ \leftarrow \text{Milho} \\ \leftarrow \text{Arroz} \end{matrix}$$

Valores ilustrativos.

O total de fertilizantes necessários é obtido pelo produto matricial $R = C \cdot F$:

$$R = \begin{bmatrix} 4000 & 2000 & 300 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 80 & 40 & 40 \\ 20 & 60 & 30 \\ 10 & 30 & 20 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} (4000 \cdot 80 + 2000 \cdot 20 + 300 \cdot 10) & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

O resultado fornecerá um vetor com a demanda total de N, P e K para o planejamento logístico da safra.

6.8.2 Conjunto solução de sistemas lineares

Ao modelar problemas físicos, frequentemente recai-se em sistemas de equações lineares na forma $Ax = b$. A análise da existência e quantidade de soluções é fundamental para a interpretação física do problema.

Sejam $S_1, S_2, \dots, S_m$ os conjuntos solução de cada equação do sistema. O conjunto solução do sistema S é a interseção de todas as soluções individuais:

$$S = S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_m$$

Classificam-se os sistemas lineares quanto ao seu conjunto solução S:

a) **Sistema Possível e Determinado (SPD):** S é unitário. Existe uma única solução.

b) **Sistema Possível e Indeterminado (SPI):** S é infinito. Existem infinitas soluções que satisfazem as equações.

c) **Sistema Impossível (SI):** $S = \varnothing$. Não existe conjunto de valores que satisfaça todas as equações simultaneamente (o sistema é inconsistente).

Comentário do autor

A Importância do SPI para a Engenharia: Muitos alunos acreditam que encontrar um "Sistema Indeterminado" (infinitas soluções) é um problema. Na verdade, para um engenheiro, isso é frequentemente uma **oportunidade**.
Se um sistema de produção admite infinitas combinações de insumos para atingir uma meta (SPI), isso significa que temos liberdade de escolha. Dentre essas infinitas opções, qual é a mais barata? Qual é a mais rápida? Qual gera menos impacto ambiental?
Essa busca pela "melhor"solução dentro de um conjunto infinito é o que define a área de **Otimização**, que será estudada na próxima seção.

Exercício resolvido 6.8

1. Planejamento de safra - Um produtor rural do Sul do Maranhão dispõe de 1.200 hectares para o plantio de soja e milho. O custo de plantio da soja é de R$ 3.000,00 por hectare, e o do milho é de R$ 2.000,00 por hectare. O orçamento total disponível para o plantio é de R$ 3.100.000,00. Determine a área que deve ser destinada a cada cultura para utilizar integralmente a terra e o orçamento.

Resolução: Sejam x a área de soja e y a área de milho (em hectares). Monta-se o sistema linear:

$$\begin{cases} x + y = 1200 & \text{(Restrição de área)} \\ 3000x + 2000y = 3100000 & \text{(Restrição orçamentária)} \end{cases}$$

Simplifica-se a segunda equação dividindo por 1000:

$$\begin{cases} x + y = 1200 \implies y = 1200 - x \\ 3x + 2y = 3100 \end{cases}$$

Substitui-se a primeira na segunda:

$$3x + 2(1200 - x) = 3100$$

$$3x + 2400 - 2x = 3100$$

$$x = 700$$

Logo, $y = 1200 - 700 = 500$.

Conclui-se que devem ser plantados **700 hectares de soja** e **500 hectares de milho**. Este é um exemplo de Sistema Possível e Determinado (SPD).

2. (ENEM) Algumas pesquisas estão sendo desenvolvidas para se obter arroz e feijão com maiores teores de ferro e zinco e tolerantes à seca. Em média, para cada 100 g de arroz cozido, o teor de ferro é de 1,5 mg e o de zinco é de 2,0 mg. Para 100 g de feijão, é de 7 mg o teor de ferro e de 3 mg o de zinco. Sabe-se que as necessidades diárias dos dois micronutrientes para uma pessoa adulta é de aproximadamente 12,25 mg de ferro e 10 mg de zinco.

Disponível em: <http://www.embrapa.br>.
Acesso em: 29 abr. 2010 (adaptado).

Considere que uma pessoa adulta deseja satisfazer suas necessidades diárias de ferro e zinco ingerindo apenas arroz e feijão. Suponha que seu organismo absorva completamente todos os micronutrientes oriundos desses alimentos.

Na situação descrita, que quantidade a pessoa deveria comer diariamente de arroz e feijão, respectivamente?

(A) 58 g e 456 g
a) (B) 200 g e 200 g
b) (C) 350 g e 100 g
c) (D) 375 g e 500 g
d) (E) 400 g e 89 g

Resolução:

Sejam A a quantidade de arroz (em centenas de gramas) e F a quantidade de feijão (em centenas de gramas).

Monta-se o sistema linear com base nas quantidades de nutrientes por 100g:

- Ferro: $1,5A + 7F = 12,25$
- Zinco: $2,0A + 3F = 10$

Isola-se A na segunda equação (equação do zinco):

$$2A = 10 - 3F \implies A = 5 - 1,5F$$

Substitui-se A na primeira equação (equação do ferro):

$$1,5(5 - 1,5F) + 7F = 12,25$$

$$7,5 - 2,25F + 7F = 12,25$$

$$4,75F = 12,25 - 7,5$$

$$4,75F = 4,75 \implies F = 1$$

Logo, deve-se consumir 1 unidade de 100g de feijão. Substituindo para encontrar A:

$$A = 5 - 1,5(1) = 3,5$$

Portanto, são necessárias 3,5 unidades de 100g de arroz (350 g) e 1 unidade de 100g de feijão (100 g).

Alternativa correta: (C)

3. Problema do Agrimensor - Um agrimensor mediu três terrenos, concluindo que a área dos três juntos é 60 hectares, a área intermediária tem 45 hectares a menos que o dobro da área maior, e a diferença entre a área maior e a menor tem 5 hectares a mais que o dobro da área intermediária. Essas conclusões foram apresentadas em um documento para um inventário. Ao ler esse documento, o juiz, que sabia Matemática, exigiu novas medições dos terrenos, mostrando de forma irrefutável que havia erro nas informações documentadas.

Mostre que há erro nessas informações.

Resolução:

Sejam as variáveis:

- x: área maior
- y: área intermediária
- z: área menor

Traduzem-se as informações do texto para um sistema linear:

(a) "a área dos três juntos é 60": $x + y + z = 60$

(b) "a área intermediária tem 45 a menos que o dobro da maior": $y = 2x - 45$

(c) "diferença entre a maior e a menor tem 5 a mais que o dobro da intermediária": $x - z = 2y + 5$

Organiza-se o sistema substituindo (II) e isolando z em (III): De (III): $z = x - 2y - 5$.

Substitui-se y (da eq. II) nesta expressão de z:

$$\begin{aligned} z &= x - 2(2x - 45) - 5 \\ z &= x - 4x + 90 - 5 \\ z &= -3x + 85 \end{aligned}$$

Agora, substitui-se y e z na equação (I) para verificar a consistência:

$$\begin{aligned} x + (2x - 45) + (-3x + 85) &= 60 \\ (x + 2x - 3x) + (-45 + 85) &= 60 \\ 0x + 40 &= 60 \\ 40 &= 60 \quad \text{(Absurdo!)} \end{aligned}$$

A igualdade $40 = 60$ é uma contradição matemática. Isso prova que o sistema é **impossível**, ou seja, não existem valores de área que satisfaçam simultaneamente as três condições medidas pelo agrimensor. O juiz estava correto!

Exercício 6.8

1. Química / Estequiometria - O balanceamento da reação de combustão do propano (C_3H_8) é fundamental em projetos de motores e queimadores. A reação não balanceada é:

$$x \cdot C_3H_8 + y \cdot O_2 \rightarrow z \cdot CO_2 + w \cdot H_2O$$

   Para que a reação esteja balanceada, o número de átomos de Carbono (C), Hidrogênio (H) e Oxigênio (O) deve ser igual em ambos os lados. Monte o sistema de equações lineares para as variáveis (x, y, z, w) e encontre a menor solução inteira para os coeficientes.

2. Engenharia Elétrica / Análise de Circuitos - No circuito elétrico abaixo, as correntes I_1, I_2, I_3 (em Ampères) podem ser determinadas aplicando-se as Leis de Kirchhoff. Isso resulta no seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 & \text{(Lei dos Nós)} \\ 2I_1 + 4I_2 = 10 & \text{(Lei das Malhas 1)} \\ 4I_2 - 6I_3 = -8 & \text{(Lei das Malhas 2)} \end{cases}$$

   Determine os valores das três correntes.

3. Agronomia / Formulação de Fertilizantes (Otimização) - Um engenheiro agrônomo precisa criar uma mistura de fertilizante NPK (Nitrogênio-Fósforo-Potássio) utilizando três fontes disponíveis: Ureia (45% N), Superfosfato Simples (18% P) e Cloreto de Potássio (60% K). O objetivo é obter uma mistura final com 20% de N e 10% de P. Seja x a proporção de Ureia, y a de Superfosfato e z a de Cloreto de Potássio na mistura ($x + y + z = 1$).

   a) Monte o sistema de equações para as proporções de N e P.

   b) Mostre que o sistema é Possível e Indeterminado (SPI) e encontre a relação entre y e z.

   c) Se o Cloreto de Potássio é o insumo mais caro, qual a solução que minimiza seu uso (menor z)?

4. Engenharia de Tráfego / Modelagem de Fluxo - Em um cruzamento, sensores medem o fluxo de veículos por hora (vph). O princípio da conservação de fluxo estabelece que o número de veículos que entram em um nó deve ser igual ao que sai. Para o cruzamento abaixo, um dos sensores falhou e reportou um valor inconsistente.

$$\begin{cases} x_1 + 400 = x_2 + 500 & \text{(Nó A)} \\ x_2 + 300 = x_3 + 350 & \text{(Nó B)} \\ x_3 + 600 = x_1 + 400 & \text{(Nó C)} \end{cases}$$

Mostre que o sistema é Impossível (SI), provando que os dados dos sensores são inconsistentes.

5. Geologia / Composição de Rochas - Um geólogo analisa uma amostra de rocha composta por três minerais: Quartzo, Feldspato e Biotita. Ele sabe a composição percentual de Silício (Si) e Alumínio (Al) em cada mineral:

   - Quartzo: 46% Si, 0% Al
   - Feldspato: 30% Si, 10% Al
   - Biotita: 18% Si, 8% Al

   A análise da amostra total revela 32,6% de Si e 6,4% de Al. Sejam x, y, z as proporções de Quartzo, Feldspato e Biotita na amostra. Monte e resolva o sistema linear para encontrar a composição da rocha.

6. Engenharia de Controle / Robótica - A posição de um ponto (x, y) no plano, representada pelo vetor $P = [x, y]^T$, pode ser rotacionada em um ângulo θ através da multiplicação pela matriz de rotação R. Para $\theta = 90°$, a matriz é:
$$R_{90} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
   Se um braço robótico está na posição $P_{final} = [3, 5]^T$ após sofrer uma rotação de 90°. Qual era sua posição inicial $P_{inicial} = [x_0, y_0]^T$? (Dica: Resolva o sistema $R_{90} \cdot P_{inicial} = P_{final}$).

7. Economia Agrícola / Modelo Insumo-Produto - A economia de uma região depende de dois setores: Agronegócio (A) e Indústria (I). Para produzir R$ 1,00 de Agronegócio, são consumidos R$ 0,20 de seu próprio setor e R$ 0,30 da Indústria. Para produzir R$ 1,00 de Indústria, consomem-se R$ 0,40 do Agronegócio e R$ 0,10 de seu próprio setor. Se a demanda externa é de R$ 500 milhões para o Agronegócio e R$ 300 milhões para a Indústria, qual deve ser a produção total (x_A e x_I) de cada setor para atender tanto à demanda interna quanto à externa?

8. Engenharia de Alimentos / Balanceamento de Dieta - Para criar uma ração animal, um zootecnista precisa misturar três ingredientes (milho, soja e farelo de trigo) para atender a requisitos nutricionais mínimos de 18% de proteína e 6% de fibra. As composições são:

   - Milho: 9% proteína, 2% fibra
   - Soja: 44% proteína, 5% fibra
   - Farelo de Trigo: 17% proteína, 12% fibra

   Sejam x, y, z as proporções de milho, soja e farelo. Encontre uma solução possível para a mistura.

9. Metrologia / Calibração de Sensores - Um sensor de temperatura fornece uma saída em Volts (V) que se relaciona com a temperatura (T) em Graus Celsius por uma função quadrática: $V(T) = aT^2 + bT + c$. Durante a calibração, foram obtidos os seguintes pontos: (0°C, 0.5V), (50°C, 1.8V) e (100°C, 2.5V). Monte o sistema linear para os coeficientes a, b, c e determine a equação de calibração do sensor.

10. Genética de Populações / Equilíbrio de Hardy-Weinberg - Em uma população em equilíbrio, as frequências dos genótipos AA, Aa e aa são dadas por p^2, $2pq$ e q^2, respectivamente, onde $p+q=1$. Em uma amostra de 1000 indivíduos, observou-se que 640 tinham o genótipo aa. Determine o número de indivíduos com genótipo AA e Aa na amostra.

6.9 Otimização

Introdução e objetivos

Diferentemente dos sistemas lineares onde busca-se uma solução, na otimização busca-se a melhor solução dentre várias possíveis, **maximizando** ou **minimizando** uma *função-objetivo* (custo, lucro, área, volume, rendimento, etc.) sujeita a **restrições** (materiais, orçamentárias, geométricas, tecnológicas, etc.). A base da otimização é o cálculo diferencial, que será estudado em breve, aqui, em Pré-Cálculo, ver-se-á que é possível resolver muitos problemas de otimização apenas com processos **algébricos e geométricos** já conhecidos:

- Funções quadráticas: identificar o **vértice** por completar quadrados ou usar $x_v = -\frac{b}{2a}$.
- Desigualdades clássicas: Desigualdade entre a Média Aritmética e a Média Geométrica (**AM-GM**) para obter cotas mínimas sob soma constante.
- **Proporcionalidade** e **escalonamento** para ajustar variáveis mantendo relações físicas.
- **Otimização linear** (duas variáveis): método **gráfico** sobre a região viável poligonal.

Definição 6.9.1: Definições essenciais

- **Função-objetivo**: expressão a ser otimizada (max/min), ex.: $C(x)$, $A(x)$, $V(x)$, $L(x,y)$.
- **Domínio viável**: conjunto de valores que satisfazem as **restrições** do problema — conjunto de todas as escolhas permitidas (igualdades/inequações).
- **Ótimo**: ponto viável onde a função-objetivo atinge o menor ou maior valor possível (global, neste contexto).

Heurística prática para problemas de otimização

1) Interpretar e listar variáveis e restrições (unidades e coerência dimensional).
2) Reduzir a função-objetivo a uma ou duas variáveis *(eliminar variáveis via restrições)*.
3) Escolher a técnica: quadrática (vértice), AM–GM, proporcionalidade, ou gráfico (2 variáveis lineares).
4) Encontrar candidato(s) a ótimo (vértice; igualdade em AM–GM; vértices da região viável).
5) Verificar viabilidade e comparar valores da função-objetivo.
6) Validar plausibilidade física e sensibilidade a parâmetros.

Métodos sem derivadas

- **Quadrática canônica**: $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$.
  Se $a > 0$: mínimo no vértice; se $a < 0$: máximo no vértice.
- **AM-GM**: para $x, y > 0$ com $x + y = S$, vale $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2} \Rightarrow xy \le \left(\frac{S}{2}\right)^2$.
  Igualdade quando $x = y$ (simetria sugere solução balanceada).
- **Proporcionalidade**: reescrever a função usando relações diretas/inversas entre grandezas físicas; muitas vezes reduz a dimensão do problema.
- **Otimização linear (2D)**: maximizar/minimizar $L(x, y) = \alpha x + \beta y$ em uma **região poligonal** definida por inequações lineares. O ótimo ocorre em um **vértice** da região viável.

Exercício resolvido 6.9

1 Máximo de área com perímetro fixo (retângulo) - Deseja-se construir um canteiro retangular com **perímetro** fixo $P = 40\,\text{m}$. Qual é o retângulo de **maior área** A?

Resolução:

(a) *Variáveis e restrições*: lados $x, y > 0$, perímetro $2(x + y) = 40 \Rightarrow x + y = 20$.

(b) *Redução*: $A(x) = xy = x(20 - x) = -x^2 + 20x$.

(c) *Técnica*: quadrática côncava ($a = -1 < 0$) $\Rightarrow$ máximo no **vértice**.

(d) *Candidato(s)*: $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2(-1)} = 10$; então $y = 20 - 10 = 10$.

(e) *Comparação/Viabilidade*: $x, y > 0$ ok; área nos extremos ($x \to 0^+$) tende a 0.

(f) *Validação*: solução simétrica (quadrado) é típica de máximo sob soma fixa.

Cálculo (forma canônica).

$$A(x) = -(x - 10)^2 + 100 \;\Rightarrow\; A_{\max} = 100 \text{ em } x = 10,\ y = 10.$$

Resposta. O retângulo de maior área é o **quadrado** de lados 10 m, com área $100\,\text{m}^2$.

2. Mistura de rações: custo mínimo com exigência de proteína - Na formulação de uma dieta simples, deseja-se obter 100 kg de ração com pelo menos 18 % de proteína bruta (PB). Dispõe-se de dois insumos: A (PB = 12 %, custo $R\$2.00/kg$ e B (PB = 24 %, custo $R\$3.10/kg$. Quais quantidades x (kg de A) e y (kg de B) minimizam o custo total, atendendo à proteína mínima?

Resolução:

(a) *Variáveis e restrições*
- Massa total: $x + y = 100$, com $x, y \ge 0$.
- Proteína: $0.12x + 0.24y \ge 0.18 \cdot 100 = 18$ (em kg de PB).

(b) *Redução a 1 variável*
- De $x+y=100 \Rightarrow y=100-x$.
- Restrição de PB: $0.12x+0.24(100-x) \geq 18 \Rightarrow -0.12x+24 \geq 18 \Rightarrow x \leq 50$.

(c) *Função-objetivo*
- Custo $C(x)=2.00x+3.10y=2.00x+3.10(100-x)=310-1.10x$.

(d) *Técnica*
- Otimização linear em intervalo: $x \in [0,50]$ (da restrição de PB).
- Como o coeficiente é $-1.10<0$, $C(x)$ **decresce** com x.

(e) *Candidato(s) e comparação*
- Mínimo ocorre no **maior** x viável: $x^*=50$.
- Então $y^*=50$.

(f) *Validação*
- PB: $0.12(50)+0.24(50)=6+12=18$ kg (atinge o mínimo exigido).
- Não negatividade e massa total respeitadas.

Procedimento algorítmico (passo a passo):

(a) Identifique Y e X_i: minimizar $C(x)=2.00x+3.10y$ sujeito a $x+y=100$, $0.12x+0.24y \geq 18$, $x,y \geq 0$.

(b) Uniformize unidades: custos em R$/kg, PB em kg (via frações mássicas).

(c) Classifique relações: C linear em x; restrição de PB impõe $x \leq 50$.

(d) Escreva a redução: $y=100-x \Rightarrow C(x)=310-1.10x$, domínio viável $x \in [0,50]$.

(e) Isole e calcule: mínimo de função linear decrescente no extremo direito, $x^*=50$, $y^*=50$.

(f) Valide: PB mínima atendida; viabilidade geométrica; sensibilidade —- se PB mínima subir, aumenta y.

Cálculo numérico.

$$C_{\min}=310-1.10\times 50=310-55=\text{R\$ } 255.00.$$

Resposta:
Mistura ótima: $x^*=50\,\text{kg}$ (A) e $y^*=50\,\text{kg}$ (B). Custo mínimo **R$ 255,00** e PB total de $18\,\text{kg}$ ($18\,\%$).

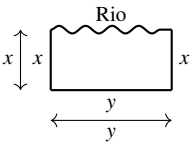
3. Dimensionamento de área - Um fazendeiro deseja cercar um pasto retangular ao longo de um rio, utilizando 200 metros de tela para os outros três lados. Determine as dimensões do pasto que maximizam a área cercada.

Recurso	**Quantidade**
Tela disponível	200 m
Lados a cercar	3 (dois laterais e um fundo)

Resolução:

Considere x = comprimento de cada lado perpendicular ao rio e y = comprimento do lado paralelo ao rio.

A quantidade de tela utilizada é:



$$2x + y = 200 \quad \Rightarrow \quad y = 200 - 2x$$

A área do pasto é:

$$A = x \cdot y = x(200 - 2x) = 200x - 2x^2$$

Trata-se de uma função quadrática com $a = -2 < 0$, portanto possui um máximo no vértice:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{200}{2 \cdot (-2)} = \frac{200}{4} = 50$$

Então:

$$y = 200 - 2 \cdot 50 = 100$$

A área máxima é:

$$A_{\text{máx}} = 50 \cdot 100 = 5000 \text{ m}^2$$

Portanto, as dimensões que maximizam a área são $x = 50$ m e $y = 100$ m.

4. Um pequeno produtor rural deseja cercar uma área retangular para controle de animais em seu terreno. Dispondo de 240 metros de arame, como ele deve usar o material de modo a maximizar a área cercada.

Resolução:

Roteiro (Esquema prático):

(a) *Variáveis e restrições*:
- Lados do retângulo $x, y > 0$.
- Há n **pernas de arame** contornando todo o perímetro.
- Arame total disponível: $L = 240\,\text{m}$.
- Relação geométrica: perímetro $P = 2(x + y)$.
- Restrição de material: $n \cdot P = L \Rightarrow n \cdot 2(x + y) = 240$.

(b) *Redução*:
- Soma fixa dos lados: $x + y = \dfrac{120}{n}$.
- Área: $A(x) = xy = x\left(\dfrac{120}{n} - x\right) = -x^2 + \dfrac{120}{n}x$.

(c) *Técnica de otimização*:
- Quadrática côncava em x ($a = -1 < 0$) $\Rightarrow$ máximo no **vértice**;

- Alternativamente, AM-GM: sob soma fixa, o produto é máximo quando $x = y$.

(d) *Candidato ao ótimo*:
- Pelo vértice: $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{\frac{120}{n}}{2(-1)} = \dfrac{60}{n}$; logo $y = \dfrac{60}{n}$.

(e) *Cálculo da área máxima*:
- $A_{\max} = x_v y_v = \left(\dfrac{60}{n}\right)^2 = \dfrac{3600}{n^2}$ (m^2).

(f) *Validação*:
- Usa todo o arame: $2(x+y) = 2 \cdot \dfrac{120}{n} = \dfrac{240}{n}$ e $n \cdot P = 240$ (ok).
- Simetria: $x = y$ é esperado para máximo com soma fixa.

Dimensões e áreas para valores práticos de n:

- $n = 4$: $x = y = \dfrac{60}{4} = 15\,\text{m} \Rightarrow A_{\max} = \dfrac{3600}{16} = 225\,\text{m}^2$.
- $n = 5$: $x = y = \dfrac{60}{5} = 12\,\text{m} \Rightarrow A_{\max} = \dfrac{3600}{25} = 144\,\text{m}^2$.
- $n = 6$: $x = y = \dfrac{60}{6} = 10\,\text{m} \Rightarrow A_{\max} = \dfrac{3600}{36} = 100\,\text{m}^2$.

Conclusão: Para $L = 240\,\text{m}$ de arame distribuído em *n pernas* ao redor do retângulo, a maior área ocorre para um **quadrado** de lado $x = y = \dfrac{60}{n}$ e área $A_{\max} = \dfrac{3600}{n^2}$. Em termos práticos de manejo, n faz sentido tipicamente para $n \in \{4,5,6\}$, cujas áreas máximas são, respectivamente, $225\,\text{m}^2$, $144\,\text{m}^2$ e $100\,\text{m}^2$.

5. Administração / Logística: distribuição de cargas com custo mínimo - Uma distribuidora deve enviar mercadorias a dois mercados (M_1, M_2), atendendo demandas de 10 e 8 unidades, respectivamente. Há dois centros (C_1, C_2) com disponibilidades de 9 e 9 unidades. O custo unitário (em R$) por trajeto é:

Custo unitário	$\mathbf{M_1}$	$\mathbf{M_2}$
$\mathbf{C_1}$	4	1
$\mathbf{C_2}$	3	2

Sejam x ($C_1 \to M_1$), t ($C_1 \to M_2$), y ($C_2 \to M_1$), z ($C_2 \to M_2$). Encontre x, t, y, z que minimizam o custo total.

Resolução:

Roteiro (Esquema prático):

(a) Variáveis e restrições: balanço por oferta/demanda com 2×2 rotas

(b) Redução: expressar todas as variáveis em função de 1 parâmetro

(c) Técnica: custo linear $\to$ comparar extremos do intervalo viável

(d) Candidato(s): extremos do parâmetro respeitando não negatividade

(e) Comparação: avaliar custo nos extremos e escolher o menor

(f) Validação: checagem de balanço e não negatividade

Procedimento algorítmico (passo a passo):

(a) Sistema de balanceamento:

$$\begin{cases} x+t=9 & (\mathrm{C}_1) \\ y+z=9 & (\mathrm{C}_2) \\ x+y=10 & (\mathrm{M}_1) \\ t+z=8 & (\mathrm{M}_2) \end{cases}$$

(b) Parametrize por t: $x=9-t, \quad y=1+t, \quad z=8-t$.

(c) Viabilidade: $x,y,z \geq 0 \Rightarrow t \in [0,8]$.

(d) Custo: $C=4x+1t+3y+2z \Rightarrow C=55-2t$.

(e) Ótimo: minimizar $C \rightarrow$ tomar $t=8$.

(f) Valores: $t=8,\ x=1,\ y=9,\ z=0$.

Resposta: Plano de menor custo: $(x,t,y,z)=(1,8,9,0)$. Custo mínimo: $C_{\min}=55-2\cdot 8=39$ (unidades monetárias).

6. Engenharia de Produção / Alocação de produção em 2 máquinas (custo mínimo) - Uma fábrica produz dois itens p_1 e p_2. Devem-se fabricar 100 unidades de p_1 e 80 de p_2 num turno. Há duas máquinas, M_1 e M_2, com capacidades totais utilizadas de 110 e 70 unidades por turno (somando p_1 e p_2). O custo unitário por peça produzida é:

Custo unitário	p_1	p_2
$\mathbf{M}_1$	6	3
$\mathbf{M}_2$	5	4

Sejam t ($\mathrm{M}_1 \rightarrow p_1$), x ($\mathrm{M}_1 \rightarrow p_2$), y ($\mathrm{M}_2 \rightarrow p_1$), z ($\mathrm{M}_2 \rightarrow p_2$). Minimize $C=6t+3x+5y+4z$ sujeito a:

$$\begin{cases} t+y=100 & (p_1) \\ x+z=80 & (p_2) \\ t+x=110 & (\mathrm{M}_1) \\ y+z=70 & (\mathrm{M}_2) \end{cases}$$

Resolução:

Roteiro (Esquema prático):

(a) Variáveis e restrições: demanda por produto e capacidade por máquina

(b) Redução: parametrizar por 1 variável livre

(c) Técnica: custo linear $\rightarrow$ comparar extremos viáveis

(d) Candidato(s): extremos do parâmetro mantendo $t, x, y, z \geq 0$

(e) Comparação: avaliar custo e escolher mínimo

(f) Validação: checar todas as equações e não negatividade

Procedimento algorítmico (passo a passo):

(a) Parametrize por z: $y = 70 - z,\ x = 80 - z,\ t = 30 + z$ (verificação: $t + y = 30 + z + 70 - z = 100$, ok).

(b) Viabilidade: $z \in [0, 70]$ (para $y \geq 0$; $x \geq 0 \Rightarrow z \leq 80$).

(c) Custo:

$$C = 6(30 + z) + 3(80 - z) + 5(70 - z) + 4z = 770 + 2z.$$

(d) Ótimo: minimizar $C \Rightarrow z = 0$.

(e) Valores: $z = 0,\ y = 70,\ x = 80,\ t = 30$.

Resposta: Plano ótimo: $(t, x, y, z) = (30, 80, 70, 0)$. Custo mínimo: $C_{\min} = 770$ (unidades monetárias).

7. Gestão Estratégica / Portfólio: mínimo risco para impacto-alvo - Uma organização precisa distribuir 22 "unidades de esforço" entre duas iniciativas estratégicas (I_1, I_2) para atingir impactos mínimos $I_1 = 12$, $I_2 = 10$. Há dois fundos (F_1, F_2) com disponibilidades 14 e 8. O "risco por unidade" é:

Risco unitário	$\mathbf{I}_1$	$\mathbf{I}_2$
$\mathbf{F}_1$	3	5
$\mathbf{F}_2$	4	2

Sejam a ($F_1 \rightarrow I_1$), b ($F_1 \rightarrow I_2$), c ($F_2 \rightarrow I_1$), d ($F_2 \rightarrow I_2$). Minimize $R = 3a + 5b + 4c + 2d$ sujeito a:

$$\begin{cases} a + b = 14 & (F_1) \\ c + d = 8 & (F_2) \\ a + c = 12 & (I_1) \\ b + d = 10 & (I_2) \end{cases}$$

Resolução:

Roteiro (Esquema prático):

(a) Variáveis e restrições: dois fundos $\times$ duas iniciativas (balanço)

(b) Redução: expressar em função de um parâmetro

(c) Técnica: função linear $\rightarrow$ mínimo em extremos do intervalo viável

(d) Candidato(s): extremos respeitando não negatividade

(e) Comparação: avaliar risco nos extremos

(f) Validação: checar impactos mínimos e balanço de fundos

Procedimento algorítmico (passo a passo):

(a) Parametrize por b: $a = 14 - b,\ c = b - 2,\ d = 10 - b.$

(b) Viabilidade: $a, c, d \geq 0 \Rightarrow b \in [2, 10]$.

(c) Risco:

$$R = 3(14 - b) + 5b + 4(b - 2) + 2(10 - b) = 54 + 4b.$$

(d) Ótimo: minimizar $R \Rightarrow b = 2$.

(e) Valores: $b = 2,\ a = 12,\ c = 0,\ d = 8.$

Resposta: Alocação de menor risco: $(a, b, c, d) = (12, 2, 0, 8)$. Risco mínimo: $R_{\min} = 54 + 4 \cdot 2 = 62$ (unidades de risco). Impactos atendidos: $I_1 = 12$, $I_2 = 10$.

8. Otimização Geométrica / Retângulo inscrito em Triângulo - Um arquiteto projeta uma janela retangular que será instalada sob um frontão triangular de uma fachada. A base do triângulo mede 4 m e a altura é de 3 m. Determine as dimensões da janela que permitem a máxima entrada de luz (máxima área).

Resolução:

Roteiro (Esquema prático):

(a) *Variáveis*: Base x e altura y da janela (retângulo).

(b) *Restrição geométrica*: O retângulo está inscrito no triângulo. Usa-se **semelhança de triângulos** para relacionar x e y.

(c) *Redução*: Expressar y em função de x.

(d) *Otimização*: Maximizar a função área $A(x)$.

Modelagem: Considere o triângulo maior de base $B = 4$ e altura $H = 3$. Ao inscrever um retângulo de base x e altura y, sobra um triângulo menor no topo, de base x e altura $H - y$. Pela semelhança entre o triângulo menor (topo) e o triângulo maior:

$$\frac{\text{Base menor}}{\text{Base maior}} = \frac{\text{Altura menor}}{\text{Altura maior}} \ \Rightarrow\ \frac{x}{4} = \frac{3 - y}{3}$$

Isolando y:

$$3x = 4(3 - y)\ \Rightarrow\ 3x = 12 - 4y\ \Rightarrow\ 4y = 12 - 3x\ \Rightarrow\ y = 3 - 0{,}75x$$

Função-Objetivo (Área):

$$A(x) = x \cdot y = x(3 - 0,75x) = -0,75x^2 + 3x$$

Esta é uma função quadrática com concavidade para baixo ($a < 0$). O máximo ocorre no vértice.

Cálculo do Vértice:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2(-0,75)} = -\frac{3}{-1,5} = 2$$

Para encontrar y:

$$y = 3 - 0,75(2) = 3 - 1,5 = 1,5$$

Resposta: As dimensões ideais são **base de** 2 m e **altura de** 1.5 m.

Curiosidade

Perceba que a base ótima (2) é exatamente a metade da base do triângulo (4), e a altura ótima (1,5) é a metade da altura do triângulo (3). Esse resultado é geral para retângulos inscritos em triângulos.

9. Otimização Linear / Método Gráfico (Região Viável) - Uma marcenaria fabrica cadeiras (x) e mesas (y).

- Cada cadeira consome 2 h de carpintaria e 1 h de pintura.
- Cada mesa consome 2 h de carpintaria e 2 h de pintura.
- Disponibilidade: 12 h de carpintaria e 8 h de pintura por dia.
- Lucro: R$ 20,00 por cadeira e R$ 30,00 por mesa.

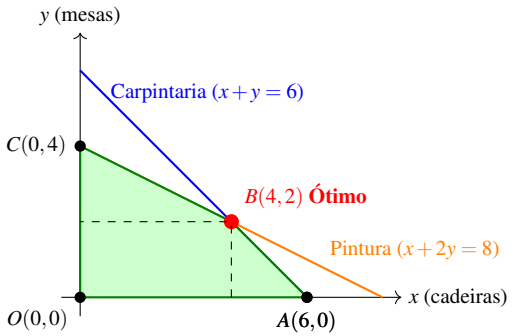
Quantas unidades de cada devem ser produzidas para maximizar o lucro L?

Resolução:

1. Modelagem: Maximizar $L(x,y) = 20x + 30y$ sujeito a:

$$\begin{cases} 2x + 2y \leq 12 & \text{(Carpintaria)} \Rightarrow x + y \leq 6 \\ 1x + 2y \leq 8 & \text{(Pintura)} \\ x \geq 0, y \geq 0 & \text{(Não-negatividade)} \end{cases}$$

2. Método Gráfico: A região viável é a interseção das áreas definidas pelas inequações. O lucro máximo ocorrerá em um dos **vértices** do polígono formado.



3. Teste dos Vértices: Calculamos o lucro $L = 20x + 30y$ em cada vértice da região poligonal (área verde):

- Vértice $O(0,0)$: $L = 20(0) + 30(0) = 0$
- Vértice $C(0,4)$: $L = 20(0) + 30(4) = 120$
- Vértice $A(6,0)$: $L = 20(6) + 30(0) = 120$
- Vértice $B(4,2)$: $L = 20(4) + 30(2) = 80 + 60 = \mathbf{140}$

Resposta: O lucro máximo é de **R$ 140,00**, obtido produzindo **4 cadeiras e 2 mesas**. Perceba que a solução ótima ocorreu exatamente na interseção das restrições (ponto onde se utilizam todos os recursos de carpintaria e pintura).

10. Otimização de custos e receitas - Uma pequena fábrica artesanal produz dois tipos de bolsas: modelo simples e modelo executivo. A produção é limitada pela disponibilidade de couro e de fechos especiais. O modelo simples consome 0,5 m^2 de couro e 1 fecho por unidade; o modelo executivo consome 0,8 m^2 de couro e 2 fechos por unidade. A fábrica dispõe semanalmente de 40 m^2 de couro e 80 fechos. Cada bolsa simples é vendida por R$ 60,00 e cada bolsa executiva por R$ 100,00. Determine quantas unidades de cada modelo devem ser produzidas semanalmente para maximizar a receita total.

Insumo	**Modelo simples**	**Modelo executivo**	**Disponibilidade**
Couro (m^2)	0,5	0,8	40
Fechos	1	2	80

Resolução:

Sejam x = número de bolsas simples e y = número de bolsas executivas produzidas por semana.

A receita total é dada por:

$$R = 60x + 100y$$

Restrições:

$$0,5x + 0,8y \leq 40 \quad \text{(couro)}$$

$$x + 2y \leq 80 \quad \text{(fechos)}$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

Multiplicando a primeira restrição por 2 para eliminar decimais:

$$x + 1,6y \leq 80$$

As restrições formam uma região viável no primeiro quadrante. Os vértices dessa região são obtidos resolvendo os sistemas:

- $x = 0$: de $x + 2y = 80 \Rightarrow y = 40 \rightarrow$ ponto $A(0,40)$
- $y = 0$: de $x + 1,6y = 80 \Rightarrow x = 80 \rightarrow$ ponto $B(80,0)$
- Interseção das retas:

$$\begin{cases} x + 1,6y = 80 \\ x + 2y = 80 \end{cases}$$

  Subtraindo a equação de baixo da de cima: $0,4y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 80$ (já obtido). Isso indica que as retas se cruzam em $x = 80, y = 0$. Precisa-se verificar o outro vértice: resolvendo $x + 1,6y = 80$ com $x = 0 \Rightarrow y = 50$, mas $x + 2y \leq 80$ dá $100 \leq 80$ (falso), então $(0,50)$ não é viável.

  Na verdade, o vértice relevante é a interseção de $x + 2y = 80$ com o eixo x: $(80,0)$, e com o eixo y: $(0,40)$, e a interseção das duas retas:

$$\begin{cases} x + 1,6y = 80 \\ x + 2y = 80 \end{cases}$$

  Subtraindo: $0,4y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 80$. Portanto, as duas retas se cruzam em $(80,0)$. Assim, a região viável é um triângulo com vértices $(0,0)$, $(80,0)$, $(0,40)$.

Testando a receita em cada vértice:

$$(0,0) : R = 0$$

$$(80,0) : R = 60 \cdot 80 + 100 \cdot 0 = 4.800$$

$$(0,40) : R = 60 \cdot 0 + 100 \cdot 40 = 4.000$$

A receita máxima ocorre em $(80,0)$, i.e., produzir apenas 80 bolsas simples.

11. Uma empresa precisa entregar 50 caixas de um produto em dois clientes: C_1 e C_2. O cliente C_1 deve receber 30 caixas e o cliente C_2 deve receber 20 caixas. A empresa possui dois depósitos: D_1 e D_2. Do depósito D_1 serão enviadas 35 caixas no total, e do depósito D_2 serão enviadas 15 caixas no total.

A tabela abaixo mostra o custo unitário de transporte (em reais) de cada depósito para cada cliente:

	C_1	C_2
D_1	4	6
D_2	5	3

Sejam:

- x = número de caixas enviadas de D_1 para C_1;
- y = número de caixas enviadas de D_1 para C_2;
- t = número de caixas enviadas de D_2 para C_1;
- z = número de caixas enviadas de D_2 para C_2.

Resolução:

1. Equações do problema

A partir das condições:

- Total enviado de D_1: $x+y=35$
- Total enviado de D_2: $t+z=15$
- Total recebido por C_1: $x+t=30$
- Total recebido por C_2: $y+z=20$

Além disso, todas as variáveis devem ser inteiras não negativas.

2. Sistema linear

Temos o sistema:

$$\begin{cases} x+y=35 \\ t+z=15 \\ x+t=30 \\ y+z=20 \end{cases}$$

Da primeira equação: $y=35-x$ Da terceira: $t=30-x$ Substituindo t na segunda: $(30-x)+z=15 \Rightarrow z=x-15$ Substituindo y e z na quarta: $(35-x)+(x-15)=20 \Rightarrow 20=20$ (identidade)

Portanto, o sistema é possível e indeterminado, com x como variável livre.

3. Restrições de não negatividade

Como $x,y,t,z \geq 0$:

$$y = 35 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 35$$

$$t = 30 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 30$$

$$z = x - 15 \geq 0 \Rightarrow x \geq 15$$

Assim, x deve satisfazer: $15 \leq x \leq 30$.

4. Função custo total

O custo total C é:

$$C = 4x + 6y + 5t + 3z$$

Substituindo y, t, z em função de x:

$$\begin{aligned} C &= 4x + 6(35 - x) + 5(30 - x) + 3(x - 15) \\ &= 4x + 210 - 6x + 150 - 5x + 3x - 45 \\ &= (4x - 6x - 5x + 3x) + (210 + 150 - 45) \\ &= -4x + 315 \end{aligned}$$

5. Minimização do custo

A função $C = -4x + 315$ é decrescente em x (coeficiente angular negativo). Portanto, para minimizar C, devemos tomar o maior x possível dentro do intervalo permitido.

O maior x é $x = 30$.

Então:

$$x = 30, \quad y = 35 - 30 = 5, \quad t = 30 - 30 = 0, \quad z = 30 - 15 = 15$$

6. Verificação

As quantidades satisfazem todas as condições:

- D_1 envia $30 + 5 = 35$ caixas
- D_2 envia $0 + 15 = 15$ caixas
- C_1 recebe $30 + 0 = 30$ caixas
- C_2 recebe $5 + 15 = 20$ caixas

Custo total mínimo:

$$C = 4 \cdot 30 + 6 \cdot 5 + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 15 = 120 + 30 + 0 + 45 = 195 \text{ reais.}$$

Resposta: Para minimizar o custo total, devem ser enviadas:

$$x = 30,\ y = 5,\ t = 0,\ z = 15.$$

Perceba que...

- Em problemas quadráticos, a forma canônica fornece o ótimo sem derivadas. Em problemas lineares com duas variáveis, o *ótimo* está em vértices da região viável.
- Em misturas/dietas, "restrição ativa" (igualdade) no ótimo é comum: cumprir o mínimo sem exceder reduz custo.
- A desigualdade AM-GM é útil para "produto máximo sob soma fixa" (ex.: área máxima com perímetro fixo; volume máximo sob soma de arestas).
- Em problemas reais, a solução ótima frequentemente ocorre nos limites dos recursos (usar todo o arame, atingir a proteína mínima exata, usar toda a capacidade da máquina).

Exercício 6.9

1. Agronomia / Fertilidade do Solo - A produtividade P de uma lavoura de milho (em sacas por hectare) em função da dose de nitrogênio N aplicada (em kg/ha) é modelada pela função quadrática: $P(N) = -0,005N^2 + 1,2N + 80$. Doses excessivas de nitrogênio podem causar toxidez e reduzir a produtividade. Determine a dose de nitrogênio que maximiza a produtividade e qual é essa produtividade máxima.

2. Engenharia Civil / Estruturas - A deflexão (flecha) para baixo y no centro de uma viga simplesmente apoiada de comprimento L, sob uma carga concentrada F no meio, pode ser aproximada, em uma situação simplificada, pela equação $y(x) = k(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$, onde x é a posição ao longo da viga. Embora o máximo exija cálculo, um engenheiro sabe que a tensão de flexão máxima T em uma seção retangular de altura h e largura b é inversamente proporcional à altura e diretamente proporcional à largura, i.e., $T = k\frac{b}{h}$. Se a área da seção transversal é fixa em 200 cm^2, quais dimensões b e h minimizam a tensão?

3. Zootecnia / Otimização de Dieta (Programação Linear) - Um nutricionista animal precisa formular uma ração com duas fontes de proteína: farelo de soja ((x)) e farinha de peixe ((y)). As restrições são:

   • Pelo menos 30 unidades de proteína: $(3x + 4y \geq 30)$.

   • No máximo 12 unidades de fibra: $(x + 2y \leq 12)$.

   O custo da mistura é dado por $(C(x,y) = 2x + 5y)$. Usando o método gráfico, determine as quantidades (x) e (y) que atendem às restrições com o menor custo possível.

4. Engenharia de Produção / Gestão de Estoques (Modelo EOQ) - O custo total anual de um item em estoque é a soma do custo de pedido e do custo de armazenamento: $C(q) = \frac{A}{q} + \frac{Bq}{2}$, onde q é a quantidade de itens por pedido. Para um determinado insumo, o custo de fazer um pedido é R$ 200,00 (resultando em $A = 200 \times D$, onde D é a demanda anual de 1000 unidades) e o custo de armazenar uma unidade por ano é R$ 10,00 ($B = 10$). A função custo é $C(q) = \frac{200000}{q} + 5q$. Usando a desigualdade AM-GM, encontre o tamanho do lote q que minimiza o custo total anual.

5. Geometria / Otimização de Embalagens - Uma indústria precisa fabricar latas cilíndricas (com tampa e fundo) para armazenar um volume fixo de 1000 cm^3 (1 litro). O objetivo é minimizar a quantidade de material utilizado, ou seja, minimizar a área de superfície total da lata. Qual deve ser a relação entre a altura (h) e o raio (r) da lata para que a área seja mínima?

6. Engenharia de Energia / Sistemas Fotovoltaicos - A potência P (em Watts) gerada por um painel solar em função da resistência de carga R (em Ohms) é dada pela equação $P(R) = \frac{25R}{(R+2)^2}$. Embora a otimização formal exija cálculo, um engenheiro experiente sabe que o máximo ocorre quando a resistência de carga é igual à resistência interna do painel ($R = 2$ Ohms). Verifique algebricamente que qualquer valor de R ligeiramente diferente de 2 (por exemplo, $R = 1.9$ e $R = 2.1$) resulta em uma potência menor que a obtida em $R = 2$.

7. Análise de Dados / Regressão Linear (Mínimos Quadrados) - Um cientista de dados quer encontrar a melhor reta na forma $y = mx$ que se ajusta aos pontos (1, 3), (2, 5) e (3, 8). O "melhor ajuste"é aquele que minimiza a soma dos quadrados dos erros (diferenças verticais), dada pela função:

$$E(m) = (3 - m \cdot 1)^2 + (5 - m \cdot 2)^2 + (8 - m \cdot 3)^2$$

   Expanda esta expressão para obter uma função quadrática em m e encontre o valor de m que minimiza o erro.

8. Logística / Otimização de Rotas - Uma empresa de entregas precisa alocar sua produção diária de 100 pacotes entre dois centros de distribuição, A e B. O custo de envio de um pacote até o cliente final a partir de cada centro depende do volume de pacotes processados x_A e x_B, devido a economias de escala e congestionamento:

   - Custo por pacote de A: $C_A(x_A) = 0.01x_A^2 - 2x_A + 150$
   - Custo por pacote de B: $C_B(x_B) = 0.02x_B^2 - 3x_B + 200$

   O custo total é $C_{total} = C_A(x_A) + C_B(x_B)$. Sabendo que $x_A + x_B = 100$, reescreva o custo total como uma função de apenas x_A e encontre a distribuição de pacotes que minimiza o custo total.

9. Arquitetura / Design de Janelas - Um arquiteto projeta uma janela Normanda (um retângulo com um semicírculo no topo) com um perímetro fixo de 8 metros. Para maximizar a entrada de luz, a área da janela deve ser máxima. Determine o raio do semicírculo que maximiza a área total da janela.

10. Engenharia Química / Reatores - A taxa de reação r de um processo autocatalítico é modelada pela função $r(x) = k \cdot x(C_0 - x)$, onde x é a concentração do produto e C_0 é a concentração inicial do reagente. Se $k = 0.1$ e $C_0 = 10$ mol/L, a equação se torna $r(x) = -0.1x^2 + x$. Qual a concentração de produto x que maximiza a taxa da reação?

Capítulo 7

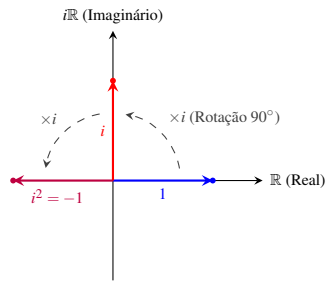
Números Complexos

7.1 Introdução

Motivação: A linguagem oculta das rotações

Frequentemente, a terminologia matemática pode se apresentar de forma enganosa. O termo "imaginário", cunhado por Descartes no século XVII, sugere algo fictício ou inexistente. No entanto, na ciência e engenharia modernas, os números complexos são tão reais quanto a eletricidade que alimenta um computador ou as ondas de rádio que conectam um *smartphone*.

Enquanto os números reais permitem medir grandezas em uma linha (unidimensional), os números complexos expandem a análise para o plano (bidimensional). Essa dimensão extra não constitui apenas um artifício algébrico; ela concede o poder de descrever *rotações* e *oscilações* com uma elegância inigualável.



Interpretação geométrica: A unidade imaginária como operador de rotação.

Sem a utilização dos números complexos, a análise de circuitos de corrente alternada (através de fasores) tornar-se-ia um processo exaustivo de equações diferenciais. No processamento de sinais, estes números fundamentam a Transformada de Fourier, permitindo a compressão de áudio e imagens. Na Mecânica Quântica, a função de onda Ψ — que descreve a probabilidade de existência de partículas — é intrinsecamente complexa.

Neste capítulo, a unidade imaginária i deixa de ser abordada apenas como a solução de $\sqrt{-1}$ para ser compreendida como um operador de rotação de 90°, uma ferramenta fundamental que descreve a dinâmica vibratória do universo.

7.2 Conjuntos dos números complexos

Definição 7.2.1: Conjunto dos números complexos

Denomina-se conjunto dos números complexos, representado por $\mathbb{C}$, o conjunto de todos os pares ordenados de números reais $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(a,b)\ a\in\mathbb{R}$ e $b\in\mathbb{R}\}$ para os quais as seguintes operações são válidas:

Igualdade
Dois pares ordenados (a,b) e (c,d) são iguais se, e somente se,

$$a=c \qquad \text{e} \qquad b=d.$$

Adição
A soma de (a,b) com (c,d) é definida por

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,\ b+d).$$

Multiplicação
O produto de (a,b) por (c,d) é dado por

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,\ ad+bc).$$

7.2.1 O número i

Sejam $m\in n$ números reais quaisquer. Pela definição do conjunto $\mathbb{C}$, tem-se que:

- $(m,0)=(n,0)$ se, e somente se, $m=n$
- $(m,0)+(n,0)=(m+n,0+0)=(m+n,0)$
- $(m,0)\cdot(n,0)=(m\cdot n-0\cdot 0,m\cdot 0+0\cdot n)=(m\cdot n,0)$

Nota-se que nos pares onde o segundo elemento é zero, tanto a igualdade quanto a adição e a multiplicação dependem só dos primeiros elementos, que são números reais. Por isso, pode-se "identificar" um número $(m,0)$ com o número real m, ou seja, $(m,0)=m$.

Observe que $(0,1)\cdot(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1,0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)$.

Como $(0,1)^2=(-1,0)$ e $(-1,0)=-1$, então $(0,1)^2=-1$, ou $(0,1)=\sqrt{-1}$.

Tal número $(0,1)$ é chamado de unidade imaginária e é representado por i. Como $i^2=-1$, então i é uma raiz quadrada de -1.

Isso permite definir que:

- $\sqrt{-1} = i$
- $\sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$
- $\sqrt{-49} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{-1} = 7i$
- a raiz da equação quadrática $x^2 + 1 = 0$ é igual a i
- qualquer equação quadrática com discriminante menor que zero apresente raízes.

7.2.2 Potências fundamentais de i

Uma das propriedades mais fascinantes e úteis da unidade imaginária é o comportamento cíclico de suas potências. Ao contrário dos números reais, onde potências crescentes tendem ao infinito (como 2^n) ou a zero (como $0,5^n$), as potências inteiras de i ficam "presas" em um ciclo perpétuo de apenas quatro valores.

Para compreender esse padrão, observe o que acontece com as primeiras potências de i utilizando a definição básica $i^2 = -1$:

- $\mathbf{i^0} = 1$ (Por definição, todo número não nulo elevado a zero é 1)
- $\mathbf{i^1} = i$ (O próprio número)
- $\mathbf{i^2} = -1$ (Pela definição de unidade imaginária)
- $\mathbf{i^3} = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$

O que acontece se esse processo continuar? Observe a quarta potência:

- $\mathbf{i^4} = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

Note que i^4 resultou em 1, o mesmo valor de i^0. Isso significa que o ciclo recomeça se i^4 for multiplicado por i e assim sucessivamente. Veja:

- $\mathbf{i^5} = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$ (O mesmo que i^1)
- $\mathbf{i^6} = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$ (O mesmo que i^2)

Conclui-se que as potências de i se repetem em um **ciclo de 4 elementos**:

$$\{1,\ i,\ -1,\ -i\}$$

Algoritmo de redução das potências de i

A natureza cíclica das potências da unidade imaginária sugere uma conexão intrínseca com a aritmética modular através do **Algoritmo da Divisão Euclidiana**. Este teorema permite demonstrar uma proposição para que o cálculo de qualquer potência i^n, por maior que seja o expoente, seja redutível a um dos quatro elementos fundamentais do conjunto $\{1, i, -1, -i\}$.

Proposição 7.2.1: Redução de potências de i

Seja $n \in \mathbb{N}$ um expoente qualquer. Se r é o resto da divisão euclidiana de n por 4, então:

$$i^n = i^r$$

Demonstração. Pelo Algoritmo da Divisão Euclidiana, para qualquer inteiro n e divisor 4, existem inteiros únicos q (quociente) e r (resto) tais que:

$$n = 4q + r, \quad \text{onde } 0 \leq r < 4$$

Por ser uma igualdade, vale também a igualdade:

$$i^n = i^{4q+r}$$

Pela propriedade de produto de potências de mesma base ($a^{m+n} = a^m \cdot a^n$), a equação pode ser reescrita como:

$$i^n = i^{4q} \cdot i^r$$

Aplicando a propriedade da potência de potência ($(a^m)^p = a^{m \cdot p}$), tem-se que:

$$i^n = (i^4)^q \cdot i^r$$

Pelo ciclo fundamental das potências de i, $i^4 = 1$. Substituindo este valor:

$$i^n = (1)^q \cdot i^r$$

Como o número 1 é o elemento neutro da multiplicação e $1^q = 1$ para qualquer $q \in \mathbb{Z}$:

$$i^n = 1 \cdot i^r$$
$$i^n = i^r$$

Logo, qualquer potência de i equivale a i elevado ao resto da divisão do expoente por 4. □

Perceba que...

Tal proposição garante que a simplificação pelo resto da divisão não é um mero artifício mnemônico, mas uma consequência direta das propriedades do corpo dos números complexos.

Regra prática para o cálculo de i^n

Para calcular i^n, divida o expoente n por 4 e observe o resto r.

$$\begin{array}{r|l} n & 4 \\ \hline r & q \end{array} \quad \rightarrow \quad \therefore \quad i^n = i^r$$

Os possíveis restos da divisão por 4 são:

- Se $r = \mathbf{0} \implies i^n = 1$
- Se $r = \mathbf{1} \implies i^n = i$
- Se $r = \mathbf{2} \implies i^n = -1$
- Se $r = \mathbf{3} \implies i^n = -i$

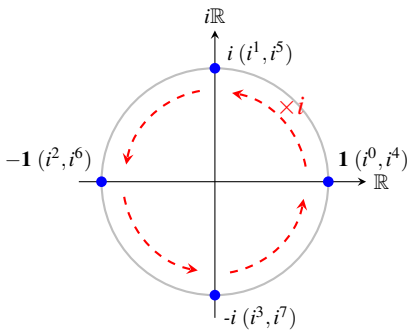
Matematicamente, divide-se o expoente n por 4. O que nos interessa não é o resultado da divisão, mas sim o **resto**.

Perceba que...

Como o ciclo tem período 4, para calcular qualquer potência i^n (com $n \in \mathbb{N}$), não precisa-se realizar a multiplicação n vezes. Basta descobrir em que posição do ciclo o número cai.

Comportamento geométrico das potências de i

É possível visualizar o comportamento cíclico das potências de i geometricamente. Lembrando que multiplicar por i equivale a uma rotação de 90°. Quatro rotações de 90° completam 360°, o que traz de volta ao ponto de partida.



Exercício resolvido 7.2.2

1. Calcule:

a) i^{25} b) i^{102} c) i^{1000}

Resolução:

a) i^{25}

- Dividindo 25 por 4: $25 \div 4 = 6$ com **resto 1**.
- Logo: $i^{25} = i^1 = i$.

b) i^{102}

- *Dica:* Para saber o resto da divisão por 4, basta dividir os **dois últimos dígitos** do número.
- $02 \div 4$ resulta em quociente 0 e **resto 2**.
- Logo: $i^{102} = i^2 = -1$.

c) i^{1000}

- Dividindo 1000 por 4: $1000 \div 4 = 250$ com **resto 0**.
- *Observação:* Como 1000 é múltiplo de 4, o resto é zero.
- Logo: $i^{1000} = i^0 = 1$.

2. Simplifique a expressão $S = i^{20} + i^{21} + i^{22} + i^{23}$.

Resolução:

- $i^{20} \to$ resto $0 \to 1$
- $i^{21} \to$ resto $1 \to i$
- $i^{22} \to$ resto $2 \to -1$
- $i^{23} \to$ resto $3 \to -i$
- Somando tudo: $S = 1 + i + (-1) + (-i) = 0$.

Nota: A soma de quaisquer 4 potências consecutivas de i é sempre zero.

3. (Mack-SP) O valor da expressão:

$$y = i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + \cdots + i^{1001}$$

é:

(A) 1 (B) i (C) $-i$ (D) -1 (E) $1+i$

Resolução:

Sabendo que as potências de i formam um ciclo de período 4:

$$i^1 = i, \qquad i^2 = -1, \qquad i^3 = -i, \qquad i^4 = 1.$$

A soma de um ciclo completo é:

$$i + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 - i + 1 = 0.$$

Como:

$$1001 = 4 \cdot 250 + 1,$$

tem-se 250 ciclos completos (cada um somando 0) e um termo restante:

$$i^{1001} = i^1 = i.$$

Portanto,

$$\boxed{y = i}$$ Resposta correta: alternativa (B)

4. Determine a soma $S = i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{306}$.

Resolução:

- Divide-se o total de termos por 4: $306 \div 4 = 76$ grupos completos e **resto 2**.
- Como a soma de cada grupo de 4 termos é zero, restam apenas os 2 termos excedentes.
- Somando os dois últimos termos restantes na sequência, e reduzindo os expoentes aos seus respectivos restos resultantes da divisão por 4, tem-se:

$$S = 1^{305} + i^{306} = i^1 + i^2 = i + (-1) = -1 + i \ \therefore \boxed{S = -1 + i}$$

5. (UFES) Se $w = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, onde $i^2 = -1$, então o número de elementos distintos do conjunto $\{w^1,\ w^2,\ w^3, ...,\ w^n, ...\}$ é:

(A) 4 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) infinito

Resolução:

i: Cálculo das primeiras potências:

$$
\begin{aligned}
w^1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
w^2 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot i\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{2}{4} + 2\cdot\frac{2}{4}i + i^2\cdot\frac{2}{4} = \frac{1}{2} + i - \frac{1}{2} = i \\
w^3 &= w^2\cdot w = i\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = i\frac{\sqrt{2}}{2} + i^2\frac{\sqrt{2}}{2} = i\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\
w^4 &= w^2\cdot w^2 = i\cdot i = i^2 = -1 \\
w^5 &= w^4\cdot w = (-1)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
w^6 &= w^4\cdot w^2 = (-1)\cdot i = -i \\
w^7 &= w^4\cdot w^3 = (-1)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
w^8 &= w^4\cdot w^4 = (-1)\cdot(-1) = 1 \\
w^9 &= w^8\cdot w = 1\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = w^1
\end{aligned}
$$

ii: Identificação dos valores distintos:

$$
\begin{array}{lllll}
w^1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} & & w^2 = i & w^3 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} & w^4 = -1 \\
w^5 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2} & & w^6 = -i & w^7 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2} & w^8 = 1
\end{array}
$$

iii: Periodicidade: Como $w^9 = w^1$, a sequência é periódica com período 8. Desta forma, o conjunto possui exatamente 8 elementos distintos.

Resposta correta: Alternativa (B)

6. Calcular $(1-i)^8$.

Resolução:

$$[(1-i)^2]^4 = (i^2 - 2i + i^2)^4 = (-2i)^4 = 16i^4 = 16\cdot 1 = \boxed{16}.$$

7.2.3 Número complexo

Considerando, o que foi visto nas seções 7.2 e 7.2.1, um complexo qualquer (a,b) pode ser reescrito como:

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = \underbrace{(a,0)}_{a} + \underbrace{(b,0)}_{b} \cdot \underbrace{(0,1)}_{i} = a + b \cdot i.$$

A forma $a+bi$, onde $a,b \in \mathbb{R}$, é denominada **forma algébrica** de um número complexo z, e pode ser definida do seguinte modo:

Definição 7.2.2: Número complexo

Admitida uma unidade imaginária i, tal que:

$$i^2 = -1,$$

um **número complexo** $z \in \mathbb{C}$ é definido pela expressão:

$$z = a + bi$$

onde $a,b \in \mathbb{R}$, sendo:

- a a *parte real*, denotada por $\mathrm{Re}(z)$;
- b a *parte imaginária*, denotada por $\mathrm{Im}(z)$.

Perceba que...

O conjunto dos números complexos é uma extensão do conjunto dos números reais a partir da adjunção da unidade imaginária i.

Igualdade entre complexos

Recordando que todo número complexo é escrito na forma

$$z = a + bi,$$

onde a é a **parte real** e b é a **parte imaginária**, define-se:

Definição 7.2.3: Igualdade entre complexos

Dois números complexos

$$z_1 = a + bi \quad \text{e} \quad z_2 = c + di$$

são **iguais** se, e somente se,

$$a = c \quad \text{e} \quad b = d.$$

Ou seja, a igualdade entre complexos ocorre quando suas respectivas partes real e imaginária são iguais.

Essa definição decorre da interpretação geométrica do plano complexo: cada número complexo é representado por um ponto (ou vetor) no plano (a,b). Portanto, dois complexos são iguais apenas quando ocupam exatamente a mesma posição no plano.

Observação

A identidade fundamental

$$a + bi = c + di$$

não permite "misturar" parte real com parte imaginária. Por exemplo, não faz sentido concluir que $a+b=c+d$. A igualdade só acontece coordenada a coordenada.

Exercício resolvido 7.2.3

1. Verifique se os números complexos $z_1 = 3+2i$ e $z_2 = 3+2i$ são iguais.

Solução. Comparando parte a parte:

$$\mathrm{Re}(z_1) = 3 = \mathrm{Re}(z_2), \qquad \mathrm{Im}(z_1) = 2 = \mathrm{Im}(z_2).$$

Logo, $z_1 = z_2$.

2. Determine o valor de x para que

$$2 + xi = 2 + 5i.$$

Solução. Igualando as partes imaginárias:

$$x = 5.$$

3. Encontre x e y tais que:

$$(2x-1) + (3-y)i = 7 + 4i.$$

Solução. Igualando partes reais:

$$2x - 1 = 7 \quad \Rightarrow \quad x = 4.$$

Igualando partes imaginárias:

$$3 - y = 4 \quad \Rightarrow \quad y = -1.$$

4. Determine a e b em

$$(a+2b) + (3a-b)i = 5 + 7i.$$

Solução. Sistema formado pela igualdade coordenada:

$$\begin{cases} a+2b=5, \\ 3a-b=7. \end{cases}$$

Resolvendo:

$$a+2b=5 \quad \Rightarrow \quad a=5-2b.$$

Substituindo na segunda equação:

$$3(5-2b)-b=7 \Rightarrow 15-6b-b=7,$$

$$-7b=-8 \Rightarrow b=\frac{8}{7},$$

$$a=5-2\left(\frac{8}{7}\right)=\frac{35}{7}-\frac{16}{7}=\frac{19}{7}.$$

5. Seja o complexo

$$z=(x-3)+(2y+1)i$$

e considere que

$$2z-(1-i)=7+5i.$$

Determine x e y.

Solução. Primeiro calculamos $2z$:

$$2z=2(x-3)+2(2y+1)i=(2x-6)+(4y+2)i.$$

Agora fazemos:

$$2z-(1-i)=(2x-6-1)+(4y+2+1)i=(2x-7)+(4y+3)i.$$

Igualando a $7+5i$:

$$\begin{cases} 2x-7=7, \\ 4y+3=5. \end{cases}$$

Resolvendo:

$$2x=14 \Rightarrow x=7,$$

$$4y=2 \Rightarrow y=\frac{1}{2}.$$

Os exemplos mostram que, apesar de simples, a igualdade entre complexos é uma ferramenta essencial para

resolver problemas envolvendo equações complexas e determinar valores desconhecidos.

Adição e Subtração de Números Complexos

Considere dois números complexos na forma algébrica:

$$z_1 = a + bi \qquad \text{e} \qquad z_2 = c + di,$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. A adição e a subtração entre números complexos são definidas componente a componente, isto é, somam-se ou subtraem-se as partes reais entre si e, separadamente, as partes imaginárias.

Definição 7.2.4: Adição e subtração de complexos

A soma/subtração de z_1 e z_2 é dada por:

$$z_1 \pm z_2 = (a \pm c) + (b \pm d)i.$$

Ou seja, ao somar ou subtrair dois complexos, opera-se de forma independente sobre as partes real e imaginária, de maneira análoga à adição e subtração de vetores em $\mathbb{R}^2$.

Exercício resolvido 7.2.3

1. **Operação básica**
   Determine $z_1 + z_2$, sabendo que
   $$z_1 = 3 + 2i \quad \text{e} \quad z_2 = 1 + 5i.$$
   Solução:
   $$z_1 + z_2 = (3+1) + (2+5)i = 4 + 7i.$$

2. **Operação com sinais negativos**
   Calcule $z_1 - z_2$ para
   $$z_1 = -2 + 4i, \qquad z_2 = 5 - 3i.$$
   Solução:
   $$z_1 - z_2 = (-2-5) + (4-(-3))i = -7 + 7i.$$

3. **Soma com parte imaginária nula**
   Determine $z_1 + z_2$ se
   $$z_1 = 6 \quad \text{e} \quad z_2 = -4 + 9i.$$
   Solução:
   $$z_1 + z_2 = (6-4) + (0+9)i = 2 + 9i.$$

4. Subtração que zera uma das partes

Encontre $z_1 - z_2$ para

$$z_1 = 8 - 3i, \qquad z_2 = 8 + 10i.$$

Solução:

$$z_1 - z_2 = (8-8) + (-3-10)i = 0 - 13i = -13i.$$

5. Interpretação vetorial

Seja

$$z_1 = 2 + i, \qquad z_2 = -1 + 3i.$$

Determine $z_1 + z_2$ e interprete geometricamente.

Solução:

$$z_1 + z_2 = (2-1) + (1+3)i = 1 + 4i.$$

Geometricamente, a adição de complexos corresponde à soma vetorial: o ponto $(1,4)$ é obtido deslocando-se o vetor $(2,1)$ pelo vetor $(-1,3)$.

Multiplicação de Números Complexos

A multiplicação de números complexos segue a regra distributiva, combinada com a propriedade fundamental $i^2 = -1$. Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$. Então:

$$z_1 \cdot z_2 = (a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2.$$

Substituindo $i^2 = -1$, vem:

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Geometricamente, a multiplicação corresponde a uma rotação e uma dilatação no plano complexo.

Definição 7.2.5: Multiplicação de complexos

O produto de $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ é definido por:

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Exercício resolvido 7.2.3

1. Multiplicação básica

Calcule $(2+3i)(1-i)$.

Solução:

$$(2+3i)(1-i) = 2\cdot 1 + 2\cdot(-i) + 3i\cdot 1 + 3i\cdot(-i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2.$$

Como $i^2 = -1$, temos:

$$2 - 2i + 3i + 3 = \boxed{5+i}.$$

2. **Multiplicação com números puramente imaginários**
Determine $(4i)(-3i)$.
Solução:

$$(4i)(-3i) = -12i^2 = -12(-1) = \boxed{12}.$$

Note que o produto de dois imaginários puros resulta em um número real.

3. **Multiplicação e potência de i**
Calcule $(1+i)^3$. **Solução:**
Primeiro, $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$.
Então:

$$(1+i)^3 = (1+i)^2\cdot(1+i) = (2i)(1+i) = 2i + 2i^2 = 2i - 2 = \boxed{-2+2i.}$$

4. **Aplicação: rotação no plano**
Se $z = 1 + \sqrt{3}\,i$, qual é o efeito geométrico de multiplicar z por i? **Solução:**

$$i\cdot z = i(1+\sqrt{3}\,i) = i + \sqrt{3}i^2 = i - \sqrt{3} = \boxed{-\sqrt{3}+i}.$$

Multiplicar por i corresponde a uma rotação de 90° no sentido anti-horário.

Conjugado de um Número Complexo

O conjugado de um número complexo é uma ferramenta algébrica essencial, especialmente útil na divisão e na simplificação de expressões.

Definição 7.2.6: Conjugado de um complexo

Dado $z = a + bi$, o conjugado de z, denotado por $\overline{z}$, é definido por:

$$\overline{z} = a - bi.$$

Propriedades

As principais propriedades do conjugado são:

- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}_0^+$
- $\overline{\overline{z}} = z$

Exercício resolvido 7.2.3

1. **Cálculo do conjugado**
   Se $z = -3 + 4i$, determine $\overline{z}$. **Solução:**
   $$\overline{z} = -3 - 4i.$$

2. **O conjugado da soma é igual a soma dos conjugados**
   Verifique a propriedade $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ para $z_1 = 2 - i$ e $z_2 = -1 + 3i$.
   Solução:
   $$z_1 + z_2 = (2-1) + (-1+3)i = 1 + 2i \quad \Rightarrow \quad \overline{z_1 + z_2} = 1 - 2i.$$
   $$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (2+i) + (-1-3i) = 1 - 2i.$$

3. **Produto envolvendo conjugados**
   Se $z = 5 - 2i$, calcule $z \cdot \overline{z}$.
   Solução:
   $$z \cdot \overline{z} = (5-2i)(5+2i) = 25 + 10i - 10i - 4i^2 = 25 + 4 = 29.$$
   O produto de um número complexo pelo seu conjugado é sempre um número real não negativo.

4. **O conjugado do produto é igual ao produto dos conjugados**
   Verifique que $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ para $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 - i$.
   Solução:
   $$z_1 \cdot z_2 = (1+2i)(3-i) = 3 - i + 6i - 2i^2 = 3 + 5i + 2 = 5 + 5i \quad \Rightarrow \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = 5 - 5i.$$
   $$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (1-2i)(3+i) = 3 + i - 6i - 2i^2 = 3 - 5i + 2 = 5 - 5i.$$

1. **Isolando partes real e imaginária**
   Dado $z = 7 - 4i$, expresse $\mathrm{Re}(z)$ e $\mathrm{Im}(z)$ usando z e $\overline{z}$.
   Solução:
   $$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{(7-4i) + (7+4i)}{2} = \frac{14}{2} = 7.$$
   $$\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i} = \frac{(7-4i) - (7+4i)}{2i} = \frac{-8i}{2i} = -4.$$

2. **Equação com conjugado**
   Resolva a equação $z + \overline{z} = 6$ para $z \in \mathbb{C}$.

Solução:
Se $z = a + bi$, então $z + \overline{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a$. Logo, $2a = 6 \Rightarrow a = 3$. A parte imaginária b pode ser qualquer real. Assim, $z = 3 + bi,\ b \in \mathbb{R}$.

Divisão de Números Complexos

Para dividir dois números complexos, utiliza-se o conjugado do denominador para transformá-lo em um número real, o que simplifica o cálculo.

Se $z_1 = a+bi$ e $z_2 = c+di \neq 0$, então:

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

Definição 7.2.7: Divisão de complexos

O quociente $\frac{z_1}{z_2}$ (com $z_2 \neq 0$) é dado por:

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i.$$

Exercício resolvido 7.2.3

1. **Divisão básica**
   Calcule $\frac{3+4i}{1-2i}$.
   Solução:
   $$\frac{3+4i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{(3\cdot 1+4\cdot 2)+(4\cdot 1-3\cdot 2)i}{1^2+(-2)^2} = \frac{11-2i}{5} = \boxed{\frac{11}{5} - \frac{2}{5}i}.$$

2. **Divisão por um imaginário puro**
   Determine $\frac{6+9i}{3i}$.
   Solução:
   $$\frac{6+9i}{3i} = \frac{6+9i}{3i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-6i-9i^2}{-3i^2} = \frac{-6i+9}{3} = \frac{9-6i}{3} = \boxed{3-2i}.$$

3. **Divisão e simplificação**
   Simplifique $\frac{2-i}{1+i} + \frac{1+2i}{2-i}$.
   Solução:
   Primeiro, $\frac{2-i}{1+i} = \frac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-2i-i+i^2}{1+1} = \frac{1-3i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$.
   Depois, $\frac{1+2i}{2-i} = \frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i+4i+2i^2}{4+1} = \frac{5i}{5} = i$.
   Somando: $\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right) + i = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}$.

4. Divisão que resulta em número real

Encontre $k \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{3+ki}{1+2i}$ seja um número real.

Solução:

$$\frac{3+ki}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{(3+2k)+(k-6)i}{5}.$$

Para que seja real, a parte imaginária deve ser zero: $k-6=0 \Rightarrow \boxed{k=6}$.

Exercício 7.2

1. Álgebra - Simplifique a seguinte expressão complexa:

$$E = \frac{i^{2026} - i^{1987}}{i^{1991} + i^{2024}}$$

2. Geometria e Robótica - Um robô em miniatura se move no plano de Argand-Gauss. Ele parte do ponto $(1,0)$. A cada segundo, seu vetor de posição é multiplicado por i, o que corresponde a uma rotação de 90° em torno da origem. Qual será a coordenada do robô após 2027 segundos?

3. Processamento de Sinais / Modulação de Fase - Em sistemas de comunicação digital, a Modulação por Deslocamento de Fase (PSK) usa pontos no plano complexo para representar dados. Em um sistema 4-PSK, os quatro pontos da constelação são $\{1, i, -1, -i\}$. Um sinal é gerado pela sequência $s_n = i^n$. Se um engenheiro precisa amostrar o sinal no instante $n = 123$, qual dos quatro pontos da constelação ele irá obter?

4. Geometria Fractal / A Ilha do Dragão - A "Ilha do Dragão" é um fractal gerado por uma sequência de pontos z_n no plano complexo. A regra de construção é $z_{n+1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} z_n$, com $z_0 = 1$.

   a) Calcule os 8 primeiros termos da sequência (z_1 a z_8). (Dica: note que $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ corresponde a uma rotação de 45°).

   b) Qual é o período desta sequência? Ou seja, para qual valor de n tem-se $z_n = z_0$ pela primeira vez?

   c) Descreva o padrão geométrico formado pelos pontos no plano complexo.

5. Sequência de Fibonacci Complexa - Considere uma variação da sequência de Fibonacci no plano complexo, definida pela mesma regra de recorrência, $Z_n = Z_{n-1} + Z_{n-2}$, mas com condições iniciais complexas: $Z_1 = 1$ e $Z_2 = i$.

   a) Calcule os 8 primeiros termos desta sequência (Z_1 a Z_8).

   b) Represente graficamente estes pontos no plano de Argand-Gauss. Qual padrão geométrico emerge?

   c) Observe as partes real e imaginária dos termos que você calculou. Elas se relacionam com a sequência de Fibonacci original?

7.3 Forma trigonométrica dos números complexos

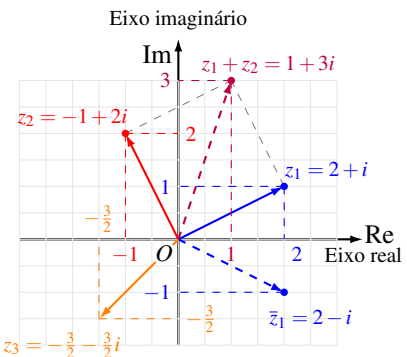
7.3.1 Representação geométrica de um número complexo

A representação geométrica de números complexos, também conhecida como **plano de Argand-Gauss**, constitui uma ferramenta fundamental para a interpretação e manipulação visual destes números. Essa representação atribui a cada número complexo $z = a + bi$ um ponto único $P(a,b)$, como em um plano cartesiano. Porém, agora o eixo das abscissas representa a **parte real** e o eixo das ordenadas representa a **parte imaginária** dos números complexos. Neste plano, operações algébricas podem ser visualizadas como transformações geométricas, estabelecendo uma ponte poderosa entre álgebra e geometria.

Tarefa de pesquisa histórica

Realize uma pesquisa sobre a associação dos nomes de **Jean-Robert Argand** (1768-–1822) e **Carl Friedrich Gauss** (1777—1855) ao plano complexo.

O plano de Argand-Gauss não apenas fornece uma visualização intuitiva, mas também permite explorar propriedades como distâncias, rotações e simetrias, fundamentais para aplicações em engenharia, física e processamento de sinais.



A figura ao lado ilustra a representação dos números complexos $z_1 = 2 + i$, seu conjugado $\overline{z_1} = 2 - i$, $z_2 = -1 + 2i$, a soma $z_1 + z_2 = 1 + 3i$ e $z_3 = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$. As linhas tracejadas auxiliam na visualização das coordenadas e da construção do paralelogramo, evidenciando a natureza vetorial da adição no plano complexo.

Interpretação geométrica:

- Cada número complexo $z = a + bi$ corresponde ao vetor $\overrightarrow{OP}$, onde O é a origem do plano e $P(a,b)$ é um ponto associado ao número complexo chamado afixo.
- A **adição** de complexos corresponde à **soma vetorial** (regra do paralelogramo), como ilustrado.
- O **módulo** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ é o comprimento do vetor $\overrightarrow{OP}$.
- O **conjugado** $\overline{z} = a - bi$ é o reflexo de z em relação ao eixo real.
- A **multiplicação** por i corresponde a uma rotação de 90° no sentido anti-horário.

Módulo de um Número Complexo

O módulo (ou valor absoluto) de um número complexo é uma generalização do conceito de valor absoluto para números reais. Ele representa a distância do ponto correspondente no plano complexo até a origem.

Definição 7.3.1: Módulo de um complexo

Seja $z = a + bi \in \mathbb{C}$, com $a, b \in \mathbb{R}$. O **módulo** de z, denotado por $|z|$, é definido por:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Propriedades fundamentais do módulo

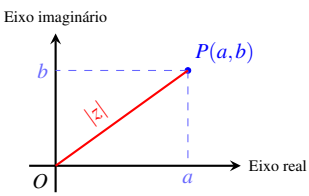
Sejam $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Valem as seguintes propriedades:

1. **Não-negatividade:** $|z| \geq 0$, e $|z| = 0$ se e somente se $z = 0$.
2. **Homogeneidade:** $|\lambda z| = |\lambda| \cdot |z|$, para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$. Em particular, se $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se $|\lambda z| = |\lambda| \cdot |z|$.
3. **Desigualdade triangular:** $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
4. **Multiplicatividade:** $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
5. **Relação com o conjugado:** $|z| = |\overline{z}|$ e $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.
6. **Divisão:** Se $z_2 \neq 0$, então $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Geometricamente, se z é representado pelo ponto (a, b) no plano de Argand-Gauss, então $|z|$ corresponde ao comprimento do segmento que liga a origem ao ponto (a, b).

Interpretação do módulo:

- O módulo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ é a distância euclidiana da origem ao ponto (a, b).
- Essa interpretação permite visualizar propriedades como a desigualdade triangular: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, que corresponde ao fato de que, em um triângulo, o comprimento de um lado é menor ou igual à soma dos outros dois.
- O conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ representa uma circunferência de centro na origem e raio r.



Exercício resolvido 7.3.1

1. Cálculo básico do módulo
Determine $|z|$ para $z = 3 - 4i$.
Solução:

$$|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = \boxed{5}.$$

2. Módulo de um imaginário puro
Calcule $|z|$ para $z = -5i$.
Solução:

$$|z| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = \sqrt{25} = \boxed{5}.$$

3. Verificação da multiplicatividade
Sejam $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 2 - i$. Verifique que $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
Solução:

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad |z_2| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}.$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1+i)(2-i) = 3 + i \quad \Rightarrow \quad |z_1 \cdot z_2| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

Como $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$, ■

4. Aplicação da desigualdade triangular
Dados $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = 1 - 2i$, verifique a desigualdade triangular.
Solução:

$$|z_1| = 5, \quad |z_2| = \sqrt{5} \approx 2.236, \quad |z_1| + |z_2| \approx 7.236.$$

$$z_1 + z_2 = 4 + 2i \quad \Rightarrow \quad |z_1 + z_2| = \sqrt{20} \approx 4.472.$$

Confirma-se que $4.472 \leq 7.236$. ■

5. Determinação de um conjunto no plano complexo
Descreva geometricamente o conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z - (2+i)| = 3\}$.
Solução:
A equação $|z - (2+i)| = 3$ representa todos os pontos z cuja distância ao ponto $2 + i$ é constante e igual a 3. Portanto, o conjunto é uma **circunferência** de centro $(2, 1)$ e raio 3 no plano complexo.

6. Resolução de equação com módulo
Determine todos os $z \in \mathbb{C}$ tais que $|z| = \mathrm{Re}(z) + 1$.
Solução:
Seja $z = x + yi$. Temos:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \mathrm{Re}(z) = x.$$

A equação torna-se $\sqrt{x^2 + y^2} = x + 1$. Elevando ao quadrado (com a condição $x + 1 \geq 0$):

$$x^2 + y^2 = x^2 + 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2x + 1.$$

Portanto, $x = \frac{y^2-1}{2}$, com a condição $\frac{y^2-1}{2} + 1 \geq 0 \Rightarrow y^2 \geq -1$ (sempre verdadeira). O conjunto solução é uma parábola no plano complexo.

7. Divisão e módulo

Se $z = \frac{1+i}{1-i}$, determine $|z|$ sem calcular explicitamente a forma algébrica.

Solução:

Usando propriedades do módulo:

$$|z| = \left|\frac{1+i}{1-i}\right| = \frac{|1+i|}{|1-i|} = \frac{\sqrt{1^2+1^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \boxed{1}.$$

Argumento de um Número Complexo

Dado um número complexo na forma algébrica

$$z = a + bi, \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

sua representação geométrica no Plano de Argand–Gauss associa a z o ponto

$$P(a, b).$$

O **argumento de** z, denotado por $\arg(z)$, é definido como a medida do ângulo θ formado entre o vetor $\overrightarrow{OP}$ e o eixo real positivo. Em outras palavras,

$$\theta = \arg(z)$$

é o ângulo, tomado em radianos, que descreve a direção do número complexo em relação ao eixo real.

Definição 7.3.2: Argumento de um complexo

Para um número complexo $z = a + bi$ com $z \neq 0$ define-se:

$$\arg(z) = \theta \quad \text{tal que} \quad \cos\theta = \frac{a}{|z|} \ \text{ e } \ \sin\theta = \frac{b}{|z|},$$

onde

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

é o módulo do número complexo.

Como o ângulo pode assumir infinitos valores que diferem por múltiplos de 2π, escreve-se:

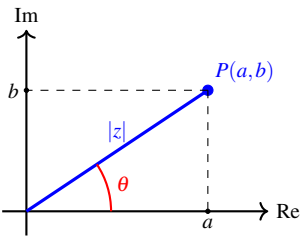
$$\arg(z) = \theta + 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Por convenção, define-se o **argumento principal** como o único valor pertencente ao intervalo

$$\arg(z) \in (-\pi, \pi].$$

Quanto à **interpretação geométrica** no plano complexo, o argumento representa a orientação do vetor associado ao número complexo. Ele expressa, portanto, *para onde* o complexo aponta. Dois números complexos com módulos diferentes, mas com argumentos iguais, encontram-se sobre a mesma semirreta que parte da origem.

Ao lado, encontra-se a **ilustração geométrica** representando o módulo $|z|$, o argumento θ e o afixo $P(a,b)$ de um complexo $z = a + bi$:



Exercício resolvido 7.3.1

8. Para $z = 3 + 3i$, $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$

9. Para $z = -2 + 2i$,

$$\theta = \arctan\left(\frac{2}{-2}\right) = -\frac{\pi}{4}, \quad \text{mas no } 2^\circ \text{ quadrante:} \quad \arg(z) = \frac{3\pi}{4}.$$

10. Para $z = -5 - i$,

$$\arctan\left(\frac{-1}{-5}\right) = \arctan\left(\frac{1}{5}\right), \quad \text{mas no } 3^\circ \text{ quadrante:} \quad \arg(z) = -\pi + \arctan\left(\frac{1}{5}\right).$$

11. Se $z = 7i$,

$$\arg(z) = \frac{\pi}{2}.$$

12. Se $z = -3i$,

$$\arg(z) = -\frac{\pi}{2}.$$

7.3.2 Forma trigonométrica de um número complexo

A forma trigonométrica de um número complexo é uma das representações mais úteis em problemas envolvendo módulo, argumento, rotações, potências e radiciação. Ela expressa um número complexo em termos de sua distância à origem (módulo) e do ângulo que ele forma com o eixo real positivo (argumento).

Definição 7.3.3: Forma trigonométrica

Considere um número complexo $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Define-se:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad \theta = \arg(z),$$

onde θ é qualquer argumento do número complexo.
Então, a **forma trigonométrica** de z é dada por:

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)\,.$$

A interpretação geométrica baseia-se no triângulo retângulo formado pelo ponto $P(a,b)$ no plano de Argand–Gauss, onde:

- o módulo $|z|$ representa o comprimento do vetor $\overrightarrow{OP}$;
- o argumento θ representa o ângulo entre o vetor e o eixo real positivo;
- as projeções $a = |z|\cos\theta$ e $b = |z|\,\text{sen}\,\theta$ surgem diretamente da Trigonometria.

Perceba que...

A forma trigonométrica surge naturalmente após substituir $a = |z|\cos\theta$ e $b = |z|\,\text{sen}\,\theta$ na forma algébrica $z = a + bi$.

Exercício resolvido 7.3.2

1. Determine a forma trigonométrica dos complexos:

a) $z = 3 + 4i$
b) $z = -2i$
c) $z = -1 + \sqrt{3}i$
d) $z = 1 + i$
e) $5 - 5\sqrt{3}i$

Resolução:

a) $z = 3 + 4i$ **Módulo:**

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Argumento: Como z está no primeiro quadrante ($a > 0$, $b > 0$), temos:

$$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{4}{3}.$$

Usando uma calculadora científica (modo graus):

$$\theta = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53.13^\circ.$$

Para maior precisão em radianos:

$$\theta \approx 0.9273 \text{ rad.}$$

Forma trigonométrica:

$$z = 5\,(\cos 53.13^\circ + i \sin 53.13^\circ) \quad \text{ou} \quad z = 5\,(\cos 0.9273 + i \sin 0.9273)\,.$$

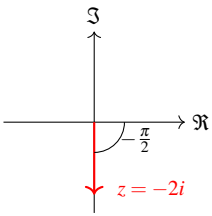
$$\boxed{z = 5\,(\cos 53.13^\circ + i \sin 53.13^\circ)}$$

b) $z = -2i$

Módulo:

$$|z| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2.$$

Argumento:
O número está sobre o eixo imaginário negativo. Para determinar o ângulo, pense no ciclo trigonométrico:
O ângulo que aponta para baixo (sentido negativo do eixo imaginário) é $-\frac{\pi}{2}$ (ou 270°).



Forma trigonométrica:

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

$$\boxed{z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)}$$

c) $z = -1 + \sqrt{3}i$

Módulo:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2.$$

Argumento:

Como $a = -1 < 0$ e $b = \sqrt{3} > 0$, o número está no segundo quadrante. Calcula-se:

$$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}.$$

O ângulo cuja tangente é $-\sqrt{3}$ é $-\frac{\pi}{3}$, mas este está no quarto quadrante. Como ele é do segundo quadrante, soma-se π:

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad (120^\circ).$$

Forma trigonométrica:

$$z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

$$\boxed{z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$$

d) $z = 1 + i$

Módulo:

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Argumento: No primeiro quadrante:

$$\tan\theta = \frac{1}{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4} \quad (45^\circ).$$

Forma trigonométrica:

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

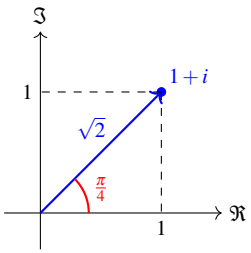
Interpretação:

Este número complexo representa um vetor de comprimento $\sqrt{2}$ formando um ângulo de 45° com o eixo real positivo.

$$\boxed{z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

A forma trigonométrica mostra claramente que multiplicar por z equivale a:

- Ampliar/contrair por um fator $\sqrt{2}$
- Rotacionar por 45° (sentido anti-horário)



e) $z = 5 - 5\sqrt{3}i$.

Módulo:

$$|z| = \sqrt{5^2 + (-5\sqrt{3})^2} = \sqrt{25 + 75} = \sqrt{100} = 10.$$

Argumento:

Como $a = 5 > 0$ e $b = -5\sqrt{3} < 0$, o complexo está no quarto quadrante:

$$\tan\theta = \frac{-5\sqrt{3}}{5} = -\sqrt{3}.$$

O ângulo cuja tangente é $-\sqrt{3}$ no quarto quadrante é $-\dfrac{\pi}{3}$ (ou 300°).

Forma trigonométrica:

$$z = 10\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

$$\boxed{z = 10\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}$$

Observação

Note que $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$ e $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3}$. Portanto, também pode-se escrever:

$$z = 10\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

mas a forma padrão mantém o sinal negativo dentro do argumento.

2. Adaptado de Dante (2004). Na **Engenharia Elétrica**, em circuitos elétricos de corrente alternada (CA) em regime senoidal permanente, tensões e correntes podem ser representadas por *fasores*, isto é, números complexos. Nesse contexto, a lei de Ohm generaliza-se de

$$U = Ri \quad \text{para} \quad \underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I},$$

em que $\underline{U}$ é o fasor de tensão, $\underline{I}$ é o fasor de corrente e $\underline{Z}$ é a impedância complexa. Para evitar confusão entre i (corrente) e i (unidade imaginária), usa-se j como unidade imaginária. Considere uma fonte com tensão eficaz

$$\underline{U} = 220\angle 0^\circ \text{ V}$$

alimentando uma carga de impedância

$$\underline{Z} = (10 + 10j)\ \Omega.$$

Determinar a corrente fornecida pela fonte.

Resolução:

Da relação fasorial $\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}$, segue

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}.$$

Para efetuar a divisão, é conveniente escrever $\underline{U}$ e $\underline{Z}$ na forma polar (trigonométrica).

Como $\underline{U} = 220\angle 0^\circ$, resta obter a forma polar de $\underline{Z} = 10 + 10j$:

$$|\underline{Z}| = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}, \qquad \theta = \arctan\left(\frac{10}{10}\right) = 45^\circ.$$

Logo,

$$10 + 10j = 10\sqrt{2}\left(\cos 45^\circ + j\sin 45^\circ\right) = 10\sqrt{2}\angle 45^\circ.$$

Assim,

$$\underline{I} = \frac{220\angle 0^\circ}{10\sqrt{2}\angle 45^\circ} = \frac{220}{10\sqrt{2}}\angle(0^\circ - 45^\circ) = 11\sqrt{2}\angle(-45^\circ)\text{ A}.$$

Convertendo para a forma algébrica:

$$\underline{I} = 11\sqrt{2}\big(\cos(-45^\circ) + j\sin(-45^\circ)\big) = 11\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 11 - 11j \text{ A}.$$

Portanto, a corrente fornecida pela fonte é

$$\boxed{\underline{I} = 11 - 11j \text{ A} \quad (\text{equivalentemente, } \underline{I} = 11\sqrt{2}\angle -45^\circ \text{ A}).}$$

Exercício 7.3

1. Determine o número complexo z que satisfaz a equação:

$$2z + (3-i)\overline{z} = 1 + 11i$$

2. Para quais valores de $k \in \mathbb{R}$ o número complexo $z = (2+ki)^2$ resulta em:

   a) Um número real? b) Um número imaginário puro?

3. (UFMA) Considerando o número complexo $z_1 = 1 + i$, onde $i^2 = -1$, encontre o número complexo z_2 cujo módulo é 5 e o argumento é o dobro do argumento de z_1.

4. (UFRGS) Os argumentos dos complexos u e z são, respectivamente, $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{\pi}{4}$ e $|\,uz\,| = 4$. Calcule a parte real e a parte imaginária de uz.

5. Engenharia Elétrica / Impedância em Paralelo - Em um circuito de corrente alternada, a impedância total Z_T de dois componentes em paralelo é dada por $\frac{1}{Z_T} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$. Se um resistor $Z_1 = 50\,\Omega$ está em paralelo com um indutor de impedância $Z_2 = 25j\,\Omega$ (onde j é a unidade imaginária), determine a impedância total Z_T na forma algébrica.

6. Geometria no Plano de Argand-Gauss - Os pontos correspondentes aos números complexos $z_1 = 3 + 5i$ e $z_2 = 7 - i$ são vértices opostos de um quadrado no plano de Argand-Gauss. Determine os outros dois vértices, z_3 e z_4. (Dica: a multiplicação por i rotaciona um vetor em 90°).

7. Propriedade Fundamental / Lei do Paralelogramo - Dados dois números complexos quaisquer, z_1 e z_2, demonstre a identidade conhecida como Lei do Paralelogramo:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

   (Dica: use a propriedade $|w|^2 = w \cdot \overline{w}$).

7.4 Operações com complexos na forma trigonométrica

Nesta seção apresenta-se a forma trigonométrica de números complexos e como executar operações fundamentais — multiplicação, divisão, potenciação (Primeira fórmula de De Moivre) e radiciação (Segunda fórmula de De Moivre). Considere, $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ onde $|z| \geq 0$ e $\theta = \arg z$ (argumento, em radianos ou graus).

Multiplicação

Definição 7.4.1: Multiplicação de complexos na forma trigonométrica

A multiplicação de números complexos na forma trigonométrica resulta na multiplicação dos módulos e na soma dos argumentos:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big).$$

A dedução da fórmula da multiplicação parte das fórmulas trigonométricas:

$$z_1 = |z_1| \cdot (\cos\theta_1 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_1), \qquad z_2 = |z_2| \cdot (\cos\theta_2 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_2).$$

O produto $z_1 \cdot z_2$ escreve-se:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot (\cos\theta_1 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_1) \cdot |z_2| \cdot (\cos\theta_2 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_2).$$

Agrupando os módulos:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos\theta_1 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_2).$$

Desenvolvendo o produto dos binômios:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \big(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + i^2\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\big).$$

Como $i^2 = -1$, obtém-se:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \big(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\big).$$

Agrupando os termos sem i e os termos com i:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \big[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i(\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2)\big].$$

Reconhecendo as fórmulas de adição de ângulos:

$$\cos(\theta_1+\theta_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2-\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2,$$

$$\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)=\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2+\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2.$$

Substituindo, chega-se à expressão final:

$$\boxed{z_1\cdot z_2=|z_1|\cdot|z_2|\cdot\left[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\cdot\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)\right]}.$$

Para uma multiplicação de n números complexos na forma trigonométrica, tem-se:

$$z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n=|z_1|\cdot|z_2|\cdot\ldots\cdot|z_n|\cdot\left[\cos(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n)+i\cdot\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n)\right].$$

Geometricamente a operação de multiplicação na forma trigonométrica corresponde geometricamente a:

- Multiplicar os comprimentos (módulos): $|z_1|\cdot|z_2|$
- Somar os ângulos (argumentos): $\theta_1+\theta_2$

Ou seja, multiplicar por z_2 equivale a:

- Escalar o vetor z_1 por um fator $|z_2|$ (dilatação ou contração)
- Rotacionar o vetor resultante por um ângulo θ_2 (sentido anti-horário se $\theta_2>0$)

Exercício resolvido 7.4

1. Obter $z_1\cdot z_2$, sabendo-se que:

$$z_1=6\cdot(\cos 45^\circ+i\cdot\sin 45^\circ)\quad\text{e}\quad z_2=2\cdot(\cos 30^\circ+i\cdot\sin 30^\circ)$$

Resolução:

Usa-se a fórmula da multiplicação na forma trigonométrica:

$$z_1\cdot z_2=|z_1|\cdot|z_2|\cdot[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\cdot\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

Substituindo os valores:

$$z_1\cdot z_2=6\cdot 2\cdot[\cos(45^\circ+30^\circ)+i\cdot\sin(45^\circ+30^\circ)]$$

$$z_1\cdot z_2=12\cdot[\cos 75^\circ+i\cdot\sin 75^\circ]$$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = 12 \cdot [\cos 75^\circ + i \cdot \sin 75^\circ]}$$

2. Dados:

$$z_1 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{e} \quad z_2 = 4 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6}\right),$$

Calcular $z_1 \cdot z_2$.

Resolução:

Aplica-se a mesma fórmula:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

Substituindo os valores:

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 4 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$z_1 \cdot z_2 = 8 \cdot \left[\cos\left(\frac{3\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$z_1 \cdot z_2 = 8 \cdot \left[\cos\left(\frac{4\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{6}\right)\right]$$

Simplificando $\frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = 8 \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]}$$

3. Dados:

$$z_1 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2}\right), \quad z_2 = 3 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{e} \quad z_2 = 4 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

Calcular $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$.

Resolução:

Para o produto de três números complexos na forma trigonométrica, usa-se a fórmula generalizada:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3| \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)].$$

Identificam-se os módulos e argumentos:

$$|z_1| = 2, \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2}; \qquad |z_2| = 3, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{6}; \qquad |z_3| = 4, \quad \theta_3 = \frac{\pi}{3}.$$

Calcula-se o produto dos módulos:

$$|z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3| = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Calcula-se a soma dos argumentos:

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}.$$

Reduzindo ao mesmo denominador (6):

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{6}.$$

Logo:

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{3\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{6} = \frac{6\pi}{6} = \pi.$$

Substituindo na fórmula:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 24 \cdot [\cos \pi + i \cdot \sin \pi].$$

Sabendo que $\cos \pi = -1$ e $\sin \pi = 0$:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 24 \cdot (-1 + i \cdot 0) = 24 \cdot (-1) = -24.$$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -24}$$

Divisão

Definição 7.4.2: Divisão de complexos na forma trigonométrica

Sejam $z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ e $z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ números complexos na forma trigonométrica, com $z_2 \neq 0$. A divisão $\dfrac{z_1}{z_2}$ é dada por:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)].$$

Para deduzir a fórmula da divisão na forma trigonométrica considere:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{|z_2|(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)}.$$

Para eliminar o denominador complexo, multiplicam-se numerador e denominador pelo conjugado do denominador:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot|z_2|(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{|z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\cdot|z_2|(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}.$$

Desenvolvendo o produto no numerador:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|\cdot|z_2|\left[\cos\theta_1\cos\theta_2 - i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - i^2\sin\theta_1\sin\theta_2\right]}{|z_2|^2\left[\cos^2\theta_2 - i^2\sin^2\theta_2\right]}.$$

Como $i^2 = -1$, simplifica-se:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|\cdot|z_2|\left[\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)\right]}{|z_2|^2\left[\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2\right]}.$$

Pela relação fundamental da trigonometria, $\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2 = 1$, e identificam-se as fórmulas do cosseno e seno da diferença de ângulos:

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2,$$

$$\sin(\theta_1 - \theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2.$$

Substituindo:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|\cdot|z_2|\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]}{|z_2|^2\cdot 1}.$$

Finalmente, simplificando $|z_2|$:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]}.$$

Geometricamente, a divisão na forma trigonométrica corresponde a:

- Dividir os comprimentos (módulos): $\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
- Subtrair os ângulos (argumentos): $\theta_1 - \theta_2$

Ou seja, dividir por z_2 equivale a:

- Escalar o vetor z_1 por um fator $\dfrac{1}{|z_2|}$ (dilatação se $|z_2| < 1$, contração se $|z_2| > 1$)
- Rotacionar o vetor resultante por um ângulo $-\theta_2$ (sentido horário se $\theta_2 > 0$, anti-horário se $\theta_2 < 0$)

Desta forma, percebe-se que a divisão é a operação inversa da multiplicação: enquanto multiplicar por z_2 dilata e rotaciona no sentido anti-horário, dividir por z_2 contrai (ou dilata inversamente) e rotaciona no sentido oposto.

Exercício resolvido 7.4

4. Calcule

$$\frac{z_1}{z_2}, \quad z_1 = 5(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ),\ z_2 = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ).$$

Resolução.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{2}\big(\cos(90^\circ) + i \sin(90^\circ)\big) = \frac{5}{2}\, i.$$

5. Determinar $\dfrac{z_1}{z_2}$, sabendo que:

$$z_1 = 9 \cdot (\cos 60^\circ + i \cdot \sin 60^\circ) \quad \text{e} \quad z_2 = 3 \cdot (\cos 15^\circ + i \cdot \sin 15^\circ)$$

Resolução:

Usa-se a fórmula:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

Substituindo os valores:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{9}{3}\left[\cos(60^\circ - 15^\circ) + i \cdot \sin(60^\circ - 15^\circ)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 3\left[\cos 45^\circ + i \cdot \sin 45^\circ\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

6. Sendo

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{e} \quad z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right),$$

obter $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Resolução:

Aplica-se a fórmula:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

Substituindo os valores:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{4}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi - 2\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3\pi - 2\pi}{6}\right)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right)}$$

Potenciação — Primeira fórmula de De Moivre

A potenciação de números complexos na forma trigonométrica é extraordinariamente simplificada pela primeira fórmula de De Moivre. Esta fórmula permite calcular potências inteiras de números complexos sem recorrer à multiplicação repetida, transformando um problema algébrico complexo em uma operação simples sobre módulos e argumentos.

Definição 7.4.3: Potenciação de complexos na forma trigonométrica

Seja $z = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ um número complexo na forma trigonométrica e seja $n \in \mathbb{Z}$ um inteiro. A **primeira fórmula de De Moivre** estabelece que:

$$z^n = |z|^n\left[\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)\right].$$

Quando enunciada como proposição, a demonstração da 1ª Fórmula de De Moivre utiliza o princípio da indução matemática sobre $n \in \mathbb{N}$.

Caso base ($n = 1$): Trivialmente verdadeiro:

$$z^1 = |z|^1\left[\cos(1\cdot\theta) + i\,\mathrm{sen}(1\cdot\theta)\right].$$

Hipótese de indução: Suponha-se que a fórmula vale para $n = k$, isto é:

$$z^k = |z|^k\left[\cos(k\theta) + i\,\mathrm{sen}(k\theta)\right].$$

Passo indutivo ($n = k+1$):

$$z^{k+1} = z^k \cdot z = \Big[|z|^k\left(\cos(k\theta) + i\,\mathrm{sen}(k\theta)\right)\Big] \cdot \left[|z|\left(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\right].$$

Pela multiplicação na forma trigonométrica:

$$z^{k+1} = |z|^k \cdot |z| \left[\cos(k\theta+\theta) + i\,\text{sen}(k\theta+\theta)\right] = |z|^{k+1} \left[\cos((k+1)\theta) + i\,\text{sen}((k+1)\theta)\right].$$

Portanto, a fórmula vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação

Para expoentes inteiros negativos, $n = -m$ com $m \in \mathbb{N}$, usa-se $z^{-m} = \dfrac{1}{z^m}$ e a fórmula da divisão, obtendo-se o mesmo formato.

Quanto a **interpretação geométrica**, elevar um número complexo à potência n corresponde a:

- Elevar o módulo à potência n: $|z|^n$
- Multiplicar o argumento por n: $n\theta$

Geometricamente, isto representa:

- Uma homotetia[1] (dilatação/contração) de razão $|z|^{n-1}$
- Uma rotação múltipla de θ

Exercício resolvido 7.4

7. Dado $z = 1 + \sqrt{3}i$, calcular z^{10}.

Solução:

Primeiro converte-se z para a forma trigonométrica.

Módulo:

$$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2.$$

Argumento: Como $a = 1 > 0$ e $b = \sqrt{3} > 0$, está no primeiro quadrante:

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Logo:

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right).$$

Aplica-se a fórmula de De Moivre com $n = 10$:

$$z^{10} = 2^{10}\left[\cos\left(10\cdot\frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(10\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right].$$

[1] Que tal se você pesquisar e ler um pouco sobre essa palavra!

Calcula-se:

$$2^{10} = 1024, \quad 10 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}.$$

Reduz-se o ângulo: $\frac{10\pi}{3} = 3\pi + \frac{\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$ (pois 3π é ímpar múltiplo de π).

Assim:

$$\cos\frac{10\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{sen}\frac{10\pi}{3} = \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto:

$$z^{10} = 1024\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -512 - 512\sqrt{3}i.$$

$$\boxed{z^{10} = -512 - 512\sqrt{3}i}$$

8. Calcular z^6, onde $z = \cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$.

Solução:

Observe-se que z já está na forma trigonométrica com módulo $|z| = 1$.

Aplica-se diretamente a fórmula de De Moivre com $n = 6$:

$$z^6 = 1^6\left[\cos\left(6 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(6 \cdot \frac{\pi}{3}\right)\right].$$

Calcula-se:

$$6 \cdot \frac{\pi}{3} = 2\pi.$$

Logo:

$$z^6 = \cos 2\pi + i\operatorname{sen} 2\pi = 1 + i \cdot 0 = 1.$$

$$\boxed{z^6 = 1}$$

Este resultado é um caso particular importante: quando $|z| = 1$, a potência z^n permanece sobre a circunferência unitária, apenas rodando o argumento. Neste caso específico, z é uma raiz sexta da unidade.

Radiciação — Segunda fórmula de De Moivre

A radiciação de números complexos, isto é, a determinação das raízes n-ésimas de um número complexo, é resolvida elegantemente pela segunda fórmula de De Moivre. Ao contrário dos números reais, onde cada número positivo possui apenas uma raiz n-ésima positiva, um número complexo não nulo possui exatamente n raízes n-ésimas distintas.

Definição 7.4.4: Radiciação de complexos na forma trigonométrica

Seja $w = |w|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ um número complexo não nulo e seja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. As n raízes n-ésimas de w são dadas por:

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Para deduzir essa fórmula procura-se $z = |z|(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$ tal que $z^n = w$.
Pela primeira fórmula de De Moivre:

$$z^n = |z|^n\left[\cos(n\alpha) + i\,\mathrm{sen}(n\alpha)\right].$$

Igualando a $w = |w|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, obtém-se:

$$|z|^n = |w| \quad \Rightarrow \quad |z| = \sqrt[n]{|w|},$$

e

$$\cos(n\alpha) = \cos\theta \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}(n\alpha) = \mathrm{sen}\,\theta.$$

Isto implica que $n\alpha$ e θ são côngruos módulo 2π, assim:

$$n\alpha = \theta + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Para valores distintos de k, obtêm-se ângulos que diferem por múltiplos de $\frac{2\pi}{n}$. Como funções trigonométricas são periódicas com período 2π, apenas n valores consecutivos de k produzem argumentos distintos. Tomando $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, obtêm-se as n raízes distintas.

Geometricamente as n raízes n-ésimas de um número complexo $w \neq 0$ possuem as seguintes características:

- Todas têm o mesmo módulo: $\sqrt[n]{|w|}$;
- Seus argumentos formam uma progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$;
- Estão uniformemente distribuídas sobre uma circunferência de raio $\sqrt[n]{|w|}$ centrada na origem;
- Formam os vértices de um polígono regular de n lados inscrito nessa circunferência.

Exercício resolvido 7.4

9. Determine o conjunto solução da equação $2x^6 + 128 = 0$ onde x é uma variável complexa.

Solução:

Reescreve-se a equação:

$$2x^6 = -128 \quad \Rightarrow \quad x^6 = -64.$$

Portanto, procura-se as raízes sextas de $w = -64$.

Escreve-se w na forma trigonométrica:

$$w = -64 = 64(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi) \quad (|w| = 64,\ \theta = \pi).$$

Aplicando a segunda fórmula de De Moivre com $n = 6$:

$$x_k = \sqrt[6]{64}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)\right], \quad k = 0,1,2,3,4,5.$$

Calcula-se $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$.

As seis raízes são:

$$x_0 = 2\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right] = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i,$$

$$x_1 = 2\left[\cos\frac{3\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{6}\right] = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = 2(0 + i) = 2i,$$

$$x_2 = 2\left[\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right] = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i,$$

$$x_3 = 2\left[\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right] = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} - i,$$

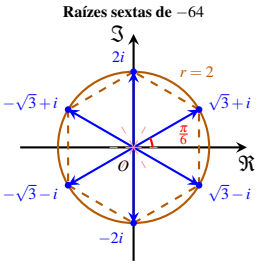
$$x_4 = 2\left[\cos\frac{9\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{9\pi}{6}\right] = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right) = 2(0 - i) = -2i,$$

$$x_5 = 2\left[\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right] = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i.$$

$$\boxed{S = \{\sqrt{3} + i,\ 2i,\ -\sqrt{3} + i,\ -\sqrt{3} - i,\ -2i,\ \sqrt{3} - i\}}$$

Geometricamente as seis raízes da equação $2x^6 + 128 = 0$ possuem as seguintes características:

- Todas têm módulo igual a 2: $\sqrt[6]{64} = 2$
- Estão sobre uma circunferência de raio 2 centrada na origem
- Formam um hexágono regular inscrito na circunferência
- Os argumentos são: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$
- Diferença angular constante de $\frac{\pi}{3}$ $(60°)$ entre raízes consecutivas
- Um vértice está sobre o eixo imaginário positivo: $2i$



Esta disposição geométrica ilustra perfeitamente a segunda fórmula de De Moivre: raízes n-ésimas igualmente espaçadas angularmente sobre uma circunferência.

10. Calcule as raízes cúbicas de 8.

Solução:

Procura-se as raízes cúbicas de $w = 8$.

Escreve-se w na forma trigonométrica:

$$w = 8 = 8(\cos 0 + i\,\mathrm{sen}\,0) \quad (|w| = 8,\ \theta = 0).$$

Aplicando a segunda fórmula de De Moivre com $n = 3$:

$$z_k = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2.$$

Calcula-se $\sqrt[3]{8} = 2$.

As três raízes são:

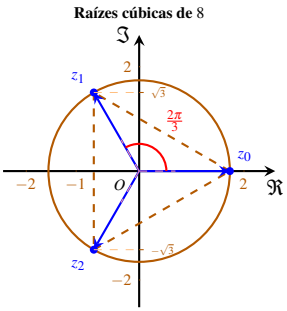
$$z_0 = 2\,[\cos 0 + i\,\mathrm{sen}\,0] = 2(1+0i) = 2,$$
$$z_1 = 2\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right] = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3},$$
$$z_2 = 2\left[\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right] = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

$$\boxed{\sqrt[3]{8} = \{2,\ -1 + i\sqrt{3},\ -1 - i\sqrt{3}\}}$$

Enquanto nos reais $\sqrt[3]{8} = 2$, no conjunto dos complexos existem três raízes cúbicas, sendo apenas uma real. As outras duas são conjugadas uma da outra.

As três raízes cúbicas de 8 possuem as seguintes características geométricas:

- Todas têm módulo igual a 2: $\sqrt[3]{8} = 2$
- Estão sobre uma circunferência de raio 2 centrada na origem
- Formam um triângulo equilátero inscrito na circunferência
- Os argumentos são: 0, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$
- Diferença angular constante de $\frac{2\pi}{3}$ $(120°)$ entre raízes consecutivas
- Apenas uma raiz é real: $z_0 = 2$
- As outras duas são conjugadas complexas: z_1 e z_2



Esta disposição geométrica ilustra perfeitamente a segunda fórmula de De Moivre: raízes n-ésimas igualmente espaçadas angularmente sobre uma circunferência, formando um polígono regular de n lados.

Exercício 7.4

1. Álgebra e Geometria - Calcule o valor de $z = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^6$ e represente o resultado na forma algébrica.

2. Engenharia Elétrica / Potência em Circuitos AC - A potência complexa em um circuito é dada por $S = V \cdot \overline{I}$, onde V é o fasor da tensão e $\overline{I}$ é o conjugado do fasor da corrente. Considere um circuito com $V = 120(\cos 30° + i \sin 30°)$ Volts e uma impedância $Z = 4(\cos(-60°) + i \sin(-60°))\,\Omega$.

   a) Calcule o fasor da corrente $I = V/Z$ na forma trigonométrica.

   b) Determine a potência complexa S e seu módulo $|S|$, conhecido como potência aparente.

3. Matemática Pura / Soma das Raízes da Unidade - As n-ésimas raízes da unidade são as soluções da equação $z^n = 1$.

   a) Use a segunda fórmula de De Moivre para escrever a fórmula geral para as n-ésimas raízes da unidade.

   b) Demonstre que a soma das n-ésimas raízes da unidade é sempre zero para $n \geq 2$. (Dica: a soma forma uma progressão geométrica).

   c) Qual a interpretação geométrica deste resultado no plano de Argand-Gauss?

4. Mecânica de Vibrações / Oscilador Amortecido - A posição de um oscilador mecânico amortecido em instantes discretos de tempo pode ser modelada pela sequência $z_n = z_0 \cdot w^n$, onde z_0 é a posição inicial e

w é um fator complexo que combina rotação e amortecimento. Se a posição inicial é $z_0 = 10$ e o fator de evolução é $w = 0.9(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$, determine a posição do oscilador, z_4, após 4 passos.

5. Geometria Analítica / Lugar Geométrico - Determine e descreva o lugar geométrico dos pontos z no plano complexo que satisfazem a condição:

$$\arg\left(\frac{z-2}{z+2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

(Dica: Interprete o argumento da divisão como a diferença dos argumentos. O que significa a diferença entre os ângulos dos vetores que partem de z para 2 e para -2 ser 90°?)

7.5 Forma de Euler para um número complexo

Além das formas algébrica ($z = a + bi$) e trigonométrica ($z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$), existe uma terceira representação, frequentemente considerada a mais elegante da análise complexa: a **Forma Exponencial**.

Esta forma baseia-se na célebre **Fórmula de Euler**, que estabelece uma conexão profunda entre a trigonometria e a função exponencial:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

onde θ é o argumento em radianos e e é a base do logaritmo natural ou Número de Euler, visto na seção 4.3.5.

Substituindo esta identidade na forma trigonométrica dos complexos, obtém-se a definição da forma exponencial de um número complexo z:

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Dedução analítica (Séries de Taylor)

A justificativa para a igualdade $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$ provém da expansão em Séries de Maclaurin (Séries de Taylor centradas em 0) para as funções e^x, $\mathrm{sen}\,x$ e $\cos x$. Quando estudar Cálculo Integral você aprenderá que, para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$
$$\mathrm{sen}\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Ao substituirmos x por $i\theta$ na série da exponencial, tem-se:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1+(i\theta)+\frac{(i\theta)^2}{2!}+\frac{(i\theta)^3}{3!}+\frac{(i\theta)^4}{4!}+\dots \\ &= 1+i\theta-\frac{\theta^2}{2!}-i\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^4}{4!}+\dots \quad (\text{pois } i^2=-1, i^3=-i, i^4=1) \end{aligned}$$

Agrupando os termos reais e imaginários:

$$e^{i\theta} = \underbrace{\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\dots\right)}_{\cos\theta} + i\cdot\underbrace{\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\dots\right)}_{\operatorname{sen}\theta}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$$

■

Tarefa de pesquisa histórica

Na literatura clássica, realize uma pesquisa detalhando a história desta igualdade. Investigue como Leonhard Euler chegou a essa relação em 1748 e como ela unificou a álgebra e a geometria.

Exercício resolvido 7.5

1. Escreva o número complexo

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$$

na forma exponencial.

Solução. O módulo é $|z|=2$ e o argumento é $\theta=\frac{\pi}{3}$. Assim,

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

2. Converta $z=1+i$ para a forma exponencial.

Solução. Calculando o módulo:

$$|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

Para o argumento:

$$\tan\theta = \frac{1}{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Logo:

$$z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

3. Dados $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$ e $z_2 = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$, calcule $z_1 z_2$ e escreva o resultado na forma algébrica.

Solução. Pela forma exponencial:

$$z_1 z_2 = (3\cdot 4)e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6})} = 12e^{i(\frac{3\pi}{6}+\frac{\pi}{6})} = 12e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Convertendo para a forma algébrica:

$$12\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 12\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -6 + 6\sqrt{3}\,i.$$

3. Calcule $(1+\sqrt{3}i)^{10}$ utilizando a forma exponencial.

Solução. Convertendo-se a base $w = 1+\sqrt{3}i$:

$$|w| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2, \qquad \theta = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$$

Logo,

$$w = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Elevando à décima potência:

$$w^{10} = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{10} = 2^{10}e^{i\frac{10\pi}{3}}.$$

Simplificando o ângulo $\frac{10\pi}{3} = 3\pi + \frac{\pi}{3} = 2\pi + (\pi + \frac{\pi}{3}) \equiv \frac{4\pi}{3}$ (3° quadrante).

Assim:

$$w^{10} = 1024\,e^{i\frac{4\pi}{3}}.$$

Convertendo para a forma algébrica:

$$1024\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 1024\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -512 - 512\sqrt{3}\,i.$$

4. Demonstre que multiplicar um número complexo $z = re^{i\theta}$ por i equivale a rotacioná-lo em 90° no sentido anti-horário.

Solução. Sabendo que:

$$i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Então:

$$z\cdot i = re^{i\theta}\cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = re^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}.$$

O módulo permanece o mesmo (o tamanho do vetor não muda) e o argumento aumenta em $\frac{\pi}{2}$, o que comprova matematicamente uma rotação de 90° no plano complexo. ■

5. Verifique a validade da proposição $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Solução.

Para verificar esta igualdade, parte-se da Fórmula de Euler, válida para qualquer ângulo real θ:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Substituindo θ por π radianos, tem-se:

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi$$

Recordando os valores trigonométricos fundamentais no círculo unitário:

$$\cos\pi = -1 \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}\,\pi = 0$$

Substituindo estes valores na equação exponencial:

$$e^{i\pi} = -1 + i(0)$$

$$e^{i\pi} = -1$$

Ao somarmos 1 a ambos os membros da equação, obtém-se a identidade final:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Portanto, a proposição é V. ■

6. A Identidade de Euler, frequentemente citada como a "mais bela fórmula da matemática" por apresentar em uma simples fórmula alguns dos números mais enigmáticos da matemática através dos tempos, 0, 1, e, π e i, estabelece que:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Utilizando esta relação fundamental e as propriedades de potência, determine o **valor principal** (*Principal Value*) da expressão abaixo e demonstre que o resultado é um número real:

$$z = (-1)^{-i}$$

Solução.

A partir da Identidade de Euler fornecida, isola-se o termo -1:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$
$$e^{i\pi} = -1$$

Esta é a representação polar do número -1 (módulo 1 e argumento π). Note que, embora -1 possa ser representado por $e^{i(\pi+2k\pi)}$, o enunciado pede o *valor principal*, o que implica usar $k=0$ (o argumento π).

Substituindo a base -1 pela sua forma exponencial na equação de z:

$$z=(-1)^{-i}=\left(e^{i\pi}\right)^{-i}$$

Utiliza-se a propriedade de potência de potência $(a^m)^n=a^{m\cdot n}$ para multiplicar os expoentes:

$$z=e^{(i\pi)\cdot(-i)}$$

Resolvendo o produto no expoente:

$$\begin{aligned}(i\pi)\cdot(-i)&=-i^2\pi\\&=-(-1)\pi\quad(\text{pois } i^2=-1)\\&=\pi\end{aligned}$$

Substituindo o expoente simplificado de volta na base:

$$z=e^{\pi}$$

O valor principal de $(-1)^{-i}$ é o número real transcendente:

$$\boxed{z=e^{\pi}\approx 23,14}$$

■

Este exercício demonstra um fato contra-intuitivo e fascinante da análise complexa: elevar um número negativo a uma potência imaginária pode resultar em um número real positivo.

7. (UFES) Se $w=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, onde $i^2=-1$, então o número de elementos distintos do conjunto $\{w^1,\ w^2,\ w^3,...,\ w^n,...\}$ é:

(A) 4 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) infinito

Resolução 1:

Usando a forma exponencial (ou de Euler) para determinar quantos valores distintos existem no conjunto

$$\{w, w^2, w^3, \ldots, w^n, \ldots\},$$

deve-se primeiramente reconhecer que

$$\cos\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Assim, pode-se escrever w diretamente na **Forma de Euler**:

$$w = \cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = e^{i\pi/4}.$$

Portanto, w é uma raiz da unidade. Para determinar seu período de-se calcular:

$$w^k = e^{ik\pi/4}.$$

Busca-se o menor k tal que

$$e^{ik\pi/4} = 1 = e^{i2\pi}.$$

Igualando os argumentos:

$$\frac{k\pi}{4} = 2\pi \quad \Rightarrow \quad k = 8.$$

Isso significa que:

$$w^8 = 1,$$

e que as potências

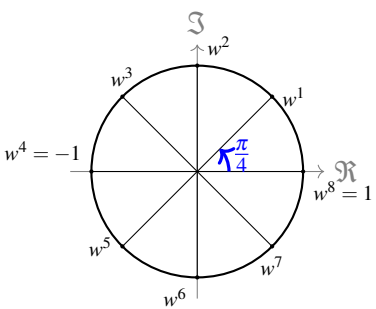
$$w,\ w^2,\ w^3,\ \ldots,\ w^8$$

são todas distintas, reiniciando o ciclo a partir daí. O conjunto possui, então, exatamente 8 elementos distintos.

Resposta: Alternativa (B)

Interpretação geométrica:

O número $w = e^{i\pi/4}$ representa uma rotação de 45° no plano complexo. As potências de w correspondem a rotações sucessivas desse mesmo ângulo, gerando os 8 vértices regulares do círculo unitário.



Resolução 2:

(a) **Identificação do módulo e argumento:**

$$|w| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{4}$$

(b) **Forma exponencial, ou de Euler, de w:**

$$w = 1 \cdot e^{i\pi/4} = e^{i\pi/4}$$

(c) **Potências na forma exponencial:**

$$w^n = \left(e^{i\pi/4}\right)^n = e^{in\pi/4}$$

(d) **Periodicidade:** A função exponencial complexa é periódica com período $2\pi i$, portanto:

$$e^{i(n\pi/4+2\pi k)} = e^{in\pi/4} \quad \text{para } k \in \mathbb{Z}$$

Em particular, quando n aumenta de 8:

$$w^{n+8} = e^{i(n+8)\pi/4} = e^{in\pi/4} \cdot e^{i2\pi} = e^{in\pi/4} = w^n$$

(e) **Elementos distintos:** As potências distintas são:

$$w^1 = e^{i\pi/4} \qquad w^2 = e^{i\pi/2} \qquad w^3 = e^{i3\pi/4} \qquad w^4 = e^{i\pi}$$
$$w^5 = e^{i5\pi/4} \qquad w^6 = e^{i3\pi/2} \qquad w^7 = e^{i7\pi/4} \qquad w^8 = e^{i2\pi} = 1$$

A partir de $w^9 = e^{i9\pi/4} = e^{i\pi/4} = w^1$, os valores se repetem.

Assim, o conjunto possui exatamente 8 elementos distintos.

Resposta: Alternativa (B)

Este problema ilustra elegantemente como a forma exponencial simplifica o cálculo de potências de números complexos, transformando multiplicações em simples adições de expoentes e revelando claramente a estrutura periódica subjacente.

Exercício 7.5

1. Análise de Circuitos RLC - A impedância de um circuito RLC série é dada por $Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$, onde R é a resistência, L a indutância, C a capacitância e ω a frequência angular.

   a) Escreva a impedância Z na forma exponencial, $Z = |Z|e^{j\phi}$.

   b) A condição de **ressonância** ocorre quando a parte imaginária de Z é nula, minimizando a impedância. Determine a frequência de ressonância ω_0 do circuito.

   c) O que acontece com o argumento (ângulo de fase ϕ) de Z na ressonância? Qual a implicação física disso para a relação entre tensão e corrente?

2. Processamento de Sinais / Filtros Digitais - Em processamento de sinais, a resposta em frequência de um filtro digital é uma função complexa $H(e^{j\omega})$. Para um filtro simples, a resposta é $H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega}$.

   a) Use a Fórmula de Euler para reescrever esta expressão na forma $a + bi$.

   b) Calcule o módulo $|H(e^{j\omega})|$, que representa o ganho do filtro. (Dica: use a identidade $1 - \cos(\omega) = 2\sin^2(\omega/2)$).

   c) Para qual frequência ω o filtro bloqueia completamente o sinal (ou seja, o ganho é zero)? E para qual frequência o ganho é máximo?

3. Mecânica dos Fluidos / Potencial de Velocidade - Em escoamentos bidimensionais de fluidos, o "potencial complexo" $F(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$ é uma ferramenta poderosa. Para um escoamento uniforme com velocidade V na direção positiva de x, o potencial é $F(z) = Vz$. Se um obstáculo cilíndrico de raio R é colocado no escoamento, o potencial se torna $F(z) = V(z + \frac{R^2}{z})$. Determine a velocidade do fluido no ponto $z = iR$ (o topo do cilindro), sabendo que a velocidade complexa é a derivada $F'(z)$.

4. Geometria Fractal / Conjunto de Julia - Os conjuntos de Julia são fractais gerados pela iteração da função $f(z) = z^2 + c$, onde c é uma constante complexa. Um ponto z_0 pertence ao conjunto de Julia "preenchido" se a sequência $z_{n+1} = z_n^2 + c$ permanece limitada (não tende ao infinito). Considere o caso $c = i$.

   a) Começando com $z_0 = 0$, calcule os primeiros 5 termos da sequência: z_1, z_2, z_3, z_4, z_5.

   b) A sequência parece estar convergindo, divergindo ou se comportando de forma caótica?

5. Física Quântica / Evolução de Estado - Em mecânica quântica, o estado de um sistema de dois níveis (como um spin de elétron) pode ser representado por um vetor complexo. A evolução temporal do estado é descrita pela multiplicação por uma matriz unitária. Se o estado inicial é $\psi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ e ele evolui segundo o operador de rotação $U(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \cdot \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, o estado após um tempo t é $\psi(t) = U(\omega t)\psi_0$. Se $\theta = \omega t = \pi/4$, qual é o novo estado $\psi(\pi/4\omega)$? Qual a probabilidade de encontrar o sistema no estado $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$? (A probabilidade é o módulo ao quadrado do coeficiente correspondente).

6. Engenharia de Controle / Análise de Estabilidade - Em sistemas de controle, a estabilidade de um sistema de malha fechada pode ser analisada avaliando-se as raízes da equação característica. Determine todas as soluções complexas da equação $z^4 + 16 = 0$, que representam os polos de um sistema, e represente-as geometricamente no plano de Argand-Gauss.

7. Robótica e Cinemática / Navegação por Rotação - Um drone de exploração agrícola parte da origem, voa 10 metros na direção do eixo real positivo e chega ao ponto z_1. Em seguida, ele rotaciona seu vetor de posição em 60° (sentido anti-horário) e avança na nova direção por mais 15 metros, chegando ao ponto z_2.

    a) Expresse a operação de rotação como a multiplicação por um número complexo na forma de Euler.

    b) Determine a posição final do drone, z_2, na forma algébrica $a + bi$.

8. Análise de Sinais / Decomposição de Fourier - Um sinal sonoro simples $s(t)$ é composto pela soma de duas ondas cosseno: $s(t) = \cos(2t) + \cos(3t)$. Utilizando a identidade de Euler, $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, reescreva o sinal $s(t)$ como uma soma de exponenciais complexas. Para que serve essa representação em processamento de sinais?

9. Dinâmica de Sistemas / Trajetória Espiral - A posição de uma partícula em um campo de força é descrita a cada segundo pela sequência $z_{n+1} = w \cdot z_n$, onde $w = (1,1)e^{i\pi/4}$ e a posição inicial é $z_0 = 4$.

    a) Escreva a fórmula para a posição da partícula, z_n, na forma exponencial.

    b) Qual é a posição da partícula, na forma algébrica, após 2 segundos (z_2)?

    c) Descreva a trajetória da partícula no plano complexo.

10. Álgebra Avançada - Encontre todos os números complexos z que satisfazem a equação $z^3 = \overline{z}$. (Dica: escreva z na forma exponencial $z = re^{i\theta}$ e use as propriedades do conjugado e da potenciação).

Capítulo 8

Polinômios e Equações Polinomiais

8.1 Introdução

Os polinômios constituem um dos elementos centrais da Matemática e de suas aplicações. Além de organizarem diversas operações algébricas de forma sistemática, servem como modelos aproximados para funções mais complexas, desempenhando papel essencial na análise, na engenharia e nas ciências aplicadas. Este capítulo tem por objetivo introduzir os conceitos fundamentais, desenvolver técnicas de manipulação e apresentar métodos de resolução de equações polinomiais.

Historicamente, o estudo das equações polinomiais impulsionou avanços importantes. As equações quadráticas já eram resolvidas por civilizações antigas, e o método de completar quadrados levou à fórmula resolvente amplamente utilizada até hoje. No século XVI, foram descobertas as soluções gerais para equações cúbicas e quárticas, inicialmente por Scipione del Ferro e Niccolò Tartaglia, e publicadas por Girolamo Cardano no *Ars Magna* (1545). A solução do grau quatro foi obtida por Lodovico Ferrari, aluno de Cardano. Nesse período, a manipulação das quantidades que hoje chamamos de imaginárias foi estudada e esclarecida por Rafael Bombelli, contribuindo para o desenvolvimento do corpo dos números complexos.

A busca por uma fórmula geral que resolvesse equações de qualquer grau encontrou seu limite no grau cinco. Após tentativas iniciais de Paolo Ruffini, Niels Henrik Abel demonstrou, em 1824, que não existe fórmula por radicais válida para todas as equações polinomiais de quinto grau ou superior. Poucos anos depois, Évariste Galois forneceu uma explicação completa por meio da teoria de grupos aplicada a corpos, estabelecendo critérios precisos para determinar quando uma equação pode ou não ser resolvida por radicais. Para graus maiores que quatro, as soluções são geralmente obtidas por métodos numéricos ou expressas em termos de funções especiais.

No contexto contemporâneo, os polinômios permeiam diversas áreas, conectando álgebra, análise numérica e métodos computacionais. Nas ciências agrárias, equações quadráticas aparecem em superfícies de resposta para otimização de adubação, irrigação e produtividade. Em engenharias, polinômios são fundamentais no estudo de estabilidade, no projeto de filtros digitais e em modelos discretos obtidos pela transformada $\mathscr{Z}$. Em aplicações científicas, regressões polinomiais auxiliam na modelagem de tendências, suavização de séries temporais e processos de previsão imediata.

8.2 Polinômios

8.2.1 Definição

Definição 8.2.1: Polinômio

Um *polinômio* (ou *função polinomial*) é qualquer função $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ expressa por uma soma finita da forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j,$$

na qual:

- $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ são os *coeficientes*;
- $x \in \mathbb{C}$ é a *variável*;
- $n,\ n-1,\ n-2, \ldots \in \mathbb{N}$ são os *expoentes*;
- cada expressão $a_j x^j$ é um *termo* ou *monômio*.

Observe as expressões algébricas a seguir e determine quais são polinômios. Justifique.
$P(x) = 4x^5 - 3x^3 + 7x - 1$ é polinômio (expoentes naturais)
$P(x) = 2x^2 - 5x + 9$ é polinômio.
$P(x) = 7$ é polinômio (constante).
$P(x) = x^{-3} + 4x - 2$ não é polinômio, pois $-3 \notin \mathbb{N}$.
$P(x) = \sqrt{x} + 3x^2 - 1$ não é polinômio, pois $\sqrt{x} = x^{1/2}$ e $1/2 \notin \mathbb{N}$.
$P(x) = x^3 - 2x + \sqrt{5}$ é polinômio (coeficientes podem ser reais ou complexos).
$P(x) = 3x^{1/4} + x - 8$ não é polinômio ($1/4 \notin \mathbb{N}$).
$P(x) = \dfrac{4}{x} + x^2 - 1$ não é polinômio, pois o monômio x^{-1} caracteriza uma função racional.

8.2.2 Grau, coeficiente líder e termo independente

Definição 8.2.2

Seja

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \qquad a_n \neq 0.$$

Define-se:

- $\deg(p) = n$: *grau* de p;
- a_n: *coeficiente líder*;
- a_0: *termo constante*.

Exercício resolvido 8.2.2

1. Determine o grau dos polinômios abaixo.

(a) $P(x) = 8x^4 - 3x + 12x^2 - 5$

(b) $P(x) = 3x^{10} - x^8 + 7x^2$

(c) $P(x) = 6x^3 - 4x^3 + x - 1 + 9x^5$

(d) $P(x) = \sqrt{3}x - 2$

(e) $P(x) = \dfrac{3}{2}x^6 - 4$

(f) $P(x) = -11$

Resolução:

(a) Colocando em ordem decrescente: $P(x) = 8x^4 + 12x^2 - 3x - 5$, logo $\deg P = 4$.

(b) $\deg P = 10$.

(c) Simplificando: $6x^3 - 4x^3 = 2x^3$, então $P(x) = 9x^5 + 2x^3 + x - 1$, logo $\deg P = 5$.

(d) $\deg P = 1$.

(e) $\deg P = 6$.

(f) Polinômio constante: $\deg P = 0$.

2. Determine $m \in \mathbb{R}$ para que o polinômio

$$P(x) = (m-4)x^3 + (m^2 - 16)x^2 + (m+4)x + 4$$

seja de **grau 2**.

Resolução:

Para que $P(x)$ tenha grau 2, o coeficiente do termo de grau 3 deve ser zero e o coeficiente do termo de grau 2 deve ser diferente de zero. Ou seja:

$$\begin{cases} m - 4 = 0, \\ m^2 - 16 \neq 0. \end{cases}$$

Da primeira equação obtemos $m = 4$. Substituindo na segunda condição:

$$m^2 - 16 = 4^2 - 16 = 16 - 16 = 0,$$

o que viola a condição $m^2 - 16 \neq 0$.

Além disso, se $m = 4$ o polinômio se reduz a:

$$P(x) = 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + (4+4)x + 4 = 8x + 4,$$

que é um polinômio de **grau 1**.

Como a condição necessária $m - 4 = 0$ implica $m^2 - 16 = 0$, não existe valor de m que torne o coeficiente cúbico nulo e o coeficiente quadrático não nulo simultaneamente.

Portanto, não existe $m \in \mathbb{R}$ que satisfaça a condição pedida.

$$\boxed{\nexists\, m \in \mathbb{R} \mid \deg(P) = 2}$$

8.2.3 Identidade entre polinômios

Definição 8.2.3

Dois polinômios

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \qquad \text{e} \qquad q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$$

são *idênticos* (ou *iguais*) quando:

$$p = q \iff n = m \text{ e } a_j = b_j \text{ para todo } j.$$

Assim, a igualdade entre polinômios ocorre quando todos os coeficientes correspondentes coincidem.

Observação

Em corpos infinitos, como $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, vale também:

$$p(t) = q(t)\ \forall\, t \iff p = q,$$

isto é, duas funções polinomiais coincidem para todos os valores reais ou complexos somente quando os polinômios são idênticos.

Exercício resolvido 8.2.3

1. Verifique se os pares de polinômios abaixo são iguais. Caso não sejam, explique o motivo.

(a) $P(x) = 3x^3 - x + 4$ e $Q(x) = 3x^3 + 4 - x$

(b) $P(x) = 7x^2 - 5x + 1$ e $Q(x) = 7x^2 + 1$

(c) $P(x) = 2x^4 - x^2 + x$ e $Q(x) = 2x^4 + x - x^2$

(d) $P(x) = x^3 + x$ e $Q(x) = x(x^2 + 2)$

(e) $P(x) = 5x^5 - x^2 + 3$ e $Q(x) = 5x^5 - x^2 + 2$

Resolução:

(a) São iguais (mesmos coeficientes).

(b) Não são iguais: coeficiente de x difere ($-5 \neq 0$).

(c) São iguais (apenas reescritos).

(d) Não são iguais: $x(x^2 + 2) = x^3 + 2x$.

(e) Não são iguais: termos constantes distintos.

2. Sendo os polinômios

$$A(x) = 4x^3 + qx^2 - 2px + 6, \qquad B(x) = 4x^3 + 7x^2 + x + 6,$$

estabeleça as condições para que $A(x)$ e $B(x)$ sejam idênticos.

Resolução:

Os coeficientes correspondentes devem ser iguais. Assim:

- Comparando o termo x^3: nada a fazer (já são iguais).

- Comparando o termo x^2:

$$q = 7.$$

- Comparando o termo x^1:

$$-2p = 1 \Rightarrow p = -\frac{1}{2}.$$

Logo, para que $A(x) = B(x)$, deve-se ter:

$$p = -\frac{1}{2}, \qquad q = 7.$$

3. Calcule os valores de m, n, p e k para que se verifique a identidade:

$$2x^3 + 9x^2 - x + 4 = (m+n)x^3 + (2m-n)x^2 + (p-k)x + (3k+1).$$

Resolução:

Igualamos coeficientes termo a termo:

$$\begin{cases} m+n=2 & (I) \\ 2m-n=9 & (II) \\ p-k=-1 & (III) \\ 3k+1=4 & (IV) \end{cases}$$

Da equação (IV):

$$3k+1=4 \Rightarrow 3k=3 \Rightarrow k=1.$$

Do sistema (I) e (II):

Somando (I) e (II):

$$(m+n)+(2m-n)=2+9 \Rightarrow 3m=11 \Rightarrow m=\frac{11}{3}.$$

Substituindo em (I):

$$\frac{11}{3}+n=2 \Rightarrow n=2-\frac{11}{3}=-\frac{5}{3}.$$

Da equação (III):

$$p-k=-1 \Rightarrow p-1=-1 \Rightarrow p=0.$$

Portanto:

$$m=\frac{11}{3}, \qquad n=-\frac{5}{3}, \qquad p=0, \qquad k=1.$$

4. (Unesp-SP) Para que valores reais de a,b,c as funções polinomiais f e g, definidas por:

$f(x)=x^3+x^2+x$ e

$g(x)=x^3+(a+b)x^2+(b+c)x+a-b-c$,

são iguais?

Resolução:

Para que $f(x) \equiv g(x)$, todos os coeficientes correspondentes devem ser iguais.

Comparando os coeficientes de x^3, x^2, x e o termo independente:

$$\begin{cases} \text{Coeficiente de } x^3: & 1=1 \quad \text{(ok)} \\ \text{Coeficiente de } x^2: & 1=a+b \\ \text{Coeficiente de } x: & 1=b+c \\ \text{Termo independente:} & 0=a-b-c \end{cases}$$

Da segunda: $a+b=1$ Da terceira: $b+c=1$ Da quarta: $a-b-c=0 \Rightarrow a=b+c$

Substituindo $a = b + c$ em $a + b = 1$:

$$b + c + b = 1 \Rightarrow 2b + c = 1$$

Mas $b + c = 1 \Rightarrow c = 1 - b$.

Substituindo em $2b + c = 1$:

$$2b + (1 - b) = 1 \Rightarrow b + 1 = 1 \Rightarrow b = 0$$

Então $c = 1$, $a = 0 + 1 = 1$.

Solução:

$$\boxed{a = 1,\ b = 0,\ c = 1}$$

5. (UFLA-MG) Calcule os valores de A, B e C:

$$\frac{x+5}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Resolução:

Multiplicando ambos os lados por $(x+2)(x-1)^2$:

$$x + 5 = A(x-1)^2 + B(x+2)(x-1) + C(x+2)$$

Desenvolvendo:

$$A(x^2 - 2x + 1) + B(x^2 + x - 2) + C(x+2) = (A+B)x^2 + (-2A + B + C)x + (A - 2B + 2C)$$

Igualando coeficientes com $x + 5 = 0x^2 + 1x + 5$:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A + B + C = 1 \\ A - 2B + 2C = 5 \end{cases}$$

Da primeira: $B = -A$.

Substituindo na segunda:

$$-2A + (-A) + C = 1 \Rightarrow -3A + C = 1 \quad (1)$$

Substituindo $B = -A$ na terceira:

$$A - 2(-A) + 2C = 5 \Rightarrow A + 2A + 2C = 5 \Rightarrow 3A + 2C = 5 \quad (2)$$

De (1): $C = 1+3A$. Em (2):

$$3A+2(1+3A)=5 \Rightarrow 3A+2+6A=5 \Rightarrow 9A=3 \Rightarrow A=\frac{1}{3}$$

Então:

$$B=-\frac{1}{3}, \quad C=1+3\cdot\frac{1}{3}=2 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{A=\frac{1}{3},\ B=-\frac{1}{3},\ C=2.}$$

6. (UFG) Sendo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, encontre os valores de A, B e C, para os quais vale a decomposição:

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Resolução:

Multiplicando ambos os lados por $(x-1)(x^2+1)$:

$$x = A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$$

Desenvolvendo:

$$Ax^2+A+Bx^2-Bx+Cx-C=(A+B)x^2+(-B+C)x+(A-C)$$

Igualando coeficientes com $x = 0x^2+1x+0$:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -B+C=1 \\ A-C=0 \end{cases}$$

Da primeira: $B=-A$. Da terceira: $A=C$.

Substituindo na segunda:

$$-(-A)+A=1 \Rightarrow A+A=1 \Rightarrow 2A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{2}$$

Então:

$$C=\frac{1}{2}, \quad B=-\frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{A=\frac{1}{2},\ B=-\frac{1}{2},\ C=\frac{1}{2}.}$$

8.2.4 Polinômio identicamente nulo

Definição 8.2.4

Um polinômio é *identicamente nulo* quando todos os seus coeficientes são iguais a zero:

$$p(x) \equiv 0 \iff a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0.$$

Nesse caso, a função polinomial associada satisfaz:

$$p(t) = 0 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{C}.$$

O grau de um *polinômio nulo* é indefinido.

Perceba que...

Este é o único polinômio cuja função correspondente se anula em todos os pontos.

Exercício resolvido 8.2.4

1. Determine se os polinômios abaixo representam a função identicamente nula.

(a) $P(x) = 0x^4 + 0x^3 + 0x + 0$

(b) $P(x) = x(x-1) - (x^2 - x)$

(c) $P(x) = 3(x-1) - 3x + 3$

(d) $P(x) = 2x - (x + x)$

Resolução:

(a) Sim, todos os coeficientes são zero.

(b) Sim, pois $x(x-1) = x^2 - x$.

(c) Não: $3(x-1) - 3x + 3 = -3x + 3 - 3x + 3 = -6x + 6$.

(d) Sim: $2x - (x + x) = 0$ para todo x.

2. Determine a, b e c de modo que o polinômio

$$P(x) = (3a+2)x^2 + (b-4a)x + (5-c)$$

seja identicamente nulo.

Resolução:

Para que $P(x)$ seja identicamente nulo, todos os coeficientes devem ser iguais a zero. Assim:

$$3a+2=0 \Rightarrow 3a=-2 \Rightarrow a=-\frac{2}{3}.$$

$$b-4a=0 \Rightarrow b=4a=4\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{8}{3}.$$

$$5-c=0 \Rightarrow c=5.$$

Portanto:

$$a=-\frac{2}{3}, \qquad b=-\frac{8}{3}, \qquad c=5.$$

8.2.5 Valor numérico de um polinômio

Definição 8.2.5

Seja $p(x)$ um polinômio com coeficientes em $\mathbb{C}$, e seja um $a \in \mathbb{C}$. O **valor numérico** de $p(x)$ em $x=a$, denotado por $p(a)$, é o número obtido substituindo-se x por a e efetuando todas as operações indicadas pela expressão de p.

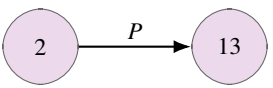
Como exemplo, seja

$$P(x)=x^3+2x^2-x-1.$$

Então, para $x=2$,

$$P(2)=2^3+2\cdot 2^2-2-1=8+8-2-1=13.$$

Em linguagem de função polinomial, P associa o número 2 à imagem 13.



Definição 8.2.6: Raiz (zero) de um polinômio

Seja $p(x)$ um polinômio e $a \in \mathbb{C}$. Dizemos que a é uma **raiz** (ou **zero**) de p quando

$$p(a) = 0.$$

Equivalente e de uso corrente:

$$p(a) = 0 \iff a \text{ é raiz de } P.$$

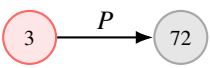
- O *valor numérico* reforça a ideia de polinômio como função: dado um a específico, calculamos $P(a)$.
- A noção de *raiz* conecta-se imediatamente à resolução de equações polinomiais $P(x) = 0$ e prepara o terreno para resultados clássicos (Teorema do Resto e do Fator), a serem desenvolvidos nas próximas seções.

Exercício resolvido 8.2.5

1. Dado o polinômio $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 3$, obter o valor numérico de $P(x)$ para $x = 3$.

Resolução:

$$\begin{aligned} P(3) &= 3 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 3 \\ &= 3 \cdot 27 - 2 \cdot 9 + 12 - 3 \\ &= 81 - 18 + 12 - 3 \\ &= \boxed{72}. \end{aligned}$$



2. (UFC) Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Determine $f(-2)$ sabendo que $f(1) = 0$, $f(-1) = 2$ e $f(2) = 14$.

Resolução:

$$\begin{cases} f(1) = a + b + c = 0, \\ f(-1) = -a + b - c = 2, \\ f(2) = 8a + 4b + 2c = 14. \end{cases}$$

Somando as duas primeiras: $2b = 2 \Rightarrow b = 1$.
De $a + b + c = 0$, obtém-se $a + c = -1 \Rightarrow c = -1 - a$.
Substituindo em $8a + 4b + 2c = 14$:

$$8a + 4 + 2(-1 - a) = 14 \;\Rightarrow\; 6a + 2 = 14 \;\Rightarrow\; a = 2, \quad c = -1 - a = -3.$$

Logo $a = 2$, $b = 1$, $c = -3$ e

$$f(-2) = 2(-8) + 1(4) + (-3)(-2) = -16 + 4 + 6 = \boxed{-6}.$$

3. O tempo de processamento (T, em segundos) de um algoritmo para ordenação de dados é modelado por um polinômio de grau 2 em função do número de elementos (N, em milhares), dado por $T(N) = aN^2 + bN + c$. Testes iniciais forneceram os seguintes dados de desempenho:

Número de Elementos (N, em milhares)	**Tempo de Processamento (T, em segundos)**
0	1
5	6
10	19

Determine:

a) Os valores dos coeficientes a, b e c.

b) O tempo de processamento estimado para um número de elementos $N = 15$ (milhares).

Resolução

(a) **Determinação dos coeficientes a, b e c:** A função de tempo de execução é $T(N) = aN^2 + bN + c$. Usando os dados da tabela, obtemos um sistema de equações:

i) Para $N = 0$: $T(0) = 1 \implies a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 1 \implies \boxed{c = 1}$

ii) Para $N = 5$: $T(5) = 6 \implies a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + 1 = 6 \implies 25a + 5b = 5$
$\implies \boxed{5a + b = 1}$ (Equação 1)

iii) Para $N = 10$: $T(10) = 19 \implies a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + 1 = 19$
$\implies \boxed{100a + 10b = 18}$ (Equação 2)

Resolvendo o sistema formado pelas Equações (1) e (2):

Da Equação (1), isolamos b:

$$b = 1 - 5a$$

Substituindo b na Equação (2):

$$100a + 10(1 - 5a) = 18$$

$$100a + 10 - 50a = 18$$

$$50a = 18 - 10 \quad \implies \quad 50a = 8 \quad \implies \quad a = \frac{8}{50} = \frac{4}{25}$$

Substituindo o valor de a de volta na expressão para b:

$$b = 1 - 5\left(\frac{4}{25}\right) = 1 - \frac{20}{25} = 1 - \frac{4}{5} \qquad \Longrightarrow \qquad b = \frac{5}{5} - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\therefore \boxed{a = \frac{4}{25}, \quad b = \frac{1}{5}, \quad c = 1.}$$

Tempo de processamento para N = 15 (milhares):

O polinômio que modela o tempo é:

$$T(N) = \frac{4}{25}N^2 + \frac{1}{5}N + 1$$

Para $N = 15$:

$$T(15) = \frac{4}{25}(15)^2 + \frac{1}{5}(15) + 1$$

$$T(15) = \frac{4}{25}(225) + 3 + 1$$

$$T(15) = 4 \cdot 9 + 4 \quad \Longrightarrow \quad T(15) = 36 + 4 \quad \Longrightarrow \quad T(15) = 40$$

O tempo de processamento estimado para 15 mil elementos é de $\boxed{40 \text{ segundos}}$.

Exercício 8.2

1. (UFBA) Considere os polinômios na variável a:

$$P_1 = 3a^3 - 4a^2b + 7b^3,$$

$$P_2 = -6a^3 + 15a^2b + 5b^3,$$

$$P_3 = ma^3 + na^2b + pb^3.$$

   Sendo $P_1 + P_2 + P_3 \equiv 0$, calcule $|m + n + p|$.

2. (Fuvest-SP) O polinômio $P(x)$ é tal que:

$$P(x) + x \cdot P(2 - x) = x^2 + 3 \quad \text{para todo } x \text{ real.}$$

   a) Determine $P(0)$, $P(1)$ e $P(2)$.

   b) Demonstre que o grau de $P(x)$ é 1.

3. (UFMG) Sejam $f(x) = x^2 + 3x + 4$ e $g(x) = ax + b$ duas funções. Determine as constantes reais a e b para que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ para todo x real.

4. Um polinômio $P(x)$ de grau 3 é tal que $P(1) = P(2) = P(3) = 0$ e $P(0) = 12$.

   a) Determine a forma fatorada do polinômio $P(x)$.

   b) Calcule o valor de $P(4)$.

5. Engenharia Civil / Deflexão de Viga - A deflexão (deslocamento vertical) $y(x)$ de uma viga simplesmente apoiada, de comprimento L, sob uma carga uniforme, pode ser modelada pelo polinômio de quarto grau:

   $$y(x) = k(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$$

   onde k é uma constante que depende do material e da carga, e x é a posição ao longo da viga ($0 \leq x \leq L$).

   a) Verifique que as extremidades da viga não sofrem deflexão, ou seja, que $x = 0$ e $x = L$ são raízes do polinômio.

   b) Mostre que a deflexão é simétrica em relação ao centro da viga, ou seja, que $y(x) = y(L - x)$.

6. Álgebra / Relações de Girard - Considere o polinômio cúbico $P(x) = 2x^3 - 10x^2 + 12x - k$. Sabendo que as raízes de $P(x)$ são r_1, r_2 e r_3, as Relações de Girard estabelecem que:

   $$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{(-10)}{2} = 5$$

   $$r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \frac{12}{2} = 6$$

   Se uma das raízes é $r_1 = 1$, determine as outras duas raízes e o valor da constante k.

7. Otimização / Projeto de Caixa - Uma folha de papelão retangular de dimensões 16 cm por 10 cm será usada para fazer uma caixa sem tampa. Para isso, corta-se um quadrado de lado x de cada um dos quatro cantos e dobra-se as abas para cima.

   a) Escreva o polinômio $V(x)$ que representa o volume da caixa em função de x.

   b) Qual é o domínio realista para a variável x neste problema?

   c) Se o volume da caixa for de 144 cm^3, qual é o valor de x?

8. Teoria de Códigos / Polinômios sobre Corpos Finitos - Em teoria de códigos para correção de erros, as operações são feitas sobre corpos finitos. Considere o polinômio $P(x) = x^2 + x + 1$ sobre o corpo finito $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, onde a aritmética é feita módulo 2 (i.e., $1 + 1 = 0$).

   a) Calcule $P(0)$ e $P(1)$ neste corpo. O polinômio possui raízes em $\mathbb{Z}_2$?

   b) Calcule o produto $(x^2 + x + 1)(x + 1)$ em $\mathbb{Z}_2$. (Lembre-se que os coeficientes também são somados módulo 2).

8.3 Operações com polinômios

8.3.1 Adição e Subtração

As operações de *adição* e *subtração* de polinômios são realizadas **coeficiente a coeficiente** sobre potências iguais. Em $\mathbb{K}[x]$ (com $\mathbb{K}$ um corpo, tipicamente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), tais operações conferem a estrutura de **espaço vetorial** sobre $\mathbb{K}$ (com o polinômio nulo como elemento neutro e o oposto como inverso aditivo).

Definição 8.3.1

Adição e subtração de polinômios são operações realizadas termo a termo, desde que os polinômios sejam escritos na forma reduzida, isto é com termos semelhantes agrupados.

Sejam $p(x)=\sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ e $q(x)=\sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ em $\mathbb{K}[x]$. Define-se:

$$(p+q)(x)=\sum_{k=0}^{\max(m,n)} (a_k+b_k)\,x^k, \qquad (p-q)(x)=\sum_{k=0}^{\max(m,n)} (a_k-b_k)\,x^k,$$

adotando a convenção $a_k=0$ quando $k>m$ e $b_k=0$ quando $k>n$. Em particular, o **oposto** de p é $-p(x)=\sum_{k=0}^{m}(-a_k)x^k$.

Propriedades

Se $p,q,r\in\mathbb{K}[x]$ e $\lambda\in\mathbb{K}$, então:

- **Comutatividade**: $p+q=q+p$.
- **Associatividade**: $(p+q)+r=p+(q+r)$.
- **Neutro aditivo**: $p+0=0+p=p$.
- **Inverso aditivo**: $p+(-p)=0$.
- **Compatibilidade com escalares**: $\lambda(p+q)=\lambda p+\lambda q$ (linearidade).
- **Grau**: $\deg(p+q)\le\max\{\deg p,\deg q\}$ (pode haver cancelamento de termos líderes).

Recomendações práticas

- **Alinhe por potência**: organize os polinômios por ordem decrescente de grau e some/subtraia *apenas* termos com a mesma potência de x.
- **Complete com zeros**: potências ausentes devem ser tratadas como coeficientes iguais a 0.

- **Atenção ao grau**: a subtração pode provocar *cancelamento* do termo líder, reduzindo o grau do resultado.

Exemplo 8.3.1.1: Considerando

$$p(x) = 4x^5 - 3x^3 + 2x - 7 \quad \text{e} \quad q(x) = -x^5 + 5x^4 + x^3 - 2x + 9.$$

Então

$$\begin{aligned} p(x)+q(x) &= (4x^5 - 3x^3 + 2x - 7) + (-x^5 + 5x^4 + x^3 - 2x + 9) \\ &= \underbrace{(4-1)}_{3}x^5 + \underbrace{(0+5)}_{5}x^4 + \underbrace{(-3+1)}_{-2}x^3 + \underbrace{(0+0)}_{0}x^2 + \underbrace{(2-2)}_{0}x + \underbrace{(-7+9)}_{2} \\ &= 3x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 2, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} p(x)-q(x) &= (4x^5 - 3x^3 + 2x - 7) - (-x^5 + 5x^4 + x^3 - 2x + 9) \\ &= \underbrace{(4-(-1))}_{5}x^5 + \underbrace{(0-5)}_{-5}x^4 + \underbrace{(-3-1)}_{-4}x^3 + \underbrace{(0-0)}_{0}x^2 + \underbrace{(2-(-2))}_{4}x + \underbrace{(-7-9)}_{-16} \\ &= 5x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 4x - 16. \end{aligned}$$

A soma/subtração também pode ser efetuada colocando-se os coeficientes ordenados em linhas horizontais respeitando a ordem das potências. Veja o procedimento para a soma:

	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
$p(x)$	4	0	-3	0	2	-7
$q(x)$	-1	5	1	0	-2	9
$p+q$	3	5	-2	0	0	2

Exemplo 8.3.1.2: Suponha duas curvas polinomiais de calibração (ajustes independentes) para um instrumento:

$$C_1(x) = 0{,}8x^2 + 1{,}5x + 0{,}2, \qquad C_2(x) = -0{,}1x^2 + 0{,}3x + 0{,}05.$$

A **combinação** dos modelos por soma fornece

$$C_{\text{sum}}(x) = C_1(x) + C_2(x) = 0{,}7x^2 + 1{,}8x + 0{,}25,$$

ao passo que a **correção** por subtração (removendo viés sistemático) dá

$$C_{\text{corr}}(x) = C_1(x) - C_2(x) = 0{,}9x^2 + 1{,}2x + 0{,}15.$$[1]

[1] Essas operações são rotineiras em *ciências agrárias* para consolidar ou depurar modelos de calibração de sensores.

Exercício 8.3.1

1. Efetue $(2x^4 - 3x^2 + 5) - (x^4 + 4x - 7)$ e simplifique o resultado.
2. Dadas $p(x) = ax^3 + bx + c$ e $q(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x + 4$, encontre $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $p(x) + q(x) = x^2 - 2x + 1$.
3. Em $\mathbb{R}[x]$, seja $r(x) = 4x^5 - 7x + 1$. Mostre que $\deg\big(r(x) - 4x^5\big) < \deg r$ e determine esse grau.

8.3.2 Multiplicação

Definição 8.3.2: Multiplicação de polinômios

Sejam $p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x]$ escritos na forma

$$p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \qquad \text{e} \qquad q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \quad (a_m \neq 0,\ b_n \neq 0 \text{ se } p, q \neq 0).$$

Define-se o produto $p(x)q(x)$ por **convolução de coeficientes**:

$$(pq)(x) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k x^k, \qquad c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i\, b_{k-i},$$

adotando-se $a_i = 0$ para $i > m$ e $b_j = 0$ para $j > n$.

Observação

A multiplicação organiza-se por potências iguais da indeterminada. Em particular:

- multiplicação por monômio x^r desloca os coeficientes: $x^r \cdot p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{i+r}$;
- multiplicação por escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ escala os coeficientes: $\lambda\, p(x) = \sum_{i=0}^{m} (\lambda a_i) x^i$;
- multiplicação por binômio $(x - a)$ combina deslocamento e soma: $(x - a)p(x) = x\,p(x) - a\,p(x)$.

Propriedades: Álgebra e grau do produto

Para $p, q, r \in \mathbb{K}[x]$ e $\lambda \in \mathbb{K}$:

- comutatividade: $pq = qp$;
- associatividade: $(pq)r = p(qr)$;

- distributividade: $p(q+r) = pq + pr$ e $(p+q)r = pr + qr$;
- elemento neutro multiplicativo: $1 \in \mathbb{K} \subset \mathbb{K}[x]$ satisfaz $1 \cdot p = p$;
- ausência de divisores de zero: se $pq = 0$, então $p = 0$ ou $q = 0$ (domínio de integridade quando $\mathbb{K}$ é corpo);
- grau: se $p \neq 0$ e $q \neq 0$, então $\deg(pq) = \deg p + \deg q$ e o coeficiente líder de pq é o produto dos coeficientes líderes de p e q.

Observações: Erros comuns a evitar

- Soma indevida de potências diferentes na etapa de multiplicação (p.ex., confundir $x^2 \cdot x^3$ com x^5 em uma linha e voltar a somá-lo com x^5 já existente sem agrupar coeficientes).
- Omissão de termos de potência ausente (coeficiente 0). Recomenda-se manter o alinhamento por potência.
- Troca de sinais em produtos cruzados quando há termos negativos.

Exemplo 8.3.2.1: Calcular $(2x^3 - x + 3)(x^2 + 4x - 5)$.
Desenvolvimento termo a termo:

$$\begin{aligned}(2x^3 - x + 3)(x^2 + 4x - 5) = {} & 2x^3 \cdot x^2 + 2x^3 \cdot 4x + 2x^3 \cdot (-5) \\ & + (-x) \cdot x^2 + (-x) \cdot 4x + (-x) \cdot (-5) \\ & + 3 \cdot x^2 + 3 \cdot 4x + 3 \cdot (-5).\end{aligned}$$

Agrupando por potência de x:

$$\begin{aligned}&= 2x^5 + 8x^4 - 10x^3 - x^3 - 4x^2 + 5x + 3x^2 + 12x - 15 \\ &= 2x^5 + 8x^4 + (-10-1)x^3 + (-4+3)x^2 + (5+12)x - 15 \\ &= \boxed{2x^5 + 8x^4 - 11x^3 - x^2 + 17x - 15}.\end{aligned}$$

O resultado tem grau $5 = \deg(2x^3 - x + 3) + \deg(x^2 + 4x - 5)$, confirmando a propriedade do grau.

Exemplo 8.3.2.2: Calcular $(x - 3)(x^3 - 2x + 1)$.

Usando da identidade $(x-a)p(x) = x\,p(x) - a\,p(x)$:

$$\begin{aligned}(x-3)(x^3-2x+1) &= x(x^3-2x+1) - 3(x^3-2x+1)\\ &= (x^4-2x^2+x) - (3x^3-6x+3)\\ &= x^4-3x^3-2x^2+(x+6x)-3\\ &= \boxed{x^4-3x^3-2x^2+7x-3}.\end{aligned}$$

Observação: Visualização por "grade" (convolução)

A multiplicação pode ser visualizada como uma *grade de produtos* cujas diagonais somam-se para formar os coeficientes finais. Abaixo, ilustração para $p(x) = 2x^3 - x + 3$ e $q(x) = x^2 + 4x - 5$.

	x^2	$4x$	-5
$2x^3$	$2x^5$	$8x^4$	$-10x^3$
$0x^2$	0	0	0
$-x$	$-x^3$	$-4x^2$	$5x$
3	$3x^2$	$12x$	-15

$x^5:\ 2$
$x^4:\ 0+8=8$
$x^3:\ -1+0-10=-11$
$x^2:\ 3+(-4)+0=-1$
$x^1:\ 12+5=17$
$x^0:\ -15$

A soma ao longo das diagonais (por expoente total) produz os coeficientes de $p \times q$.

Observação: Checagem rápida por avaliação

Uma verificação simples consiste em avaliar ambos os lados em um ponto. Por exemplo, para $x = 1$:

$$\left[(2x^3-x+3)(x^2+4x-5)\right]_{x=1} = (2-1+3)\,(1+4-5) = 4\cdot 0 = 0,$$

coerente com o produto obtido ao substituir $x = 1$ no polinômio resultante.

8.3.3 Divisão

A divisão entre polinômios desempenha um papel central na teoria algébrica e na resolução de equações polinomiais. Os métodos apresentados a seguir permitem determinar quociente e resto, fatorar polinômios, identificar raízes, aplicar o Teorema do Resto e conduzir deduções envolvendo fatores lineares. As técnicas aqui reunidas incluem tanto abordagens algorítmicas quanto interpretações estruturais, essenciais em problemas de

engenharia, física aplicada e computação científica.

Método da chave ou Divisão euclidiana

Definição 8.3.3

Considere $p(x)$, $d(x) \in \mathbb{K}[x]$, com $d(x) \neq 0$. A divisão euclidiana de polinômios consiste em encontrar polinômios $q(x)$ (quociente) e $r(x)$ (resto) tais que

$$p(x) = d(x)\,q(x) + r(x), \qquad \deg r(x) < \deg d(x) \quad \text{ou} \quad r(x) = 0.$$

O *método da chave* corresponde ao procedimento tradicional de divisão euclidiana. Os termos são organizados por ordem decrescente de grau; divide-se o termo líder de $p(x)$ pelo termo líder de $d(x)$, obtém-se o termo líder do quociente e multiplica-se $d(x)$ por esse termo. O produto é subtraído de $p(x)$, reduzindo seu grau, e o processo repete-se até que o resto possua grau inferior ao divisor.

Importante

Potências não presentes devem ser tratadas como coeficientes iguais a zero, de modo a evitar erros de alinhamento.

Perceba que...

A fórmula $p(x) = d(x)\,q(x) + r(x)$ surge do algoritmo de divisão euclidiana:

$$\begin{array}{l|l} p(x) & d(x) \\ \hline r(x) & q(x) \end{array} \longrightarrow p(x) = d(x)\,q(x) + r(x)$$

Exercício resolvido 8.3.3

1. Faça a divisão de $5x^3 + 4x^2 - 3x - 1$ por $-x^2 + 8x - 3$ usando o método da chave.

Resolução:

$$\begin{array}{r|l} 5x^3 + 4x^2 - 3x - 1 & -x^2 + 8x - 3 \\ \cline{2-2} -5x^3 + 40x^2 - 15x & -5x - 44 \\ \cline{1-1} \quad 44x^2 - 18x - 1 & \underbrace{}_{\text{quociente}} \\ \quad -44x^2 + 352x - 132 & \\ \cline{1-1} \quad\quad 334x - 133 & \\ \quad \underbrace{}_{\text{resto}} & \end{array}$$

Passo a passo:

i) Divide-se o termo de maior grau do dividendo ($5x^3$) pelo termo de maior grau do divisor ($-x^2$), obtendo-se o primeiro termo do quociente ($-5x$).

ii) Multiplica-se o termo recém-obtido do quociente ($-5x$) por todos os termos do divisor ($-x^2+8x-3$) e adiciona-se o produto resultante ao dividendo, *trocando-se os sinais*:

iii) Como o resto parcial $44x^2-18x-1$ ainda tem grau maior ou igual ao do divisor, repete-se o processo até que o resto possua grau inferior ao do divisor. No exemplo, o processo final resulta em:

$$R(x)=334x-133, \qquad Q(x)=-5x-44,$$

verificando-se que:

$$\deg(\text{resto})=1<2=\deg(\text{divisor}).$$

2. Encontre $q(x)$ e $r(x)$ resultantes da divisão de

$$\frac{2x^4-5x^2+7}{x^2-1}.$$

Resolução:

$$\begin{array}{r|l} 2x^4+0x^3-5x^2+0x+7 & x^2+0x-1 \\ \cline{2-2} -2x^4+0x^3+2x^2 & \underbrace{2x^2-3}_{q(x)} \\ \cline{1-1} \quad -3x^2+0x+7 & \\ \quad +3x^2+0x-3 & \\ \cline{1-1} \quad \underbrace{4}_{r(x)} & \end{array}$$

$$q(x)=2x^2-3, \quad r(x)=4$$

Verificando: $\deg\left(r(x)\right)=0<2=\deg\left(q(x)\right)$.

Tirando a prova, tem-se que: $\dfrac{2x^4-5x^2+7}{x^2-1}=(2x^2-3)\cdot(x^2-1)+4$.

Decomposição de polinômios como função racional em frações parciais

Esta técnica consiste em reescrever uma função racional

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

como combinação linear de frações parciais associadas aos fatores lineares do denominador, identificando coeficientes desconhecidos a partir de uma identidade polinomial. Para um denominador fatorado, cada termo é reconstruído de forma que o numerador resultante coincida com o numerador original.

A seguir, como exemplo, veja a decomposição da função racional

$$\frac{3x+1}{x^2-5x+6}$$

em somas de frações simples cujos denominadores são os fatores lineares de x^2-5x+6. Como o denominador se fatora em

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3),$$

procura-se constantes M e N tais que

$$\frac{3x+1}{x^2-5x+6}=\frac{M}{x-2}+\frac{N}{x-3}, \qquad x\neq 2,\ x\neq 3.$$

Apresenta-se agora o desenvolvimento usando tais constantes:

a) Igualação dos numeradores

Multiplica-se ambos os lados pelo m.m.c.$(x-2)(x-3)$, donde obtém-se:

$$3x+1=M(x-3)+N(x-2).$$

Expandindo os termos:

$$M(x-3)+N(x-2)=Mx-3M+Nx-2N=(M+N)x+(-3M-2N).$$

Assim, por identidade polinomial vem:

$$\begin{cases} M+N=3, \\ -3M-2N=1. \end{cases}$$

b) Resolução do sistema

Multiplicando a primeira equação por 3:

$$\begin{cases} 3M+3N=9, \\ -3M-2N=1, \end{cases}$$

somando termo a termo:

$$N=10.$$

Substituindo o valor $N=10$ em $M+N=3$, tem-se:

$$M=-7.$$

c) Substituindo $M=-7$ e $N=10$ na identidade dada como fração parcial, tem-se:

$$\therefore \boxed{\frac{3x+1}{x^2-5x+6} = \frac{-7}{x-2} + \frac{10}{x-3}, \quad \text{ou} \quad \frac{3x+1}{(x-2)\cdot(x-3)}.}$$

A prova pode ser feita verificando que:

$$M(x-3)+N(x-2) = -7(x-3)+10(x-2) = (-7x+21)+(10x-20) = 3x+1.$$

Importante

Esta técnica é especialmente valiosa na decomposição de funções racionais, pois transforma uma razão polinomial em uma soma de frações simples, facilitando cálculos posteriores como **integrais**, transformadas ou resolução de **equações diferenciais**[a].

[a] que tal uma pesquisa e uma leitura sobre estes temas destacados.

Método de Descartes

O método de Descartes para a divisão de polinômios tem como objetivo determinar o quociente e o resto reescrevendo o dividendo como uma *combinação linear* do divisor. A técnica baseia-se no fato de que, para polinômios $A(x)$ (dividendo) e $B(x)$ (divisor), vale a identidade:

$$A(x) = B(x)\,Q(x) + R(x),$$

onde $Q(x)$ é o quociente e $R(x)$ é o resto da divisão.

O grau de $Q(x)$ é completamente determinado pela relação

$$\deg(Q) = \deg(A) - \deg(B),$$

e o resto deve satisfazer

$$\deg(R) < \deg(B).$$

Assim, determina-se a forma algébrica geral de $Q(x)$ e de $R(x)$ por meio das condições de grau e, em seguida, substitui-se essas expressões na identidade $A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$. Igualando os coeficientes dos polinômios resultantes, obtêm-se equações que permitem determinar os coeficientes desconhecidos.

Observação

Diferentemente do método da *chave*, que opera passo a passo com cancelamentos sucessivos, o método de Descartes trabalha diretamente com a *identidade de polinômios*, estruturando a divisão como um problema algébrico de determinação de coeficientes.

Exercício resolvido 8.3.3

3. Determinar $Q(x)$ e $R(x)$ na divisão

$$A(x) = 4x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 5x + 6 \qquad \text{por} \qquad B(x) = 2x^2 + x - 3.$$

a) Determinação das formas genéricas:

Como

$$\deg(A) = 4 \quad \text{e} \quad \deg(B) = 2 \quad \Rightarrow \quad \deg(Q) = 4 - 2 = 2.$$

Logo,

$$Q(x) = ax^2 + bx + c.$$

Para o resto:

$$\deg(R) < \deg(B) = 2,$$

de modo que

$$R(x) = dx + e.$$

b) Construção da identidade de polinômios.

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$$

$$4x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 5x + 6 = (2x^2 + x - 3)(ax^2 + bx + c) + (dx + e).$$

Efetuando o produto:

$$(2x^2 + x - 3)(ax^2 + bx + c) = 2ax^4 + (2b + a)x^3 + (2c + b - 3a)x^2 + (b - 3b)x + (-3c).$$

Somando o resto:

$$A(x) = 2ax^4 + (2b + a)x^3 + (2c + b - 3a)x^2 + (b - 3c + d)x + (-3c + e).$$

c) Igualando os coeficientes respectivos das potências:

Comparando com $4x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 5x + 6$, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} 2a = 4, & \longrightarrow a = 2 \\ 2b + a = -7, & \longrightarrow b = -\frac{9}{2} \\ 2c + b - 3a = 2, & \longrightarrow c = \frac{17}{4} \\ b - 3c + d = -5, & \longrightarrow d = \frac{73}{4} \\ -3c + e = 6, & \longrightarrow e = \frac{73}{4} \end{cases}$$

d) Substituindo os coeficientes encontrados em Q e R, tem-se:

$$Q(x) = 2x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{17}{4}, \qquad R(x) = \frac{73}{4}x + \frac{75}{4}.$$

Portanto:

$$4x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 5x + 6 = (2x^2 + x - 3)\left(2x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{17}{4}\right) + \left(\frac{73}{4}x + \frac{75}{4}\right).$$

Teorema do resto

Teorema 8.3.1: Teorema do Resto

Dados $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ e $a \in \mathbb{K}$, o resto da divisão de $p(x)$ por $x - a$ é igual a $p(a)$.

O teorema decorre da forma da divisão euclidiana:

$$p(x) = (x - a)q(x) + r,$$

onde r é constante. Avaliando em $x = a$, obtém-se $p(a) = r$. Veja:

Demonstração. Seja $p(x)$ um polinômio com coeficientes em $\mathbb{K}$ e $a \in \mathbb{K}$. Pelo algoritmo da divisão de polinômios, existem polinômios $q(x)$ (quociente) e $r(x)$ (resto) tais que:

$$p(x) = (x - a) \cdot q(x) + r(x),$$

com $\deg(r(x)) < \deg(x - a) = 1$ ou $r(x) = 0$.

Como $\deg(x - a) = 1$, a condição sobre o grau do resto implica que $r(x)$ deve ser um polinômio de grau zero, ou seja, uma constante. Denotaremos essa constante simplesmente por $r \in \mathbb{K}$.

Reescrevendo a equação com r constante:

$$p(x) = (x - a) \cdot q(x) + r.$$

Avaliando ambos os lados em $x = a$:

$$p(a) = (a-a)\cdot q(a) + r = 0 \cdot q(a) + r = r.$$

Portanto, o resto r da divisão de $p(x)$ por $x-a$ é exatamente $p(a)$. □

Observação

O Teorema do Resto fornece um método eficiente para calcular $p(a)$ sem precisar realizar a divisão polinomial completa. Basta aplicar o dispositivo prático de Briot-Ruffini[a] ou simplesmente substituir x por a no polinômio $p(x)$.

[a] este dispositivo será estudado em seção posterior

Exemplo 8.3.3.1:
O resto da divisão de $p(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x - 5$ por $x+1$ é
$p(-1) = 3(-1)^4 - 2(-1)^3 + 7(-1) - 5 = 3 + 2 - 7 - 5 = \boxed{-7}$.

Teorema de D'Alambert

Teorema 8.3.2: Teorema de D'Alembert (Teorema do Fator)

Um número $a \in \mathbb{K}$ é raiz de $p(x)$ se, e somente se, o binômio $(x-a)$ é um divisor de $p(x)$.

$$p(a) = 0 \iff (x-a) \mid p(x).$$

Demonstração. Seja $p(x)$ um polinômio com coeficientes em $\mathbb{K}$ e $a \in \mathbb{K}$.

(⇒) Suponha que a é raiz de $p(x)$, ou seja, $p(a) = 0$. Pelo algoritmo da divisão de polinômios, existem polinômios $q(x)$ e $r(x)$ tais que:

$$p(x) = (x-a)\cdot q(x) + r(x),$$

onde $\deg(r(x)) < \deg(x-a) = 1$ ou $r(x) = 0$. Portanto, $r(x)$ é constante.

Avaliando em $x = a$:

$$p(a) = (a-a)\cdot q(a) + r(a) = 0 \cdot q(a) + r(a) = r(a).$$

Como $p(a) = 0$, tem-se $r(a) = 0$. Sendo $r(x)$ constante, conclui-se que $r(x) = 0$ para todo x. Logo:

$$p(x) = (x-a)\cdot q(x),$$

ou seja, $(x-a)$ divide $p(x)$.

(⇐) Agora suponha que $(x-a)$ divide $p(x)$. Então existe um polinômio $q(x)$ tal que:

$$p(x) = (x-a)\cdot q(x).$$

Avaliando em $x = a$:

$$p(a) = (a-a)\cdot q(a) = 0 \cdot q(a) = 0.$$

Portanto, a é raiz de $p(x)$.

Assim, a equivalência $p(a) = 0 \Leftrightarrow (x-a) \mid p(x)$ fica demonstrada. □

Observação

Esse resultado, juntamente com o Teorema do Resto, fundamenta o processo de fatoração sucessiva por raízes conhecidas.

Exemplo 8.3.3.2:
Se $p(3) = 0$ para $p(x) = x^3 - 7x + 6$, então $x - 3$ é fator divisor de $p(x)$. Logo, efetuando a divisão, percebe-se que:

$$x^3 - 7x + 6 = (x-3)(x^2 + 3x - 2).$$

Divisão por produto de fatores lineares

Quando todos os fatores lineares $(x-\alpha_1), (x-\alpha_2), \ldots, (x-\alpha_k)$ do divisor são conhecidos, a divisão sucessiva por fatores lineares fornece quociente geral e resto final.

Teorema 8.3.3: Divisão por produto de fatores lineares

Seja $A(x) \in \mathbb{K}[x]$ e sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ com $\alpha \neq \beta$. Se $A(x)$ é divisível por $(x-\alpha)$ e por $(x-\beta)$, então $A(x)$ é divisível pelo produto $(x-\alpha)(x-\beta)$, isto é,

$$(x-\alpha)(x-\beta) \mid A(x).$$

Demonstração. Como $A(x)$ é divisível por $(x-\alpha)$ e por $(x-\beta)$, tem-se

$$A(\alpha) = 0 \qquad \text{e} \qquad A(\beta) = 0.$$

Considere a divisão de $A(x)$ por $(x-\alpha)(x-\beta)$. O resto $R(x)$ possui grau < 2, logo pode ser escrito como

$$R(x) = ax + b, \qquad a, b \in \mathbb{K}.$$

Pela identidade de divisão euclidiana, para algum quociente $Q(x) \in \mathbb{K}[x]$,

$$A(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\,Q(x) + R(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\,Q(x) + ax + b.$$

Avaliando em $x = \alpha$ e em $x = \beta$:

$$A(\alpha) = 0 \cdot (\alpha-\beta)\,Q(\alpha) + a\alpha + b = a\alpha + b = 0,$$

$$A(\beta) = (\beta - \alpha)\cdot 0 \cdot Q(\beta) + a\beta + b = a\beta + b = 0.$$

Subtraindo as duas equações,

$$(a\alpha + b) - (a\beta + b) = a(\alpha - \beta) = 0.$$

Como $\alpha \neq \beta$, conclui-se $a = 0$, e então $b = 0$ pelas igualdades acima. Logo $R(x) = 0$, isto é, o resto da divisão por $(x-\alpha)(x-\beta)$ é nulo. Segue que $(x-\alpha)(x-\beta) \mid A(x)$. □

Observação

Generalização direta: se $A(\alpha_j) = 0$ para $j = 1, \ldots, n$, com $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *distintos*, então

$$\prod_{j=1}^{n} (x - \alpha_j) \mid A(x).$$

A demonstração procede por indução em n ou, alternativamente, repetindo o argumento acima com resto de grau $< n$ e comparando valores em $x = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ para concluir que todos os coeficientes do resto são nulos.

Propriedades

Seja o divisor

$$D(x) = \prod_{j=1}^{k} (x - a_j),$$

e $p(x) \in \mathbb{K}[x]$. Realizando divisões sucessivas de $p(x)$ por $(x - a_j)$, o resto final após a divisão por $D(x)$ coincide com o resto da divisão por todos os fatores simultaneamente.

Exemplo 8.3.3.3:
Considere a divisão de $p(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + x - 3$ por $(x-1)(x-3)$.
Para verificar que $p(x)$ é divisível pelo produto $(x-1)(x-3)$ basta verificar se e ele é divisível separadamente pelo fatores, assim, pelo teorema de D'Alambert:

$$p(1) = 1 - 5 + 6 + 1 - 3 = 0, \qquad p(3) = 81 - 135 + 54 + 3 - 3 = 0.$$

Logo, pelo teorema da divisão por produto de fatores lineares, $p(x)$ é divisível por $(x-1)\cdot(x-3)$

Dispositivo de Briot-Ruffini

O dispositivo de Briot—Ruffini reorganiza a divisão por $(x-a)$ em formato tabular. Trata-se de uma forma compacta de aplicar o Teorema do Resto e o método de Descartes simultaneamente.

Definição 8.3.4

Para dividir

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \text{por} \quad (x-a),$$

dispõe-se os coeficientes em linha e executam-se multiplicações e somas sucessivas com a. O último número gerado corresponde ao resto, e os demais formam o quociente.

Dispositivo ou algoritmo prático de Briot–Ruffini

Raiz do divisor	Coeficientes do dividendo $p(x)$	Termo constante do dividendo $p(x)$
	Coeficientes do quociente $q(x)$	Resto $r(x)$

Exemplo 8.3.3.4:

A divisão

$$p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 \quad \text{por} \quad (x-2).$$

2	2	−3	4	−5
	2	1	6	7

pelo dispositivo prático de Briot–Ruffini é realizada conforme os passos a seguir.

i) Determina-se a raiz do binômio divisor:

Para o divisor $(x-2)$, a raiz é $a = 2$, a qual é disposta à esquerda do dispositivo.

ii) Disposição dos coeficientes do dividendo:

À direita, dispõem-se em ordem decrescente de expoente todos os coeficientes do polinômio $p(x)$:

$$2,\ -3,\ 4,\ -5$$

correspondentes, respectivamente, aos termos $2x^3$, $-3x^2$, $4x$ e -5.

iii) Abaixa-se o primeiro coeficiente:

Abaixa-se o coeficiente 2 para a linha inferior do dispositivo:

2	2	−3	4	−5
	2			

↓ abaixado

iv) Multiplica-se pela raiz e soma-se ao coeficiente seguinte:

Multiplica-se o valor abaixado (2) pela raiz (2), obtendo 4, e soma-se ao segundo coeficiente (-3):

$$4 + (-3) = 1$$

Registra-se o resultado na linha inferior:

2	2	-3	4		-5
	2	1			

v) Repete-se o processo:
Multiplica-se o último resultado (1) pela raiz (2), obtendo 2, e soma-se ao terceiro coeficiente (4):

$$2+4=6$$

2	2	-3	4		-5
	2	1	6		

vi) Finaliza-se com o último coeficiente:
Multiplica-se o valor obtido (6) pela raiz (2), resultando em 12, e adiciona-se ao último coeficiente (-5):

$$12+(-5)=7$$

Completando o dispositivo:

2	2	-3	4		-5
	2	1	6		7

Os três primeiros valores da linha inferior $(2,1,6)$ correspondem aos coeficientes do polinômio quociente $q(x)$, enquanto o último valor (7) representa o resto da divisão $r(x)$.

Portanto,

$$p(x)=\underbrace{(x-2)}_{\text{divisor}}\underbrace{(2x^2+x+6)}_{\text{quociente}}+\underbrace{7}_{\text{resto}}.$$

Observação

O grau do polinômio quociente é sempre uma unidade inferior ao grau do dividendo.

Exercício 8.3

1. Álgebra Fundamental - Dados os polinômios $A(x)=3x^4-2x^2+5x-1$, $B(x)=-x^4+2x^3+2x^2+3$ e $C(x)=x^3-3x+2$, calcule o polinômio resultante $P(x)=A(x)-(B(x)+C(x))$ e determine seu grau.

2. Engenharia de Produção / Modelagem de Custo e Receita - A receita da venda de um produto é modelada pelo polinômio $R(x)=-2x^2+100x$, e o custo de produção é $C(x)=x^2+10x+300$, onde x é o número

de unidades vendidas. O lucro, $L(x)$, é a diferença entre a receita e o custo. Determine o polinômio que modela o lucro.

3. Teorema do Resto - Um sistema de controle é descrito pelo polinômio de estado $P(t) = t^5 - 3t^4 + 2t^2 - 8$. O comportamento do sistema em um instante crítico $t = 2$ é fundamental para a análise de estabilidade. Sem efetuar a divisão, determine qual seria o resto da divisão de $P(t)$ pelo binômio $(t-2)$.

4. Teorema de D'Alembert - Determine o valor da constante k para que o polinômio $P(x) = x^3 + kx^2 - 4x + 4$ seja divisível por $(x+2)$.

5. Dispositivo de Briot-Ruffini - Utilize o dispositivo prático de Briot-Ruffini para encontrar o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$ da divisão do polinômio $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + x - 7$ por $D(x) = x - 3$.

6. Divisão por Produto de Fatores - Determine os valores das constantes a e b para que o polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ seja divisível pelo produto $(x-1)(x-2)$.

7. Método de Descartes - Use o método dos coeficientes a determinar (Método de Descartes) para encontrar o quociente e o resto da divisão de $A(x) = x^4 + 3x^3 - 2x + 1$ por $B(x) = x^2 + x - 1$.

8. Engenharia Agronômica / Otimização de Produção - A produção $P(n)$ de uma cultura, em toneladas por hectare, em função da quantidade de nitrogênio n aplicada (em kg/ha), é modelada por $P(n) = -0.001n^3 + 0.1n^2$. O custo da aplicação é $C(n) = 10n$. O lucro líquido é $L(n) = 1000 \cdot P(n) - C(n)$. Se sabe-se que um nível de aplicação $n = 10$ kg/ha resulta em um lucro de R$ 8.900,00, qual o resto da divisão de $L(n)$ por $(n-10)$?

9. Cálculo e Frações Parciais - Em Cálculo Integral, para integrar a função racional $f(x) = \frac{5x-7}{x^2-3x+2}$, é necessário decompô-la em frações parciais. Sabendo que $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, determine as constantes A e B na identidade:

$$\frac{5x-7}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

10. Processamento de Sinais / Convolução - Em processamento de sinais, a saída de um filtro digital é a convolução do sinal de entrada com a resposta ao impulso do filtro. Matematicamente, isso corresponde à multiplicação de polinômios. Se um sinal de entrada é representado por $I(x) = 2x^2 + 3x + 1$ e a resposta do filtro é $H(x) = x - 1$, determine o sinal de saída $S(x) = I(x) \cdot H(x)$.

8.4 Equações Polinomiais

8.4.1 Definição

Definição 8.4.1

Uma **equação polinomial** (ou **equação algébrica**) é uma equação da forma

$$p(x) = 0,$$

em que $p(x)$ é um polinômio com coeficientes em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Quando $\deg(p) = n$, diz-se que a equação possui *grau n*.
Assim, resolver uma equação polinomial consiste em obter os valores de x que satisfazem $p(x) = 0$.

Exemplo 8.4.1.1:

$$3x^4 - 2x^2 + 7 = 0, \qquad x^3 - x - 1 = 0, \qquad x^2 + 4x + 5 = 0$$

são equações polinomiais de graus 4, 3 e 2, respectivamente.

8.4.2 Raiz ou zero

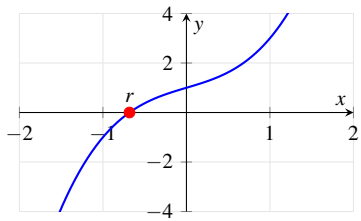
Definição 8.4.2

Um número real (ou complexo) r é chamado **raiz**, **zero** ou **solução** do polinômio $p(x)$ se

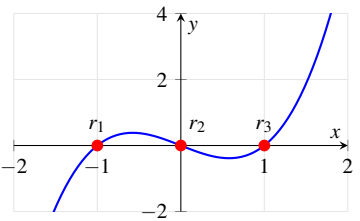
$$p(r) = 0.$$

Equivalentemente, $x - r$ é fator de $p(x)$.

Raiz real única



Três raízes reais distintas



8.4.3 Conjunto solução

Em uma equação polinomial $p(x) = 0$, o interesse central está no conjunto de todos os valores que a satisfazem. Esse conjunto pode ser considerado em diferentes universos numéricos (por exemplo, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), o que altera a descrição e, em alguns casos, a própria cardinalidade do conjunto obtido.

Definição 8.4.3

Seja $p(x)$ um polinômio e considere a equação polinomial

$$p(x) = 0.$$

Fixado um conjunto universo U (tipicamente $U = \mathbb{R}$ ou $U = \mathbb{C}$), define-se o **conjunto solução ou conjunto verdade em** U por

$$S_U(p) = \{\, x \in U : \; p(x) = 0 \,\}.$$

Os elementos de $S_U(p)$ são as **raízes** (ou **zeros**) de p em U.

Observação

1 Se $U_1 \subseteq U_2$, então $S_{U_1}(p) \subseteq S_{U_2}(p)$.

2 A notação $S_{\mathbb{R}}(p)$ destaca as soluções reais (quando existirem) e $S_{\mathbb{C}}(p)$ inclui também as soluções complexas.

3 Ao trabalhar em $\mathbb{C}$, cada raiz é contada com sua multiplicidade apenas quando indicado explicitamente; o conjunto solução, por definição, lista valores distintos.

Exercício resolvido 8.4.3

1. Considere a equação polinomial

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Fatora-se

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3).$$

Logo,

$$\boxed{S_{\mathbb{R}}(p) = \{2,3\}} \qquad \text{e} \qquad \boxed{S_{\mathbb{C}}(p) = \{2,3\}}.$$

2. Considere a equação polinomial

$$x^2 + 1 = 0.$$

Em $\mathbb{R}$, não existe x tal que $x^2 = -1$, portanto

$$S_{\mathbb{R}}(p) = \varnothing.$$

Em $\mathbb{C}$, tem-se $x^2+1=(x-i)(x+i)$.

Logo,

$$\boxed{S_{\mathbb{C}}(p)=\{i,-i\}}.$$

3. Considere as equações polinomiais abaixo e determine seus conjuntos solução em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$.

(a) $x^3-4x=0$;

(b) $(x-1)^2(x+2)=0$.

Resolução:

(a) Tem-se $x^3-4x=x(x^2-4)=x(x-2)(x+2)$. Assim,

$$\boxed{S_{\mathbb{R}}(p)=\{-2,0,2\}} \qquad \text{e} \qquad \boxed{S_{\mathbb{C}}(p)=\{-2,0,2\}}.$$

(b) A equação $(x-1)^2(x+2)=0$ é satisfeita quando $x-1=0$ ou $x+2=0$. Logo,

$$\boxed{S_{\mathbb{R}}(p)=\{1,-2\}} \qquad \text{e} \qquad \boxed{S_{\mathbb{C}}(p)=\{1,-2\}}.$$

Observa-se que $x=1$ é raiz de multiplicidade 2, mas aparece uma única vez no conjunto solução.

4. (Faap-SP) Resolva a equação:

$$x^3-x^2-x+1=0.$$

Resolução: Agrupando termos,

$$x^3-x^2-x+1=x^2(x-1)-1(x-1)=(x^2-1)(x-1).$$

Como $x^2-1=(x-1)(x+1)$, obtém-se $x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$. Assim,

$$(x-1)^2(x+1)=0 \implies x=1 \text{ (com multiplicidade 2)} \quad \text{ou} \quad x=-1.$$

Logo, o conjunto solução em $\mathbb{R}$ é

$$\boxed{S_{\mathbb{R}}=\{-1,1\}}.$$

5. (Unifor-CE) Resolver a equação:

$$(x^3-4x)\,(3x^2-2x+1)=0.$$

Resolução: Pela propriedade do produto nulo, tem-se:

$$x^3-4x=0 \quad \text{ou} \quad 3x^2-2x+1=0.$$

Para $x^3 - 4x = 0$, fatorando:

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2),$$

logo

$$x \in \{-2, 0, 2\}.$$

Para $3x^2 - 2x + 1 = 0$, calcula-se o discriminante:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4 - 12 = -8 < 0.$$

Portanto, essa equação não possui solução real.

Assim, o conjunto solução em $\mathbb{R}$ é

$$\boxed{S_{\mathbb{R}} = \{-2, 0, 2\}}.$$

6. (Unicamp-SP) Para resolver equações do tipo

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0,$$

pode-se proceder do seguinte modo: como $x = 0$ não é uma raiz, divide-se a equação por x^2 e, após fazer a mudança de variáveis $u = x + \frac{1}{x}$, resolve-se a equação obtida (na variável u). Observe que, se $x \in \mathbb{R}$ e $x > 0$, então $u \geq 2$.

(a) Ache as 4 raízes da equação $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$.

(b) Encontre os valores de $b \in \mathbb{R}$ para os quais a equação

$$x^4 - 3x^3 + bx^2 - 3x + 1 = 0$$

tem pelo menos uma raiz real positiva.

Resolução:

(a) Como $x \neq 0$, divide-se por x^2:

$$x^2 - 3x + 4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Agrupando,

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0.$$

Fazendo a mudança $u = x + \dfrac{1}{x}$ e usando a identidade

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = u^2 - 2,$$

obtém-se a equação em u:

$$(u^2-2)-3u+4=0 \iff u^2-3u+2=0 \iff (u-1)(u-2)=0.$$

Logo,

$$u=1 \quad \text{ou} \quad u=2.$$

Para cada valor de u, resolve-se

$$x+\frac{1}{x}=u \iff x^2-ux+1=0.$$

Se $u=1$:

$$x^2-x+1=0 \quad \Rightarrow \quad \Delta=1-4=-3<0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Se $u=2$:

$$x^2-2x+1=0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=1 \text{ (raiz dupla)}.$$

Portanto, as quatro raízes (contadas com multiplicidade) são:

$$\boxed{x=1 \text{ (multiplicidade 2)}, \qquad x=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \qquad x=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}.$$

(b) Para $x\neq 0$, divide-se por x^2 e repete-se o procedimento:

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+b=0.$$

Com $u=x+\dfrac{1}{x}$ e $x^2+\dfrac{1}{x^2}=u^2-2$, obtém-se

$$(u^2-2)-3u+b=0 \iff u^2-3u+(b-2)=0.$$

Para existir ao menos uma raiz real positiva $x>0$, é necessário que exista solução real u dessa equação com $u\geq 2$, pois para $x\in\mathbb{R}$ e $x>0$ vale $u=x+\dfrac{1}{x}\geq 2$.
A equação em u tem raízes reais se, e somente se, seu discriminante for não negativo:

$$\Delta_u=(-3)^2-4\cdot 1\cdot(b-2)=9-4b+8=17-4b\geq 0 \iff b\leq \frac{17}{4}.$$

Além disso, deve existir pelo menos uma raiz u com $u\geq 2$. As raízes são

$$u=\frac{3\pm\sqrt{17-4b}}{2}.$$

A maior delas é

$$u_{\max} = \frac{3+\sqrt{17-4b}}{2}.$$

A condição $u_{\max} \geq 2$ equivale a

$$\frac{3+\sqrt{17-4b}}{2} \geq 2 \iff \sqrt{17-4b} \geq 1 \iff 17-4b \geq 1 \iff b \leq 4.$$

Portanto, a equação possui pelo menos uma raiz real positiva se, e somente se, $\boxed{b \leq 4}$.

8.4.4 O Teorema Fundamental da Álgebra

O estudo das equações polinomiais culmina em um dos resultados mais importantes de toda a Matemática: o **Teorema Fundamental da Álgebra**. Esse teorema estabelece a estrutura completa das raízes de um polinômio de grau $n \geq 1$, assegurando que todo polinômio não constante admite solução no conjunto dos números complexos. Além disso, ele garante que o número de raízes — contadas com multiplicidades — é exatamente igual ao grau do polinômio.

Teorema 8.4.1: Teorema fundamental da álgebra

Todo polinômio não constante

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0,$$

com coeficientes reais ou complexos, admite pelo menos uma raiz em $\mathbb{C}$. Em particular, ele se fatoriza completamente em $\mathbb{C}$:

$$p(x) = a_n(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n),$$

onde $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{C}$ são as raízes, contadas com multiplicidades.

Perceba que...

- O teorema não descreve *como* encontrar as raízes, apenas garante sua existência.
- Se os coeficientes são reais, raízes complexas não reais surgem em **pares conjugados**: se $a+bi$ é raiz, então $a-bi$ também é.

Observação

Esse resultado é fundamental em Análise, Álgebra e Métodos Numéricos, pois justifica a busca de raízes reais e complexas e garante que nenhuma será omitida.

Exemplo 8.4.4:
Considere o polinômio

$$p(x) = x^4 - 5x^2 + 6.$$

Por fatoração algébrica:

$$p(x) = x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2 - 2)(x^2 - 3).$$

Assim, as raízes são:

$$x = \pm\sqrt{2}, \qquad x = \pm\sqrt{3}.$$

O Teorema Fundamental da Álgebra garante que existem exatamente 4 raízes (complexas), e de fato o polinômio se decompõe em quatro fatores lineares:

$$p(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}).$$

Interpretação geométrica

Se p tem grau n, seu gráfico associado (quando $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) pode ter entre 0 e n interseções reais com o eixo x, mas necessariamente possui exatamente n raízes complexas contando multiplicidade. As raízes reais aparecem como interseções com o eixo x; já raízes complexas não reais não aparecem como pontos visíveis no gráfico real, mas estão presentes na fatoração do polinômio.

Exercício resolvido 8.4.4

Considere o polinômio

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2.$$

1. Identifique uma raiz real.
Resolução:
Por inspeção,

$$p(2) = (2)^3 - 2(2)^2 + (2) - 2 = 8 - 8 + 2 - 2 = 0,$$

logo $x = 2$ é raiz real de p. Pelo Teorema de D'Alembert, $(x-2)$ é fator de $p(x)$.

2. Divida $p(x)$ por $(x-2)$.
Resolução:
Utilizando o método de Briot–Ruffini:

2	1	−2	1	−2
	1	0	1	0

Assim,

$$p(x) = (x-2)(x^2+1).$$

3. Exponha todas as raízes do polinômio e esboce o gráfico do módulo.
Resolução:

As raízes restantes, são complexas, e são obtidas pela solução de

$$x^2 + 1 = 0.$$

via fórmula de Bháskara
O discriminante:

$$\Delta = 0^2 - 4(1)(1) = 0 - 4 = -4.$$

Portanto, as raízes complexas são:

$$x = \frac{\pm\sqrt{-4}}{2} = \frac{\pm 2i}{2} = \pm i.$$

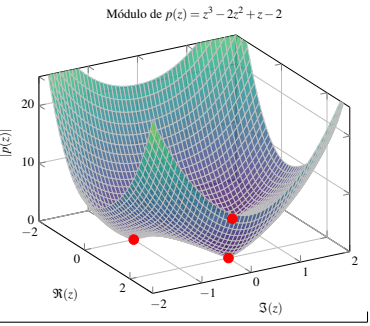
Logo, as três raízes de $p(x)$ são:

$$\boxed{r_1 = 2, \qquad r_2 = i, \qquad r_3 = -i.}$$

Assim,

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x-2)(x-i)(x+i).$$

Este polinômio apresenta exatamente uma raiz real (2) e duas raízes complexas conjugadas (i e $-i$), em perfeita conformidade com o **Teorema Fundamental da Álgebra**: o polinômio de grau 3 possui exatamente três raízes no plano complexo, e se os coeficientes são reais, as raízes complexas aparecem aos pares conjugados.



8.4.5 Teorema da decomposição

O Teorema Fundamental da Álgebra garante a existência de raízes complexas para todo polinômio não constante. O **Teorema da decomposição** explicita como essas raízes se traduzem em uma fatoração do polinômio, permitindo transformar o problema de resolver a equação algébrica $p(x) = 0$ em um problema de fatoração.

Teorema 8.4.2: Teorema da decomposição em $\mathbb{C}$

Seja $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ um polinômio não constante, de grau $n \geq 1$.
Então existem $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{C}$ (contados com multiplicidades) tais que

$$p(x) = a_n (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n), \qquad a_n \neq 0.$$

Em particular,

$$p(\alpha) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-\alpha) \text{ é fator de } p(x).$$

Demonstração. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, o polinômio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

tem pelo menos uma raiz.
Seja r_1 uma raiz de $P(x)$. Então $P(r_1) = 0$ e $P(x)$ são divisível por $(x - r_1)$, i.e., existe um polinômio $Q_1(x)$ tal que

$$P(x) = (x - r_1)\, Q_1(x).$$

O grau de $Q_1(x)$ é $n-1$. Novamente pelo Teorema Fundamental da Álgebra, $Q_1(x)$ tem pelo menos uma raiz; seja r_2 uma raiz de $Q_1(x)$. Assim, $Q_1(r_2) = 0$ e $Q_1(x)$ são divisíveis por $(x - r_2)$, de modo que existe $Q_2(x)$ tal que

$$Q_1(x) = (x - r_2)\, Q_2(x).$$

Prosseguindo do mesmo modo, obtém-se sucessivamente

$$Q_{k-1}(x) = (x - r_k)\, Q_k(x), \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

onde, na etapa $k = n$, o polinômio $Q_n(x)$ tem grau zero e, portanto, é constante. Além disso, essa constante é a_n. Substituindo todas as decomposições em $P(x)$, tem-se que

$$P(x) = a_n\,(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n).$$

□

Observação

A equivalência $p(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (x-\alpha) \mid p(x)$ é o elo conceitual entre *raízes* e *fatores lineares*. Ela será essencial nas subseções sobre multiplicidade de raízes, relações de Girard e raízes racionais.

Teorema 8.4.3: Decomposição em $\mathbb{R}$

Se $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, então $p(x)$ pode ser fatorado em $\mathbb{R}$ como produto de fatores lineares reais e fatores quadráticos reais irredutíveis. Mais precisamente, existem números reais $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{R}$ e pares (a_j, b_j) com $b_j \neq 0$ tais que

$$p(x) = a_n \prod_{i=1}^{k} (x - r_i) \prod_{j=1}^{m} \Big(x^2 - 2a_j x + (a_j^2 + b_j^2) \Big).$$

Observação

Os fatores quadráticos surgem ao agrupar pares de raízes complexas conjugadas: sendo $\alpha = a + bi$ raiz de um polinômio real, então $\overline{\alpha} = a - bi$ também é raiz, e

$$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = x^2 - 2ax + (a^2+b^2) \in \mathbb{R}[x].$$

Exercício resolvido 8.4.5

1. Resolva a equação algébrica

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0.$$

Resolução:

Agrupando termos:

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = x^2(x-2) + 1(x-2) = (x-2)(x^2+1).$$

Logo,

$$p(x) = (x-2)(x^2+1) = (x-2)(x-i)(x+i).$$

Assim, as raízes (em $\mathbb{C}$) são:

$$\boxed{x = 2, \quad x = i, \quad x = -i.}$$

Em $\mathbb{R}$, a única raiz real é $x = 2$.

2. Mostre que $x = -1$ é raiz de $q(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$ e decomponha $q(x)$.

Resolução:

Verificando:

$$q(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 2(-1) + 2 = -1 - 1 + 2 + 2 = 2 \neq 0,$$

logo -1 *não* é raiz.

Por outro lado, testando $x = 1$:

$$q(1) = 1 - 1 - 2 + 2 = 0,$$

portanto $x = 1$ é raiz e $(x-1)$ é fator. Fazendo a divisão,

$$q(x) = (x-1)(x^2-2).$$

Assim, as raízes são

$$\boxed{x = 1, \quad x = \sqrt{2}, \quad x = -\sqrt{2}.}$$

Exercício 8.4.5

1. Fatore e determine as raízes em $\mathbb{C}$:
$$p(x) = x^4 + 1.$$
(Sugestão: use pares conjugados e fatoração em quadráticos reais.)

2. Decomponha em fatores reais e determine as raízes:
$$q(x) = x^4 - 5x^2 + 6.$$

3. Verifique quais dos valores abaixo são raízes de
$$r(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12: \quad x \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}.$$
Em seguida, decomponha $r(x)$ completamente.

4. Mostre que, se $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ e $a + bi$ $(b \neq 0)$ é raiz, então
$$x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$$
é fator de $p(x)$ em $\mathbb{R}[x]$.

8.4.6 Relações de Girard

As **Relações de Girard** (também conhecidas como *fórmulas de Viète*) conectam, de forma direta, os **coeficientes** de um polinômio com as **somatórias e produtos** de suas raízes. Elas são particularmente úteis em equações polinomiais porque permitem:

- verificar rapidamente os resultados de fatorações e divisões;
- construir polinômios a partir de informações sobre as raízes;
- deduzir propriedades das soluções (sinal, módulo, simetrias), mesmo sem calcular explicitamente todas as raízes.

Teorema 8.4.4: Relações de Girard (forma geral)

Seja
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0,$$

e suponha que p se fatorize em $\mathbb{C}$ como

$$p(x) = a_n \prod_{k=1}^{n} (x - r_k),$$

onde $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{C}$ são as raízes de $p(x) = 0$, contadas com multiplicidades. Então:

$$\sum_{k=1}^{n} r_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$\sum_{1 \le i < j \le n} r_i r_j = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$\sum_{1 \le i < j < \ell \le n} r_i r_j r_\ell = -\frac{a_{n-3}}{a_n},$$

$$\vdots$$

$$\prod_{k=1}^{n} r_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Demonstração. Considere a fatoração

$$p(x) = a_n \prod_{k=1}^{n} (x - r_k).$$

Ao expandir o produto, obtém-se um polinômio monômio a monômio em que:

- o coeficiente de x^{n-1} é $-a_n(r_1 + \cdots + r_n)$, pois surge ao escolher $(-r_k)$ de exatamente um fator e x dos demais;
- o coeficiente de x^{n-2} é $a_n \sum_{i<j} r_i r_j$, pois surge ao escolher $(-r_i)(-r_j)$ de dois fatores e x dos demais;
- em geral, o coeficiente de x^{n-m} é $a_n(-1)^m$ vezes a soma de todos os produtos de m raízes distintas;
- o termo constante é $a_n(-1)^n r_1 r_2 \cdots r_n$.

Comparando, por igualdade de polinômios, esses coeficientes com os de

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

obtêm-se as igualdades anunciadas. □

Perceba que...

As Relações de Girard valem em $\mathbb{C}$ e, portanto, continuam corretas mesmo quando o polinômio possui raízes complexas não reais. Se os coeficientes de p são reais, as raízes complexas não reais aparecem em pares conjugados, o que implica que as somas e produtos simétricos nas raízes são números reais.

Casos particulares para polinômios de graus 2 e 3

Para

$$p(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0),$$

com raízes r_1, r_2, vale

- $r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a}$,
- $r_1 r_2 = \dfrac{c}{a}$.

Para

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0),$$

com raízes r_1, r_2, r_3, vale

- $r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a}$,
- $r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = \frac{c}{a}$,
- $r_1 r_2 r_3 = -\frac{d}{a}$.

Exercício resolvido 8.4.6

1. Calcule e verifique as relações de Girard para $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$.

Resolução:

Pelas Relações de Girard (grau 3), se r_1, r_2, r_3 são as raízes, então

- $r_1 + r_2 + r_3 = 2$,
- $r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = 1$,
- $r_1 r_2 r_3 = 2$.

Como $p(x) = (x-2)(x-i)(x+i)$, as raízes são 2, i e $-i$.

Verifica-se:

- $2 + i + (-i) = 2$,
- $2 \cdot i + 2 \cdot (-i) + i \cdot (-i) = 0 + 1 = 1$,
- $2 \cdot i \cdot (-i) = 2 \cdot (1) = 2$.

Logo, as Relações de Girard confirmam a fatoração e os coeficientes do polinômio.

2. Construa um polinômio mônico de grau 3 cujas raízes sejam 1, -2 e 3.

Resolução:

Pelas Relações de Girard para polinômio mônico x^3+bx^2+cx+d:

$$r_1+r_2+r_3=-b, \qquad r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3=c, \qquad r_1r_2r_3=-d.$$

Calculando:

$$r_1+r_2+r_3=1-2+3=2\Rightarrow b=-2,$$

$$r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3=(1)(-2)+(1)(3)+(-2)(3)=-2+3-6=-5\Rightarrow c=-5,$$

$$r_1r_2r_3=(1)(-2)(3)=-6\Rightarrow d=6.$$

Logo,

$$\boxed{p(x)=x^3-2x^2-5x+6}.$$

Importante

Em muitos problemas, conhecer combinações simétricas das raízes (soma, soma de produtos, produto) é suficiente para:

- obter coeficientes de polinômios sem fatoração explícita;
- conferir resultados de divisões e fatorações;
- reduzir o esforço algébrico em exercícios de engenharia que envolvem modelos polinomiais.

Exercício 8.4.6

1. Seja $p(x)=x^3+ax^2+bx+6$ com raízes 1, 2 e 3. Determine a e b.
2. Sabendo que r_1, r_2 são raízes de $2x^2-5x+k=0$ e que $r_1r_2=3$, determine k.
3. Se $p(x)=x^3-4x^2+px+q$ possui raízes 1, 1 e 2, determine p e q e identifique a multiplicidade das raízes.

8.4.7 Multiplicidade de uma raiz

A noção de **multiplicidade** descreve "quantas vezes" uma raiz aparece como fator linear de um polinômio. Esse conceito é central para compreender (i) a fatoração algébrica, (ii) o comportamento do gráfico nas proximidades das raízes reais e (iii) a sensibilidade numérica na aproximação de raízes (raízes múltiplas tendem a ser mais difíceis de localizar e refinar numericamente).

Definição 8.4.4: Multiplicidade de uma raiz

Seja $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, e seja $r \in \mathbb{K}$. Diz-se que r é uma **raiz de multiplicidade** $m \in \mathbb{N}$ de p se

$$p(x) = (x-r)^m q(x),$$

onde $q(x) \in \mathbb{K}[x]$ e $q(r) \neq 0$. Nesse caso, m é o maior inteiro para o qual $(x-r)^m$ divide $p(x)$.

Perceba que...

- $m = 1$ caracteriza uma **raiz simples**.
- $m \geq 2$ caracteriza uma **raiz múltipla**.
- Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, a soma das multiplicidades de todas as raízes (em $\mathbb{C}$) é igual ao grau do polinômio.

Propriedade: Efeito no gráfico para raízes reais

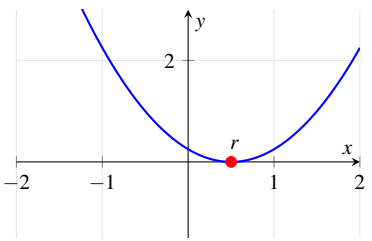
Se $r \in \mathbb{R}$ é raiz de multiplicidade m de $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, então:

- se m é **ímpar**, o gráfico de $y = p(x)$ **cruza** o eixo x em $x = r$;
- se m é **par**, o gráfico de $y = p(x)$ **tangencia** o eixo x em $x = r$ (“encosta e volta”).

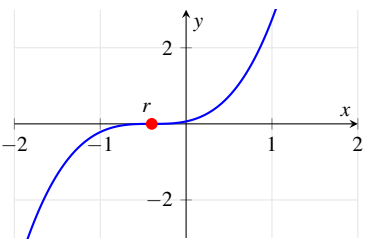
Observação

A explicação é local: perto de r, vale $p(x) = (x-r)^m q(x)$ com $q(r) \neq 0$ e, portanto, o sinal de $p(x)$ é governado principalmente por $(x-r)^m$. Se m é par, $(x-r)^m \geq 0$ em ambos os lados; se m é ímpar, o sinal muda ao atravessar r.

Raiz dupla (tangência)



Raiz tripla (cruzamento “achatado”)



Exemplo 8.4.7: Considere

$$p(x) = (x-1)(x+2)^2(x-3)^3.$$

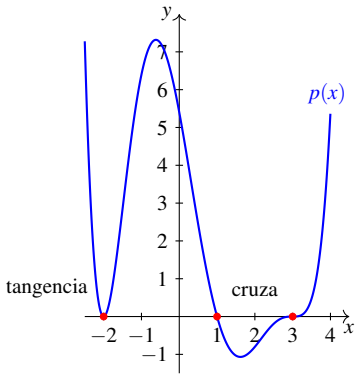
As raízes e multiplicidades são:

$x = 1$ (multiplicidade 1),

$x = -2$ (multiplicidade 2),

$x = 3$ (multiplicidade 3).

Em particular, o gráfico cruza o eixo x em $x = 1$ e $x = 3$ (multiplicidades ímpares) e tangencia em $x = -2$ (multiplicidade par).



Observação: Relação com métodos numéricos

Raízes múltiplas tendem a reduzir a eficiência de métodos iterativos clássicos. Por exemplo, em métodos do tipo Newton, quando r tem multiplicidade $m \geq 2$, a convergência pode deixar de ser quadrática e tornar-se apenas linear, a menos que se aplique uma correção específica que use a multiplicidade.

Exercício 8.4.7

1. Determine as raízes reais e suas multiplicidades em:

$$p(x) = (x-2)^4(x+1)^3(x^2+1).$$

   Em seguida, descreva o comportamento do gráfico nos pontos $x = 2$ e $x = -1$.

2. Sabe-se que $x = 2$ é uma raiz do polinômio $P(x) = x^4 - 4x^3 + 16x - 16$. Determine a multiplicidade dessa raiz utilizando divisões sucessivas.

8.4.8 Teorema das raízes complexas

O Teorema Fundamental da Álgebra garante que todo polinômio não constante possui raízes em $\mathbb{C}$. Quando os coeficientes do polinômio são reais, existe ainda uma estrutura adicional: raízes complexas não reais aparecem necessariamente em pares conjugados. Esse resultado é conhecido como **Teorema das raízes complexas** (ou **Teorema do conjugado**).

Teorema 8.4.5: Teorema das raízes complexas (pares conjugados)

Seja $p(x) \in \mathbb{R}[x]$. Se $\alpha = a + bi$ é raiz de $p(x) = 0$, com $b \neq 0$, então o conjugado $\overline{\alpha} = a - bi$ também é raiz. Em particular, as raízes não reais de p ocorrem em pares conjugados.

Demonstração. Escreva $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$, com $c_k \in \mathbb{R}$. Usando as propriedades do conjugado complexo, tem-se

$$\overline{p(\alpha)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} c_k \alpha^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{c_k}\,\overline{\alpha^k} = \sum_{k=0}^{n} c_k\,\overline{\alpha}^k = p(\overline{\alpha}),$$

pois $\overline{c_k} = c_k$ (coeficientes reais) e $\overline{\alpha^k} = \overline{\alpha}^k$. Se α é raiz, então $p(\alpha) = 0$, logo $\overline{p(\alpha)} = \overline{0} = 0$ e, portanto,

$$p(\overline{\alpha}) = \overline{p(\alpha)} = 0.$$

Conclui-se que $\overline{\alpha}$ também é raiz. □

Corolário 8.4.1: Fator quadrático real associado

Se $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ e $\alpha = a + bi$ ($b \neq 0$) é raiz, então

$$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = x^2 - 2ax + (a^2+b^2)$$

é um fator de $p(x)$ com coeficientes reais.

Demonstração. Como α e $\overline{\alpha}$ são raízes, pelo Teorema do Fator, $(x-\alpha)$ e $(x-\overline{\alpha})$ dividem $p(x)$ em $\mathbb{C}[x]$. O produto é

$$(x-(a+bi))(x-(a-bi)) = (x-a-bi)(x-a+bi) = (x-a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + (a^2+b^2),$$

que tem coeficientes reais, e também divide $p(x)$ em $\mathbb{R}[x]$. □

Exemplo 8.4.8: Considere

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2.$$

Observa-se que

$$p(x) = (x-2)(x^2+1) = (x-2)(x-i)(x+i).$$

Assim, as raízes são 2, i e $-i$. Nota-se que, i e $-i$ formam um par conjugado. O fator real associado é

$$(x-i)(x+i) = x^2 + 1.$$

Observações: Consequências práticas

- Em polinômios com coeficientes reais, o número de raízes complexas não reais é sempre *par*.
- Ao fatorar $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, é comum agrupar pares conjugados para obter fatores quadráticos reais.
- Em problemas aplicados (engenharia, sinais e sistemas), pares conjugados estão associados a osci-

lações: se $\alpha = a \pm bi$, então o termo a relaciona-se a crescimento/decrescimento e b a frequência angular.

8.4.9 Raízes racionais

Nesta subseção, busca-se caracterizar quando uma equação polinomial com coeficientes inteiros admite raízes racionais e como tais candidatos podem ser listados e testados de maneira sistemática. Em aplicações, a identificação de uma raiz racional é valiosa porque permite *reduzir o grau* do polinômio por fatoração e, em seguida, resolver o problema residual por métodos algébricos já estudados (por exemplo, Briot–Ruffini e equações quadráticas).

Definição 8.4.5: Raiz racional

Seja $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Diz-se que $r \in \mathbb{Q}$ é uma **raiz racional** de $p(x) = 0$ se $p(r) = 0$.

Teorema 8.4.6: Teorema da raiz racional

Seja

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x], \quad a_n \neq 0.$$

Se $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (com $\operatorname{mdc}(p,q) = 1$ e $q > 0$) é raiz de $p(x) = 0$, então:

$$p \mid a_0 \qquad \text{e} \qquad q \mid a_n.$$

Em particular, todo candidato a raiz racional reduz-se a uma fração

$$r = \pm \frac{d}{c},$$

onde d é um divisor de a_0 e c é um divisor de a_n.

Demonstração. Suponha $p\left(\dfrac{p}{q}\right) = 0$ com $\operatorname{mdc}(p,q) = 1$. Então

$$0 = a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0.$$

Multiplicando por q^n, obtém-se

$$0 = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n,$$

logo

$$a_n p^n = -\left(a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n\right).$$

O lado direito é múltiplo de q, portanto $q \mid a_n p^n$. Como $\mathrm{mdc}(p,q)=1$, também $\mathrm{mdc}(p^n,q)=1$ e conclui-se $q \mid a_n$.

Analogamente, isolando $a_0 q^n$:

$$a_0 q^n = -\left(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1}\right),$$

o lado direito é múltiplo de p, então $p \mid a_0 q^n$. Como $\mathrm{mdc}(p,q)=1$, tem-se $\mathrm{mdc}(p,q^n)=1$ e conclui-se que $p \mid a_0$. □

Roteiro prático

Para buscar raízes racionais de $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$:

1. liste os divisores inteiros de a_0 (termo constante) e de a_n (coeficiente líder);
2. forme os candidatos $\pm d/c$;
3. teste cada candidato substituindo em $p(x)$ (ou usando Briot–Ruffini quando $c=1$).

Se uma raiz racional for encontrada, fatoriza-se $p(x)$ e reduz-se o grau.

Propriedade: Caso mônico

Se $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ é mônico (i.e., $a_n = 1$), então toda raiz racional é, na verdade, um **inteiro** divisor de a_0.

Exercício resolvido 8.4.9

1. Determine as raízes racionais de

$$p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 12.$$

Resolução:

Pelo Teorema da Raiz Racional, se $\dfrac{p}{q}$ é raiz (irredutível), então $p \mid 12$ e $q \mid 2$. Logo os candidatos são

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \quad \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{4}{2}, \pm\frac{6}{2}, \pm\frac{12}{2},$$

isto é, após simplificar:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \quad \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{3}{2}.$$

Testando rapidamente alguns valores (por substituição direta), verifica-se que $x=2$ é raiz, pois

$$p(2) = 2(8) - 3(4) - 8(2) + 12 = 16 - 12 - 16 + 12 = 0.$$

Portanto, $(x-2)$ é fator de $p(x)$. Aplicando Briot–Ruffini com 2:

2	2	-3	-8	12
	2	1	-6	0

Logo,

$$p(x) = (x-2)\big(2x^2+x-6\big).$$

Fatorando o quadrático:

$$2x^2+x-6 = (2x-3)(x+2).$$

Assim, as raízes racionais são

$$\boxed{x=2, \quad x=\frac{3}{2}, \quad x=-2.}$$

2. Considere o polinômio mônico

$$q(x) = x^4-5x^3+6x^2+4x-8.$$

Como é mônico, toda raiz racional inteira deve dividir 8. Os candidatos são

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8.$$

Testando, obtém-se $q(2)=0$. Logo $(x-2)$ é fator. Prosseguindo com divisões sucessivas (Briot–Ruffini), obtém-se a decomposição completa em fatores lineares e quadráticos reais, conforme o caso. ■

Observação: Quando não há raízes racionais

Se nenhum dos candidatos listados pelo Teorema da Raiz Racional zera o polinômio, então a equação não tem raízes racionais. Nesse caso, pode haver raízes reais irracionais e/ou raízes complexas, e a obtenção de aproximações passa a exigir outros procedimentos (por exemplo, métodos numéricos na subseção seguinte).

Exercício 8.4.9

1. Encontre todas as raízes racionais (se existirem) dos polinômios:

    1. $p(x) = x^3-6x^2+11x-6.$
    2. $q(x) = 3x^3+x^2-10x-8.$
    3. $r(x) = 2x^4-3x^3-11x^2+12x+9.$

2. Mostre que o polinômio $s(x) = x^3 + x + 1$ não possui raízes racionais. (Sugestão: use o Teorema da Raiz Racional e teste os candidatos.)

8.4.10 Método da Bisseção

Equações polinomiais e, mais amplamente, equações algébricas, são frequentemente resolvidas por métodos numéricos. Tais métodos constroem uma *sequência* (x_k) que converge para uma raiz $x^\star$ de $f(x) = 0$ com precisão prescrita. O **método da bisseção** destaca-se por sua simplicidade e robustez: baseado no **Teorema de Bolzano** (Teorema do Valor Intermediário[2]), parte-se de um intervalo $[a,b]$ no qual f é contínua[3] e ocorre mudança de sinal, $f(a) \cdot f(b) < 0$. A cada iteração, o intervalo é dividido ao meio e seleciona-se o subintervalo que preserva a mudança de sinal. O processo mantém a raiz contida no intervalo e reduz a largura pela metade a cada passo, fornecendo um controle a priori do erro.

Definição 8.4.6: Método da bisseção — condições e procedimento

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, com $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, ou seja, $f(a) \cdot f(b) < 0$. Define-se a sequência por:

1. Inicialização: $a_0 = a$, $b_0 = b$.
2. Passo $k \geq 0 \in \mathbb{N}$: $m_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ (ponto médio).
3. Se $f(m_k) = 0$, então m_k é raiz e o processo termina. Caso contrário:

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} f(a_k) \cdot f(m_k) < 0 & \Rightarrow \quad [a_k, m_k], \\ f(m_k) \cdot f(b_k) < 0 & \Rightarrow \quad [m_k, b_k]. \end{cases}$$

4. Critérios de parada típicos:
   - largura do intervalo: $b_k - a_k \leq \varepsilon$;
   - valor da função: $|f(m_k)| \leq \tau$;
   - orçamento: $k \geq k_{\max}$.

Nessas condições, existe pelo menos uma raiz em cada $[a_k, b_k]$ e $(b_k - a_k) = (b-a)/2^k$.

[2] Pesquise e leia sobre esse teorema.

[3] Pesquise e reflita o conceito de função contínua.

Perceba que...

Para assegurar correção e clareza:

- Requisito essencial: continuidade de f em $[a,b]$ e $f(a)\cdot f(b)<0$.
- O critério "dividir ao meio e escolher o subintervalo que contém a raiz" corresponde a preservar o sinal oposto nos extremos.
- O erro a priori após n iterações é limitado por $(b-a)/2^n$, o que permite predizer o número de iterações para uma tolerância prescrita.

Propriedades: Garantias, erro e custo em iterações

Sob as hipóteses da definição:

1. **Invariantes de bracketing**
   Para todo k, $f(a_k)\cdot f(b_k)\le 0$ e existe raiz em $[a_k,b_k]$.
2. **Contração do intervalo**
   $(b_k-a_k)=(b-a)/2^k$.
3. **Erro a priori**
   Qualquer m_k satisfaz $|m_k-x^\star|\le (b-a)/2^{k+1}$ para alguma raiz $x^\star\in[a,b]$.
4. **Complexidade**
   Para atingir largura do intervalo $\le \varepsilon$, basta fazer

$$k \ge \left\lceil \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)\right\rceil, \text{ onde } \lceil\ \rceil \text{ é o inteiro ligeiramente superior a } \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right).$$

5. **Convergência**
   Convergência garantida e linear (taxa de redução da largura: fator $1/2$ por iteração).

Exercício resolvido 8.4.10

1. Encontre o valor aproximado da raiz real de

$$f(x)=x^3-x-2$$

que está no intervalo inicial $[1,2]$.

Resolução:

Sabendo que a função é contínua em $[1,2]$ e havendo mudança de sinal em $f(1)=-2$ e $f(2)=4$, pelo Teorema de Bolzano existe ao menos uma raiz em tal intervalo.

Iterações:

(a) Intervalo inicial $[1,2]$. Ponto médio $m_1 = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$.

$$f(1{,}5) = 1{,}5^3 - 1{,}5 - 2 = -0{,}125 < 0.$$

Logo, existe raiz em [1,5, 2] (ponto médio à **esquerda** da raiz).

(b) Intervalo [1,5, 2]. Ponto médio $m_2 = \frac{1{,}5+2}{2} = 1{,}75$.

$$f(1{,}75) = 1{,}75^3 - 1{,}75 - 2 = 1{,}609375 > 0.$$

Logo, existe raiz em [1,5, 1,75] (ponto médio à **direita**).

(c) Intervalo [1,5, 1,75]. Ponto médio $m_3 = 1{,}625$.

$$f(1{,}625) = 1{,}625^3 - 1{,}625 - 2 = 0{,}666015625 > 0.$$

Logo, existe raiz em [1,5, 1,625] (ponto médio à **direita**).

(d) Intervalo [1,5, 1,625]. Ponto médio $m_4 = 1{,}5625$.

$$f(1{,}5625) = 1{,}5625^3 - 1{,}5625 - 2 = 0{,}252197265625 > 0.$$

Logo, existe raiz em [1,5, 1,5625] (ponto médio à **direita**).

(e) Intervalo [1,5, 1,5625]. Ponto médio $m_5 = 1{,}53125$.

$$f(1{,}53125) = 1{,}53125^3 - 1{,}53125 - 2 = 0{,}0591125488 > 0.$$

Logo, existe raiz em [1,5, 1,53125] (ponto médio à **direita**).

(f) Intervalo [1,5, 1,53125]. Ponto médio $m_6 = 1{,}515625$.

$$f(1{,}515625) = 1{,}515625^3 - 1{,}515625 - 2 = -0{,}0340544271 < 0.$$

Logo, existe raiz em [1,515625, 1,53125] (ponto médio à **esquerda**).

(g) Intervalo [1,515625, 1,53125]. Ponto médio $m_7 = 1{,}5234375$.

$$f(1{,}5234375) = 1{,}5234375^3 - 1{,}5234375 - 2 = 0{,}012350 \text{ (aprox.)} > 0.$$

Logo, existe raiz em [1,515625, 1,5234375] (ponto médio à **direita**).

(h) Intervalo [1,515625, 1,5234375]. Ponto médio $m_8 = 1{,}51953125$.

$$f(1{,}51953125) \approx -0{,}010984 < 0.$$

Logo, existe raiz em [1,51953125, 1,5234375] (ponto médio à **esquerda**).

(i) Intervalo [1,51953125, 1,5234375]. Ponto médio $m_9 = 1{,}521484375$.

$$f(1{,}521484375) \approx 0{,}000700 > 0.$$

Logo, existe raiz em [1,51953125, 1,521484375] (ponto médio à **direita**).

(j) Intervalo [1,51953125, 1,521484375]. Ponto médio $m_{10} = 1{,}5205078125$.

$$f(1{,}5205078125) \approx -0{,}005155 < 0.$$

Logo, existe raiz em [1,5205078125, 1,521484375] (ponto médio à **esquerda**).

Ponto de parada (4 casas decimais no erro). Para garantir erro posicional $\leq 5 \times 10^{-5}$ (quatro casas decimais corretas no ponto médio), basta impor

$$b_k - a_k \leq 10^{-4}.$$

Com $b_0 - a_0 = 1$, o número mínimo de iterações é

$$k \geq \left\lceil \log_2\left(\frac{1}{10^{-4}}\right) \right\rceil = \lceil \log_2(10^4) \rceil = \lceil 13{,}2877\ldots \rceil = 14.$$

Prosseguindo o processo até $k = 14$, obtém-se intervalo $[a_{14}, b_{14}]$ com largura $\leq 10^{-4}$ e ponto médio

$$\boxed{m_{14} \approx 1{,}5214,}$$

que aproxima a raiz única de $x^3 - x - 2 = 0$ com quatro casas decimais corretas.

2. Encontre uma raiz aproximada para a função $f(x) = x^2 - 2$ no intervalo $[1,2]$.

Resolução:

Observa-se continuidade e $f(1) = -1$, $f(2) = 2$ (mudança de sinal). Iterações iniciais:

$$\begin{aligned}
& & & & [a_0, b_0] &= [1,\ 2], \\
m_1 &= 1{,}5, & f(m_1) &= 0{,}25 & \Rightarrow\quad [a_1, b_1] &= [1,\ 1{,}5], \\
m_2 &= 1{,}25, & f(m_2) &= -0{,}4375 & \Rightarrow\quad [a_2, b_2] &= [1{,}25,\ 1{,}5], \\
m_3 &= 1{,}375, & f(m_3) &= -0{,}109375 & \Rightarrow\quad [a_3, b_3] &= [1{,}375,\ 1{,}5], \\
m_4 &= 1{,}4375, & f(m_4) &= 0{,}06640625 & \Rightarrow\quad [a_4, b_4] &= [1{,}375,\ 1{,}4375].
\end{aligned}$$

O erro a priori após $k = 4$ iterações não excede $(2-1)/2^5 = 1/32 \approx 0{,}03125$. A raiz buscada é $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$, contida em [1,375, 1,4375].

3. Adaptado de Duarte, França et al. (2023). Em um projeto de drenagem agrícola, calcule a lâmina d'água h para que um canal trapezoidal com base menor $b = 0{,}40\,\text{m}$ e inclinação de talude 1:1 conduza uma vazão $Q = 160{,}4\,\text{L/s} = 0{,}1604\,\text{m}^3/\text{s}$ em regime permanente e uniforme. Considerar declividade $I = 1{,}0$ por mil $(I = 0{,}001)$ e coeficiente de rugosidade de Manning $n = 0{,}035$.

Resolução:

Para seção trapezoidal com taludes 1:1, toma-se $\lambda = 1$. Para uma profundidade $h > 0$, tem-se:

a) Área molhada:

$$S(h) = b\,h + \lambda h^2 = 0{,}40\,h + h^2.$$

b) Perímetro molhado:

$$PM(h) = b + 2h\sqrt{\lambda^2 + 1} = 0{,}40 + 2h\sqrt{2}.$$

(a) Raio hidráulico:

$$R(h) = \frac{S(h)}{PM(h)}.$$

c) Velocidade média (Manning):

$$V(h) = \frac{1}{n} R(h)^{2/3} I^{1/2}.$$

d) Vazão:

$$\begin{aligned}
Q(h) &= S(h)V(h) \\
&= S(h)\left(\frac{1}{n} R(h)^{2/3} I^{1/2}\right) \\
&= \frac{1}{n} S(h) R(h)^{2/3} I^{1/2} \\
&= \frac{1}{n} S(h) \left(\frac{S(h)}{PM(h)}\right)^{2/3} I^{1/2} \\
&= \frac{1}{n} \big(S(h)\big)^{5/3} \big(PM(h)\big)^{-2/3} I^{1/2} \\
1{,}1604 &= \underbrace{\frac{1}{0{,}035} \left(0{,}40h + h^2\right)^{5/3} \left(0{,}40 + 2h\sqrt{2}\right)^{-2/3} 0{,}001^{1/2}}_{Q(h)} \\
\mapsto f(h) &= Q(h) - 0{,}1604 \\
&= \frac{1}{0{,}035} \left(0{,}40h + h^2\right)^{5/3} \left(0{,}40 + 2h\sqrt{2}\right)^{-2/3} 0{,}001^{1/2} - 0{,}1604.
\end{aligned}$$

A raiz $f(h) = 0$ fornece a lâmina d'água procurada.

A) Intervalo inicial com mudança de sinal.

Calculando-se $Q(h)$ (substituição direta nas expressões acima), obtém-se, por exemplo:

$$Q(0{,}40) \approx 0{,}1016 \quad \Rightarrow \quad f(0{,}40) < 0,$$

$$Q(0{,}55) \approx 0{,}1957 \quad \Rightarrow \quad f(0{,}55) > 0.$$

Logo, existe pelo menos uma raiz em $[0{,}40,\ 0{,}55]$.

B) Aplicação do método da bisseção.

Tomando sempre o ponto médio $m = \dfrac{h_a + h_b}{2}$ e escolhendo o subintervalo onde ocorre a mudança de sinal, obtêm-se as iterações:

i. $m_1 = 0{,}475$.
Calcula-se $Q(0{,}475) \approx 0{,}1437 \Rightarrow f(m_1) < 0$. Novo intervalo: $[0{,}475,\ 0{,}55]$.

ii. $m_2 = 0{,}5125$.
Calcula-se $Q(0{,}5125) \approx 0{,}1699 \Rightarrow f(m_2) > 0$. Novo intervalo: $[0{,}475,\ 0{,}5125]$.

iii. $m_3 = 0{,}49375$.
Calcula-se $Q(0{,}49375) \approx 0{,}1564 \Rightarrow f(m_3) < 0$. Novo intervalo: $[0{,}49375,\ 0{,}5125]$.

iv. $m_4 = 0{,}503125$.
Calcula-se $Q(0{,}503125) \approx 0{,}1629 \Rightarrow f(m_4) > 0$. Novo intervalo: $[0{,}49375,\ 0{,}503125]$.

v. $m_5 = 0{,}4984375$.
Calcula-se $Q(0{,}4984375) \approx 0{,}1596 \Rightarrow f(m_5) < 0$.
Novo intervalo: $[0{,}4984375,\ 0{,}503125]$.

vi. $m_6 = 0{,}50078125$.
Calcula-se $Q(0{,}50078125) \approx 0{,}1611 \Rightarrow f(m_6) > 0$. Novo intervalo: $[0{,}4984375,\ 0{,}50078125]$.

O erro máximo da bisseção após k iterações é limitado por

$$\frac{h_b - h_a}{2^k}.$$

Após 6 iterações, com intervalo inicial $0{,}55 - 0{,}40 = 0{,}15$, tem-se

$$\frac{0{,}15}{2^6} \approx 0{,}00234\,\text{m}.$$

Prosseguindo por mais algumas iterações (ou verificando o valor de $f(h)$ muito próximo de zero), obtém-se

$$\boxed{h \approx 0{,}50\,\text{m}}.$$

Perceba que...

Apesar de $f(h)$ não ser uma função polinomial, pois $Q(h)$ tem expoentes fracionários, mesmo assim o método da bisseção se aplica.

Algoritmo (Python) — Método da bisseção para $f(h) = Q(h) - 0{,}1604$

```
import math

# Dados do problema
b = 0.40          # m
lam = 1.0         # talude 1:1
n = 0.035
I = 0.001
Q_target = 0.1604 # m^3/s

def Q(h):
    S = b*h + lam*h*h
    PM = b + 2*h*math.sqrt(lam*lam + 1.0)
    R = S / PM
    V = (1.0/n) * (R**(2.0/3.0)) * math.sqrt(I)
    return S * V

def f(h):
    return Q(h) - Q_target

# Intervalo inicial (deve haver mudança de sinal)
a, c = 0.40, 0.55
fa, fc = f(a), f(c)

if fa * fc > 0:
   raise ValueError
   ("Não há mudança de sinal no intervalo inicial.")

# Bisseção
tol = 1e-4  # tolerância em h (m)
max_iter = 100

for k in range(max_iter):
    m = 0.5*(a + c)
    fm = f(m)
```

```
    # Critérios de parada
    if abs(fm) < 1e-8 or 0.5*(c - a) < tol:
        break

    # Escolha do subintervalo
    if fa * fm < 0:
        c = m
        fc = fm
    else:
        a = m
        fa = fm

print(f"h \approx {m:.6f} m")
print(f"Q(h) \approx {Q(m):.6f} m^3/s")
```

Dica: basta copiar e colar este código no Google Colab e executar. A saída imprime a aproximação de h e a vazão $Q(h)$ correspondente.

Exercício 8.4

1. Dados os polinômios $A(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5x - 1$, $B(x) = -x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 3$ e $C(x) = x^3 - 3x + 2$, calcule o polinômio resultante $P(x) = A(x) - (B(x) + C(x))$ e determine seu grau.

2. Engenharia de Produção / Modelagem de Custo e Receita - A receita da venda de um produto é modelada pelo polinômio $R(x) = -2x^2 + 100x$, e o custo de produção é $C(x) = x^2 + 10x + 300$, onde x é o número de unidades vendidas. O lucro, $L(x)$, é a diferença entre a receita e o custo. Determine o polinômio que modela o lucro.

3. Teorema do Resto - Um sistema de controle é descrito pelo polinômio de estado $P(t) = t^5 - 3t^4 + 2t^2 - 8$. O comportamento do sistema em um instante crítico $t = 2$ é fundamental para a análise de estabilidade. Sem efetuar a divisão, determine qual seria o resto da divisão de $P(t)$ pelo binômio $(t - 2)$.

4. Teorema de D'Alembert - Determine o valor da constante k para que o polinômio $P(x) = x^3 + kx^2 - 4x + 4$ seja divisível por $(x + 2)$.

5. Dispositivo de Briot-Ruffini - Utilize o dispositivo prático de Briot-Ruffini para encontrar o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$ da divisão do polinômio $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + x - 7$ por $D(x) = x - 3$.

6. Divisão por Produto de Fatores - Determine os valores das constantes a e b para que o polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ seja divisível pelo produto $(x - 1)(x - 2)$.

7. Método de Descartes - Use o método dos coeficientes a determinar (Método de Descartes) para encontrar o quociente e o resto da divisão de $A(x) = x^4 + 3x^3 - 2x + 1$ por $B(x) = x^2 + x - 1$.

8. Engenharia Agronômica / Otimização de Produção A produção $P(n)$ de uma cultura, em toneladas por hectare, em função da quantidade de nitrogênio n aplicada (em kg/ha), é modelada por $P(n) = -0.001n^3 + 0.1n^2$. O custo da aplicação é $C(n) = 10n$. O lucro líquido é $L(n) = 1000 \cdot P(n) - C(n)$. Se sabe-se que um nível de aplicação $n = 10$ kg/ha resulta em um lucro de R$ 8.900,00, qual o resto da divisão de $L(n)$ por $(n-10)$?

9. Cálculo Integral / Frações Parciais - Em Cálculo Integral, para integrar a função racional $f(x) = \frac{5x-7}{x^2-3x+2}$, é necessário decompô-la em frações parciais. Sabendo que $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, determine as constantes A e B na identidade:

$$\frac{5x-7}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

10. Processamento de Sinais / Convolução - Em processamento de sinais, a saída de um filtro digital é a convolução do sinal de entrada com a resposta ao impulso do filtro. Matematicamente, isso corresponde à multiplicação de polinômios. Se um sinal de entrada é representado por $I(x) = 2x^2 + 3x + 1$ e a resposta do filtro é $H(x) = x - 1$, determine o sinal de saída $S(x) = I(x) \cdot H(x)$.

Gabarito

Capítulo 1

Exercício 1.3

1. a) V; b) F (ex.: $1 \div 2 \notin \mathbb{Z}$); c) F ($2-5 \notin \mathbb{N}$); d) F (0 não tem antecessor em $\mathbb{N}$); e) V.
2. a) $A = \{0,1,2,3,4\}$. b) $B = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$. c) $C = \{-2,1\}$.
3. a) Sim, par + par = par. b) Não, ímpar + ímpar = par (que não está em I). c) Sim, $(3k)\cdot(3m) = 9km = 3(3km) \in M_3$.
4. Demonstração. Passos: Distributiva $\Rightarrow a(a-b)+b(a-b) \Rightarrow a^2-ab+ba-b^2$. Comutativa ($ab=ba$) e Inverso Aditivo ($-ab+ab=0$) $\Rightarrow a^2-b^2$.
5. Demonstração. Partindo de $a\cdot 0 = a(0+0) = a\cdot 0 + a\cdot 0$. Somando $-(a\cdot 0)$ em ambos os lados, obtém-se $0 = a\cdot 0$.
6. a) $s(4)=5$ e $p(-2)=-3$. b) São operações inversas, ou seja, $s(p(n)) = p(s(n)) = n$.

Exercício 1.4

1. a) V; b) V; c) V; d) F ($\sqrt{2}$ é irracional); e) V ($x = 0,\overline{9} \Rightarrow 10x = 9,\overline{9} \Rightarrow 9x = 9 \Rightarrow x = 1$).
2. a) $5/12$. b) 1. c) $50/3$.
3. a) $4/33$. b) $229/90$. c) $1/2$ (pois $1/6+1/3 = 3/6 = 1/2$).
4. a) $5/12$ (média aritmética). b) 0,405 ou $81/200$.
5. Demonstração clássica por absurdo. Se $(p/q)^2 = 2$, então $p^2 = 2q^2$, logo p é par ($p = 2k$). Substituindo, $4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2$, logo q também é par. Contradição com a hipótese de fração irredutível.
6. a) Erro $\approx 1,2\cdot 10^{-3}$; b) Erro $\approx 8,3\cdot 10^{-5}$; c) Erro $\approx 2,6\cdot 10^{-7}$; d) Erro $\approx 1,5\cdot 10^{-3}$. A melhor aproximação é a letra c) $355/113$.

Exercício 1.6

1. a) $\mathbb{Q}$; b) $\mathbb{Q}$ (11); c) $\mathbb{I}$; d) $\mathbb{Q}$; e) $\mathbb{I}$; f) $\mathbb{I}$; g) $\mathbb{Q}$ (1); h) $\mathbb{Q}$; i) $\mathbb{I}$.
2. a) V; b) F (ex: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$); c) F (irracionais não têm); d) V; e) V.
3. a) $(-2,8)$; b) $(-\infty,-4]\cup[3,+\infty)$; c) $[3,9;4,1]$; d) $\mathbb{R}$ (todo módulo é $\geq 0 > -2$).
4. a) $2|x|$; b) $-(x-5)+(x-2) = -x+5+x-2 = 3$; c) 1 se $x>0$, -1 se $x<0$.
5. a) 8; b) $2\sqrt{2}$; c) $|\pi-3| = \pi-3 \approx 0,14$; d) 3.
6. a) 12,45; b) 0,89; c) 3,14; d) 7,32 (par); e) 9,14 (ímpar); f) 2,72.
7. Demonstração. Se $xy = p/q$, então $y = p/(qx)$, que seria racional (divisão de racionais). Absurdo.
8. a) Sim (7 = 7); b) Sim (7 = 7); c) Não (1 < 7). Igualdade vale se a,b têm o mesmo sinal (ou se um for zero).
9. $x \geq 0$ (números não negativos).
10. Ex: $\frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0,47$ ou $0,4040040004\ldots$.
11. $|x-5| \leq 0,01$. Intervalo $[4,99;5,01]$.
12. Erro abs: 0,03. Erro rel: $\approx 0,31\%$.
13. a) $10\sqrt{2}$ m (Irracional). b) 14,14 m.
14. Erro abs: $|0,99999999-1| = 10^{-8}$.
15. $E = |-2|^2+|0|^2+|1|^2+|-3|^2+|\sqrt{5}|^2 = 4+0+1+9+5 = 19$.

Exercício 1.8

1. a) $]-3,5]$; b) $[\sqrt{2},+\infty[$; c) $]-\infty,0[\cup]4,+\infty[$; d) $[-3,3]$.
2. a) $[-2,6[$; b) $[1,4]$; c) $[-2,1[$; d) $]4,6[$; e) $[-2,3[$; f) $[-2,3[$.
3. a) 7 inteiros ($\{-3,-2,\ldots,3\}$); b) 4 inteiros ($\{-1,0,1,2\}$); c) 4 inteiros ($\{4,5,6,7\}$); d) 4 inteiros ($\{1,2,3,4\}$).
4. a) $]-\infty,0]\cup]10,+\infty[$; b) $M\cap N = [4,10]$, logo o complementar é $]-\infty,4[\cup]10,+\infty[$.
5. a) $[2,8]$; b) $[3,5]$; c) $[0,2]$; d) $]-\infty,0[$.
6. a) $]-\infty,7]$; b) $]-2,3]$; c) $]-\infty,-3[\cup]3,+\infty[$.
7. a) $I = [49,95;50,05]$. b) Sim, pois $49,98 > 49,95$ e $50,02 < 50,05$.
8. a) $[-20,80]$ (o próprio T_{op}). b) $[-40,-20[\cup]80,100]$.
9. a) $E =]4,5;6,0[$, $S = [3,0;8,0]$. b) $[5,0;6,0[$.
10. $F\cup E = [1,25]$. Disponível: $]25,30]$.
11. $[-10,-1,5[\cup]1,5,10]$.
12. $[2,3]\cup[4,5]$.

Exercício 1.9

1. $|x+2| < 0,05$. Intervalo: $(-2,05;-1,95)$.
2. $a = 5$ e $\delta = 4$. Notação: $V_4(5)$.
3. a) $(2,8;5,2)$. b) Sim, ambos satisfazem $2,8 < x < 5,2$. c) Sim, pois $2,8 < 3$ e $5 < 5,2$.
4. $|3(x-4)| < 6 \Rightarrow |x-4| < 2$. Logo, $V_2(4)$.
5. $\delta = 3$ (a menor distância até as extremidades, $\min\{|2-(-1)|,|7-2|\}$).
6. a) $(-1,2]\cup[4,7)$. b) $\sup A = 7$ e $\inf A = -1$.
7. a) $\inf = -5$ (sem mín.); $\sup = \max = 2$. b) $\inf = \min = -5$; $\sup = \max = 5$. c) $\sup = \max = 2$; $\inf = 1$ (sem mín.).
8. a) Não, pois 3 é ponto isolado. b) Sim, pois 0,5 é ponto interior de $[0,1)$.
9. *Sugestão:* Considere $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$.
10. *Sugestão:* Mostre que $c\cdot\sup A$ é cota superior de cA e que nenhuma menor serve.
11. $x > 17$. Vizinhança $(17,+\infty)$; Barreira $M = 17$.
12. $x < -7$. Vizinhança $(-\infty,-7)$; Barreira $M = 7$.
13. $x^2 > 10000 \Rightarrow x > 100$. Logo, $M = 100$.
14. a) $A = (100,+\infty)$. Sim, é vizinhança (barreira 100). b) $B = (1000,+\infty)$. Sim, é vizinhança (barreira 1000).
15. Basta tomar $M = \sqrt[3]{K}$.

Capítulo 2

Exercício 2.2

1. a) Indep: Irrigação (I); Dep: Produtividade (P). b) O coeficiente de I^2 é negativo ($-0,02$), indicando uma parábola com concavidade para baixo, ou seja, a produtividade sobe até um máximo e depois cai (excesso de água). c) $P(250) = 950$ sacas/ha.
2. a) II Quadrante ($x<0, y>0$). b) $d = \sqrt{(-300)^2+400^2} = \sqrt{90000+160000} = \sqrt{250000} = 500$ m. c) $T(300,400)$.

3. a) $\{(X,1),(X,2),(X,3),(Y,1),(Y,2),(Y,3)\}$. b) $2\times 3=6$ tratamentos. c) $3\times 3=9$ combinações.
4. a) O volume diminui 50 litros a cada hora (taxa constante). b) $V(t)=1000-50t$. c) Reta decrescente partindo de $(0,1000)$.
5. a) Entre 20s e 40s. b) O trator desacelera (freia) até parar. c) 3 m/s.

Exercício 2.3
1. a) Sim, pois todos os pares têm $x\in A$ e $y\in B$. b) Não, pois $(4,2)$ tem $x=4\notin A$. c) Sim, $R_3=\{(1,2),(2,4)\}$.
2. a) Sim, todos satisfazem $x^2+y^2=25$ ($9+16=25$, $0+25=25$, $9+16=25$). b) Circunferência de raio 5 centrada na origem.
3. a) $R=\{(-2,4),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4)\}$. b) $R^{-1}=\{(4,-2),(1,-1),(0,0),(1,1),(4,2)\}$. c) Sim, pois $(-2,4)\in R$.

Exercício 2.4
1. a) É função (cada $x\in A$ tem único $y\in B$). b) Não é função (o elemento $0\in A$ tem duas imagens: 2 e 3). c) Não é função (o elemento $0\in A$ não possui imagem).
2. a) É função. b) Não é função (viola unicidade). c) Não é função (viola existência). d) É função (sobras no contradomínio são permitidas).
3. a) 1. b) 11. c) $4-3\sqrt{3}$. d) $(h+1)^2-3(h+1)+1=h^2-h-1$.
4. a) Não, pois um mesmo x estaria associado a mais de um y. b) Não, pois para $x=0$, por exemplo, temos $y=1$ e $y=-1$.
5. a) 10 cm. b) 50 cm. c) 10 semanas ($60=5t+10\Rightarrow 5t=50\Rightarrow t=10$).

Exercício 2.6
1. a) F (Domínio); b) V; c) F (Unicidade); d) V; e) V.
2. I) Sim, é função (todos de A têm um único correspondente). II) Não é função (o elemento 3 de A não tem flecha). III) Não é função (o elemento 1 de A tem duas flechas).
3. a) $f(-2)=3, f(-1)=0, f(0)=-1, f(1)=0, f(2)=3$. b) $Im_f=\{-1,0,3\}$. c) Sobraram $\{-2,1,2,4\}$.
4. a) $\mathbb{R}\setminus\{4\}$; b) $[7,+\infty[$; c) $]-3,+\infty[$; d) $\mathbb{R}$ (raiz cúbica aceita negativos).
5. $x\geq -2$ e $x\neq 3$. Intervalo: $[-2,3[\cup]3,+\infty[$.
6. a) $x_v=-(-6)/2=3$, $y_v=3^2-18+5=-4$. b) Concavidade para cima ($a=1>0$), valor mínimo. c) $Im_f=[-4,+\infty[$.
7. Isolando x: $y(x+1)=3x-2\Rightarrow yx+y=3x-2\Rightarrow yx-3x=-y-2\Rightarrow x(y-3)=-(y+2)\Rightarrow x=-(y+2)/(y-3)$. Restrição: $y\neq 3$. Logo, $Im_f=\mathbb{R}-\{3\}$.
8. a) $D_f=[-2,3]$. b) $Im_f=[-1,3]$.
9. a) $x>0$ e $50-x>0\Rightarrow 0<x<50$. Domínio $]0,50[$. b) Vértice em $x=25$, Área máx $=25\times 25=625$ m^2.
10. a) $f(x^2)=2x^2+1$. b) $g(2x+1)=(2x+1)^2=4x^2+4x+1$.

Exercício 2.7
1. a) Pares: $(-3,5),(-2,0),(-1,-3),(0,-4),(1,-3),(2,0),(3,5)$. b) Pontos marcados simetricamente em relação ao eixo y. c) Uma parábola com concavidade para cima.
2. (a) e (d) são funções (retas verticais cortam em 1 ponto). (b) e (c) não são funções (retas verticais cortam em 2 pontos).
3. a) Máx 30°C, constante por 4 horas (das 12h às 16h). b) Subindo entre 6h e 12h. c) 20°C em ambos.
4. Gráfico deve subir de $(-2,1)$ até $(0,3)$ e descer até $(4,-1)$.
5. a) Ponto $(0,6)$. b) $x^2-5x+6=0\Rightarrow (x-2)(x-3)=0$. Pontos $(2,0)$ e $(3,0)$. c) Parábola cortando y em 6 e x em 2 e 3.

Exercício 2.8
1. a) Par ($(-x)^4=x^4, (-x)^2=x^2$). b) Ímpar ($2(-x)^3-5(-x)=-(2x^3-5x)$). c) Nem Par Nem Ímpar ($(-x)^2+(-x)\neq x^2+x$ e $\neq -(x^2+x)$). d) Ímpar ($1/(-x)=-1/x$).
2. (a) Par (simetria no eixo y). (b) Ímpar (simetria na origem). (c) Sem paridade (não há simetria no eixo y nem na origem).
3. $h(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=h(x)$. Logo, a soma é par.
4. a) Refletir no eixo y (pontos em $(-1,2),(-2,1)$). b) Refletir na origem (pontos em $(-1,-2),(-2,-1)$).
5. $P(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ (Cosh) e $I(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ (Senh).

Exercício 2.9
1. a) $x_v=-4/(-2)=2$, $y_v=1$. b) Crescente em $]-\infty,2]$ e Decrescente em $[2,+\infty[$.
2. a) $[0,2]$. b) $[5,7]$. c) Velocidade constante (aceleração nula).
3. a) Gráfico em forma de "V" com vértice em $(2,0)$. b) Decrescente em $]-\infty,2]$. c) Crescente em $[2,+\infty[$.
4. a) $h(x)=2(-x+3)+1=-2x+7$. b) Decrescente ($a=-2<0$). c) Decrescente.
5. a) $x_v=-10/(-2)=5$. b) Intervalo $[0,5]$. c) Para $x>5$.

Exercício 2.10
1. (a) Injetora (sobra elemento em B). (b) Sobrejetora (não é injetora pois convergem). (c) Bijetora (1 para 1 e não sobra ninguém).
2. a) Não Injetora (reta corta em 2 pontos). b) Injetora. c) Injetora. d) Não Injetora (periódica).
3. Não. Se $P(t_1)=P(t_2)$ com $t_1\neq t_2$, a definição de injetividade é violada.
4. Não. O conjunto imagem é $[0,800]$, que é menor que o contradomínio $[0,1000]$. Sobram elementos no contradomínio.
5. a) Sim, $3x_1-2=3x_2-2\implies 3x_1=3x_2\implies x_1=x_2$. b) Sim, para qualquer y, $x=(y+2)/3$ existe em $\mathbb{R}$. Logo, é bijetora.

Exercício 2.11
1. a) $f^{-1}(x)=\frac{x-7}{4}$. b) $g^{-1}(x)=2x+3$. c) $h^{-1}(x)=x^3+1$. d) $p^{-1}(x)=\frac{3x+1}{x-2}$.
2. a) Pelo ponto $(5,2)$. b) Também será crescente (simetria em $y=x$ preserva o crescimento).
3. a) $t=\frac{100-C}{2}$ ou $t(C)=50-0,5C$. b) $t(40)=50-20=30$ min.
4. a) $t(N)=\log_2(\frac{N}{1000})$. b) A função informa quanto tempo é necessário para a população atingir um tamanho N.
5. a) $y=\sqrt{x-2}\Rightarrow y^2=x-2\Rightarrow x=y^2+2$. Logo, $f^{-1}(x)=x^2+2$. b) O domínio de f^{-1} é $[0,+\infty[$.
6. (C)

Exercício 2.12
1. a) $(3x-2)^2+1=9x^2-12x+5$. b) $3(x^2+1)-2=3x^2+1$. c) $(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2$. d) $3(3x-2)-2=9x-8$.
2. Exemplo: $g(x)=x^2+5$ (interna) e $f(x)=\sqrt{x}$ (externa).
3. a) $V(t)=0,5(2\sqrt{t})^2=0,5(4t)=2t$. b) $V(25)=2(25)=50$ m^3.
4. a) $P(T)=100(2T+10)=200T+1000$. b) Variação $\Delta P=200\cdot\Delta T=200\cdot 5=1000$ peixes.
5. $V(t)=3(t^2+2t)+5=3t^2+6t+5$. Para $t=2$: $V(2)=3(4)+12+5=29$ Volts.

Capítulo 3

Exercício 3.2
1. a) P (V). b) NP (Exclamativa). c) P (F, pois $3+8=11$). d) NP (Imperativa). e) P (F). f) NP (Interrogativa). g) NP (Sem verbo/predicado). h) P (F, nem todo losango tem ângulos retos). i) NP (Sentença aberta). j) P (V).
2. a) Imperativa (ordem). b) Interrogativa. c) Sentença aberta (valor lógico depende de x e y). d) Incompleta (falta predicado, não afirma nada).
3. a) $V=\{5\}$. b) $V=\{5\}$. c) $V=\varnothing$ (pois $5\notin U$).
4. a) x é par. b) x é irmã de y. c) $x+y=z$.
5. a) F ($9\not>10$). b) V ($16>10$). c) F ($10\not>10$). d) F ($0\not>10$).
6. $V=\{(0,5),(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(5,0)\}$.
7. Proposição tem valor lógico definido (V ou F). Sentença aberta tem variáveis e só assume valor lógico quando elas são substituídas. Ex: "2 é par" (Prop) vs "x é par" (Aberta).

8. Não é proposição, pois "Ele" é uma variável (pronome) não definida. Torna-se proposição apenas se soubermos a quem se refere (ex: "Pelé foi o melhor...").
9. Não. É um paradoxo. Se for V, ela diz que é F (contradição). Se for F, ela diz que é V (contradição). Viola o princípio do terceiro excluído.
10. $V = \{2,3\}$. (O 5 não entra pois a condição é $x < 5$).
11. a) $V = \{-2,2\}$. b) $V = \{3\}$ (pois $2(3)+1 = 7 > 5$). c) $V = \{-2,-1,0,1,2\}$ (pois $4 < 5, 1 < 5, 0 < 5$). d) $V = \{-2,2\}$.
12. a) V ($9 > 8$). b) F (Ex: se $x = -3$, $9 \not< 4$). c) F (não existe real cujo quadrado seja -1). d) V.
13. Pares verdadeiros: a) $(3,4) \to 10 \leq 10$ (V); c) $(2,7) \to 11 \leq 10$ (F); e) $(0,10) \to 10 \leq 10$ (V). Pares falsos: b, d, f.
14. O par $(4,3)$. Pois $4+3 = 7$ (V) e $4-3 = 1$ (V).
15. $V = \{3,4\}$. (São os inteiros estritamente entre 2 e 5).

Exercício 3.3
1. a) F (Ex: $3 \in \mathbb{N}$ e $3^2 = 9 \not< 5$). b) V (Ex: $0, 1, -1$). c) F (Ex: $3 \in \mathbb{R}$). d) F (Existem 1 e 2 em $\mathbb{N}^*$, logo não é único).
2. a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$ (F, pois $0^2 = 0$). b) $\exists x \in \mathbb{Z}, 2x = 3x$ (V, $x = 0$). c) $\forall n \in \mathbb{N}, n+1 > n$ (V). d) $\exists x \in \mathbb{R}, x = \sqrt{x}$ (V, $x = 0$ ou $x = 1$).
3. a) $x = 0, 5$ ou $x = 1$ ou $x = 0$. b) $n = 41$ (pois $41^2 + 41 + 41 = 41(41+1+1) = 41 \times 43$, composto). c) $x = 0, 5$ (pois $2 \not< 0, 5$).
4. a) F (Falha na unicidade: 2 e -2). b) V (Único é 0). c) F (Falha na existência: não há natural negativo). d) F (Falha na unicidade: 3 e -3).
5. a) V. (Para cada x, existe seu oposto $y = -x$). b) F. (Não existe um número mágico y que somado a qualquer x dê sempre 0. Se $y = 0$, falha para $x = 1$. Se $y = -5$, falha para $x = 0$). A ordem importa!

Exercício 3.4
1. a) V (V e V = V); b) V (V ou F = V); c) V (V ou F = V); d) F (V e F = F); e) V (V ou F = V); f) V (V ou F = V); g) F (F ou F = F); h) F (V e F = F).
2. a) V ($F \Rightarrow V$ é V); b) V ($V \Leftrightarrow V$ é V); c) V ($V \Rightarrow V$ é V); d) F ($V \Rightarrow F$ é F, pois mmc(3,9)=9); e) F ($F \Leftrightarrow V$ é F); f) F ($F \Leftrightarrow V$ é F); g) F ($F \Rightarrow F$ é V? Espere: 2/5=0.4, 1/3=0.33. 0.4 < 0.33 é F. 6=5 é F. $F \Rightarrow F$ é V. Correção: $F \Rightarrow F$ é V). h) F (Pois $x = -2$ torna a hipótese V e a tese F).
a) $V \Rightarrow F$ é F. b) $V \vee F$ é V. c) $F \Leftrightarrow F$ é V. d) $(V \wedge V) \Rightarrow F$ é $V \Rightarrow F$, logo F. e) $V \Rightarrow V$ é V. f) $F \Rightarrow (V \wedge F)$ é $F \Rightarrow F$, logo V. g) $(V \Leftrightarrow V) \vee F$ é $V \vee F$, logo V. h) $F \wedge (F \Rightarrow F)$ é $F \wedge V$, logo F.
3. a) $V \Rightarrow F$ é F. b) $V \vee F$ é V. c) $F \Leftrightarrow F$ é V. d) $(V \wedge V) \Rightarrow F$ é $V \Rightarrow F$, logo F. e) $V \Rightarrow V$ é V. f) $F \Rightarrow (V \wedge F)$ é $F \Rightarrow F$, logo V. g) $(V \Leftrightarrow V) \vee F$ é $V \vee F$, logo V. h) $F \wedge (F \Rightarrow F)$ é $F \wedge V$, logo F.
4. $p(V), q(V), r(F), s(V)$
5. a) $4 \cdot 5 \neq 20$ (F); b) $2 \cdot (10-5) = 8$ (F); c) $4 \cdot 3 \leq 10$ (F); d) $3 \cdot 5 - 1 > 3 \cdot 4$ (V, $14 > 12$); e) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \geq \left(\frac{1}{3}\right)^2$ (F); f) $\sqrt{3} \geq 2$ (F); g) $-(-5) < 6$ (V, $5 < 6$); h) 5 não divide 12 (V).
6. A negação correta é a sentença *r*: "Existe pelo menos um gato que não usa gravata".
7. a) Existe pelo menos um extraterrestre que não usa chapéu. b) Existe pelo menos um elefante que tem asas. c) Nenhum habitante existe em Marte (ou: Todos os habitantes não estão em Marte / Não existe habitante em Marte).

Exercício 3.5
1. (B) A negação de $p \wedge q$ é $\sim p \vee \sim q$.
2. (A) A negação de $A \wedge B$ é $\sim A \vee \sim B$.
3. (B) A negação de $p \vee q$ é $\sim p \wedge \sim q$.
4. (B) A negação de $p \vee q$ é $\sim p \wedge \sim q$.
5. (B) A negação de $p \Rightarrow q$ é $p \wedge \sim q$ (Mantém o primeiro e nega o segundo).
6. (A) A regra é violada (negada) quando a condição ocorre ($S = 1$) mas a consequência não ($A = 0$).
7. (B) A negação de $p \Leftrightarrow q$ é a disjunção exclusiva ($p \veebar q$), ou seja, $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$.
8. (A) Idem anterior: ou ocorre um sem o outro, ou o outro sem o um.
9. (B) A negação de $\forall x, \exists y$ é $\exists x, \forall y$ (troca os quantificadores e nega o verbo).
10. (C) A negação do quantificador universal (Todo) é o existencial negativo (Existe algum que não).

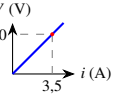
Exercício 3.6
1. a) Tautologia (V, V, V, V). b) Tautologia (V, V, V, V). c) Tautologia (Lei de De Morgan). d) Tautologia (Modus Ponens).
2. a) Tautologia (V, V, F, F $\Leftrightarrow$ V, V, F, F). b) Tautologia (As colunas finais coincidem). c) Tautologia (Fundamental para provas matemáticas).
3. Sim, é uma tautologia (Silogismo Disjuntivo). A tabela resulta em V em todas as linhas, confirmando que o argumento é válido.
4. Para que a disjunção $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r)$ seja FALSA, ambas as condicionais devem ser falsas simultaneamente. • Para $p \Rightarrow q$ ser F, precisamos de $p = V$ e $q = F$. • Para $q \Rightarrow r$ ser F, precisamos de $q = V$ e $r = F$. Ocorre uma contradição: q não pode ser F e V ao mesmo tempo. Logo, é impossível que a proposição seja falsa. Portanto, ela é sempre verdadeira (Tautologia).

Exercício 3.7
1. Verificação via tabela-verdade:
1. a) $p \to q$. b) Para $x = 6$ (V); para $x = 7$ (F).
2. Contrapositiva: "Se um triângulo não é isósceles, então não é equilátero". São equivalentes.
3. Verdadeira ($\forall n$, múltiplos de 4 são pares).
4. Verdadeira (Tautologia: $(p \wedge q) \to p$).
5. Verdadeira (Lei de De Morgan).
6. Verdadeira (Lei de De Morgan).
7. Falsa (não vale para todo x, apenas se $|x| > 3$).
8. Sim, equivalentes (identidade trigonométrica válida $\forall \theta \in \mathbb{R}$).

Exercício 3.8
1. Válido (Modus Ponens).
2. Válido (Modus Tollens).
3. Inválido (Falácia da afirmação do consequente).
4. Válido (Silogismo Hipotético).
5. Inválido (Generalização indevida).
6. Inválido (Recíproca falsa; contraexemplo $x = -4$).
7. Válido (Modus Tollens).
8. Válido (Silogismo Disjuntivo).
9. Inválido (Falácia da negação do antecedente).
10. Válido (Encadeamento dedutivo).
11. Inválido. Falácia da afirmação do consequente: $(p \to q) \wedge q \nRightarrow p$.
12. Válido (Modus Tollens), sob premissas contestáveis.
13. Válido (Modus Tollens), dependente da veracidade empírica das premissas.

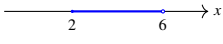
Capítulo 4

Exercício 4.2.1
1. a) Decrescente ($a = -3, b = 5$); b) Crescente ($a = 1/2, b = -1$); c) Constante ($a = 0, b = 4$); d) Decrescente ($a = -1, b = 10$).
2. $y = -2x + 1$. Raiz: $x = 1/2$.
3.
$V(i) = 100i$.
Para $i = 3,5$ A, $V = 350$ V.



4. $L(T) = 10 + 1,1 \cdot 10^{-4}(T - 20)$. Para $T = 120$, $L \approx 10,011$ m.
5. $a = 3, b = 2$. Função $f(x) = 3x + 2$. Logo, $f(10) = 32$.
6. a) $S(t) = 20t + 50$. b) $v = 20$ m/s A taxa de variação (coeficiente angular da reta) é constante, indicando que a cada segundo o automóvel se desloca exatamente 20 metros.
7. a) $V(t) = -45000t + 500000$. b) $V(6) = 230.000,00$.
8. $a < 0$ (reta decrescente) e $b > 0$ (intercepta o eixo y na parte positiva).

9. Sim. $K = 2C \Rightarrow C + 273,15 = 2C \Rightarrow C = 273,15$°C.
10. a) $\Delta x = 5$ cm, logo $k = 40/5 = 8$ N/cm. b) $L(F) = 20 + \frac{F}{8}$ (ou $L = 20 + 0,125F$).
11. (a) $f(x) > 0$ para $x > 2$; $f(x) < 0$ para $x < 2$. (b) $g(x) > 0$ para $x < -3$; $g(x) < 0$ para $x > -3$.
12. (a) Raiz $x = 4$. $f(x) < 0$ se $x < 4$; $f(x) > 0$ se $x > 4$. (b) Raiz $x = 2{,}5$. $g(x) > 0$ se $x < 2{,}5$; $g(x) < 0$ se $x > 2{,}5$. (c) Raiz $t = -8$. $h(t) < 0$ se $t < -8$; $h(t) > 0$ se $t > -8$.
13. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 4\} = [3,4]$.
14. (a) $t = 20$ minutos. (b) $T(t) < 0$ para $t > 20$. Significa que a temperatura da peça atingiu valores negativos (abaixo de zero grau Celsius), ou seja, congelamento, após 20 minutos.
15. Letra **B**. (Para a função ser decrescente, o coeficiente angular deve ser negativo: $a < 0 \Rightarrow k - 3 < 0 \Rightarrow k < 3$).
16. $S = \left]-\frac{20}{13}, +\infty\right[$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{20}{13}\}$
17. $S = [2,6[$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 6\}$



18. O Plano A é economicamente mais vantajoso para $h > 10$ horas de uso.
Resolução: $C_A(h) < C_B(h) \Rightarrow 300 + 40h < 100 + 60h \Rightarrow 200 < 20h \Rightarrow h > 10$.
19. (C) Se $a > 0$, então $S =]-b/a, +\infty[$.
Explicação: Se $a > 0$, ao isolar x na inequação $ax > -b$, o sentido da desigualdade se mantém, resultando em $x > -b/a$.
20. Para $t > 3$ segundos.
Explicação: Deseja-se que a posição $s(t)$ seja menor que 20. Logo, $50 - 10t < 20 \Rightarrow -10t < -30$. Multiplicando por -1, inverte-se o sinal: $10t > 30 \Rightarrow t > 3$. Como t representa tempo, a resposta é válida para qualquer instante após 3 segundos.
21. $x \in [10, 15]$.
22. a) Raízes: 3 e -4. $S =]-\infty, -4] \cup [3, +\infty[$. b) Raízes: 5 e 2. $S =]-\infty, 2[\cup]5, +\infty[$.
c) Raízes: $0, -4, 2$. Análise de sinais: $S = [-4, 0] \cup [2, +\infty[$.
d) Raízes: $1, -1, -2$. $S =]-2, -1[\cup]1, +\infty[$.
23. a) Condição: $x \neq -1$. Raízes do numerador: 3. Análise de sinais: $S =]-1, 3]$.
b) Condição: $x \neq -\frac{5}{2}$. Raízes do numerador: 3. Análise de sinais: $S = \left]-\frac{5}{2}, 3\right[$.
c) Condição: $x \neq 0$. Raízes do numerador: -3 e 3. Análise de sinais: $S = [-3, 0[\cup [3, +\infty[$.
d) $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{3} \leq 0 \Rightarrow \dfrac{3-(x-2)}{3(x-2)} \leq 0 \Rightarrow \dfrac{5-x}{3(x-2)} \leq 0$. Condição: $x \neq 2$. Raízes do numerador: 5. Análise de sinais: $S =]-\infty, 2[\cup [5, +\infty[$.
24. Lucro positivo: $(x-20)(100-x) > 0$. Raízes 20 e 100. Concavidade para baixo. $S =]20, 100[$. A fábrica lucra se vender entre 20 e 100 peças. As raízes são os pontos de *break-even* (lucro zero).
25. $v(t) < 0 \Rightarrow \frac{(t-1)(t-3)}{t+1} < 0$. Como $t \geq 0$, o denominador $t+1$ é sempre positivo. Basta analisar $(t-1)(t-3) < 0$. $S =]1, 3[$. O movimento é retrógrado entre $t = 1$s e $t = 3$s.
26 a) Quadro de sinais:

	-3		1		4	
	$-$	$+$		$+$		$+$
	$-$		$-$		$-$	
	$+$					$+$
$f(x)$		$-$		$+$		$+$

b) $f(x) \leq 0$ ocorre em $[-3, 4]$. Note que em $x = 1$, $f(x) = 0$, que satisfaz a condição. $S = [-3, 4[$.
27. a) $\Delta V / \Delta T \approx 0,366$ mL/°C (constante). b) $V(T) = 0,366T + 100$. c) $V(T) = 0 \Rightarrow 0,366T = -100 \Rightarrow T \approx -273,2$°C (Zero Absoluto).
28. a) $\Delta L / \Delta F = 0,4$ cm/N (constante). b) $L_0 = 15$ cm. A inclinação é $1/k$, logo $1/k = 0,4 \Rightarrow k = 2,5$ N/cm. c) $L(F) = 0,4F + 15$. Para $L = 20$: $20 = 0,4F + 15 \Rightarrow 0,4F = 5 \Rightarrow F = 12,5$ N.
29. a) $\Delta y / \Delta x = (0,35 - 0,25)/(4 - 2) = 0,05$. Usando ponto $(2; 0,25)$: $0,25 = 0,05(2) + b \Rightarrow b = 0,15$. Eq: $y = 0,05x + 0,15$. b) $1/V_{\max} = 0,15 \Rightarrow V_{\max} \approx 6,67\ \mu$M/min.
30. $\Delta R / \Delta T = (53,93 - 50,00)/(40 - 20) = 3,93/20 = 0,1965\ \Omega/$°C. Significa que a resistência aumenta aproximadamente $0,2\,\Omega$ para cada grau Celsius de aquecimento.
31. a) $\Delta P / \Delta h = 1/10 = 0,1$ atm/m. Intercepto $P(0) = 1$. Logo, $P(h) = 0,1h + 1$. b) $15 = 0,1h + 1 \Rightarrow 0,1h = 14 \Rightarrow h = 140$m.

Exercício 4.2.2

1. a) $x = 1 \pm \sqrt{3}$; b) $x = 3/2$ (raiz dupla); c) $x_1 = 2\sqrt{5}, x_2 = -\sqrt{5}$; d) $S = \emptyset$ (sem raízes reais, pois $\Delta = -12 < 0$).
2. Para tangenciar o eixo x, o discriminante deve ser nulo ($\Delta = 0$). Com $\Delta = 4^2 - 4(k)(1) = 16 - 4k$, temos $16 - 4k = 0 \Rightarrow k = 4$.
3. Usando soma e produto: $S = (2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) = 4$; $P = (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$. A equação é $x^2 - 4x + 1 = 0$.
4. a) Concavidade para baixo ($a = -1 < 0$); b) Raízes: $x_1 = -2, x_2 = 4$; c) Interseção com o eixo y no ponto $(0, 8)$.
5. Alternativa correta: **(b)**. Se a e c têm sinais opostos, o produto ac é negativo. Logo, $-4ac$ é positivo, e como $b^2 \geq 0$, o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ será sempre positivo.
6. Fazendo $y = x^2$, a equação se torna $y^2 - 5y + 4 = 0$, cujas soluções são $y = 1$ e $y = 4$. Voltando para x, temos $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ e $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$. Soluções: $\{-2, -1, 1, 2\}$.
7. Seja a largura L. O comprimento é $L + 5$. A área é $L(L+5) = 24 \Rightarrow L^2 + 5L - 24 = 0$. A solução positiva é $L = 3$. As dimensões são 3 m de largura e 8 m de comprimento.
8. A soma das raízes é $S = -b/a = -(-(k+1))/2 = (k+1)/2$. Como $S = 3$, temos $(k+1)/2 = 3 \Rightarrow k + 1 = 6 \Rightarrow k = 5$.
9. Alternativa correta: **(d)**.
10. a) A altura inicial é $h(0) = 45$ metros. b) Fazendo $h(t) = 0$, tem-se $-5t^2 + 40t + 45 = 0$, que simplifica para $t^2 - 8t - 9 = 0$. A solução positiva é $t = 9$. O projétil atinge o solo após 9 segundos.
11. a) $V(4, -1)$, Mínimo; b) $V(-1, 3)$, Máximo; c) $V(0, 6)$, Mínimo; d) $V(5, 25)$, Máximo.
12. Para $f(x)$, $\mathrm{Im}(f) = [-1, +\infty[$. Para $g(x)$, $\mathrm{Im}(g) =]-\infty, 3]$.
13. O valor mínimo é $y_V = -\Delta/(4a) = 5$. Com $\Delta = 100 - 4m$, tem-se $-(100 - 4m)/4 = 5 \Rightarrow -100 + 4m = 20 \Rightarrow 4m = 120 \Rightarrow m = 30$.
14. Usando a forma canônica $f(x) = a(x-1)^2 - 9$ e o ponto $(0, -8)$, tem-se $-8 = a(0-1)^2 - 9 \Rightarrow a = 1$. A equação é $f(x) = x^2 - 2x - 8$.
15. A área é $A(x) = x(200 - x) = -x^2 + 200x$. O máximo ocorre no vértice $x_V = -200/(2(-1)) = 100$. As dimensões são 100m por 100m (um quadrado).
16. A altura máxima é o $y_V = -\Delta/(4a) = -(2^2 - 4(-0.05)(0))/(4(-0.05)) = -4/(-0.2) = 20$ metros.
17. a) O número de unidades é $x_V = -100/(2(-1)) = 50$ unidades. b) O lucro máximo é $L(50) = -50^2 + 100(50) - 1600 = 900$, ou seja, R$ 900.000,00.
18. $x_V = 2$. Pela simetria da parábola, o x do vértice está no ponto médio entre os x de dois pontos com a mesma imagem. $x_V = (1+3)/2 = 2$.
19. $x_V = -3$, $y_V = -8$. A forma canônica é $f(x) = 2(x+3)^2 - 8$.
20. Alternativa correta: **(a)**. O ponto $(0, 7)$ está no gráfico. Como o vértice $(2, 3)$ tem ordenada menor que o intercepto-y, a parábola deve "descer"de $(0, 7)$ até $(2, 3)$ e depois "subir", o que caracteriza uma concavidade para cima ($a > 0$).
21. a) $f(x) > 0$ para $x < 1$ ou $x > 4$; $f(x) < 0$ para $1 < x < 4$. b) $g(x) > 0$ para $1 < x < 4$; $g(x) < 0$ para $x < 1$ ou $x > 4$. c) $h(x) > 0$ para $x \neq 2$; $h(x) = 0$ em $x = 2$. d) $p(x) < 0$ para $x \neq 2$; $p(x) = 0$ em $x = 2$. e) $q(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. f) $r(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
22. As raízes de $-x^2 + 3x + 4 = 0$ são $x = -1$ e $x = 4$. Como $a < 0$, a função é negativa ou nula fora do intervalo das raízes. Solução: $S =]-\infty, -1] \cup [4, +\infty[$.
23. Para que a função seja sempre negativa, deve-se ter $a < 0$ e $\Delta < 0$. A condição $a < 0$ implica $k < 0$. O discriminante é $\Delta = (-2)^2 - 4(k)(-1) = 4 + 4k$. A condição $\Delta < 0$ implica

$4+4k<0$, ou seja, $k<-1$. A interseção das condições é $k<-1$.

24. A inequação é $-5t^2+50t>120$, que simplifica para $t^2-10t+24<0$. As raízes de $t^2-10t+24=0$ são $t=4$ e $t=6$. Como $a>0$ para esta nova inequação, o sinal é negativo entre as raízes. O intervalo de tempo é $]4,6[$ segundos.

25. As raízes de $x^2-3x+2=0$ são $x=1$ e $x=2$. Como $a>0$, a função é negativa entre as raízes. Alternativa correta: (B).

26. As raízes da equação $-x^2+7x-10=0$ são $x=2$ e $x=5$. Como $a<0$, a parábola tem concavidade para baixo, sendo positiva ou nula entre as raízes. Solução: $S=[2,5]$.

27. A inequação simplifica para $x^2-8x+7\geq 0$. As raízes são $x=1$ e $x=7$. Como $a>0$, a função é positiva ou nula fora do intervalo das raízes. $S=]-\infty,1]\cup[7,+\infty[$.

28. Tem-se $f(1)=6$, logo $2f(1)=12$. A inequação é $x^2-3x+8>12$, que simplifica para $x^2-3x-4>0$. As raízes são $x=-1$ e $x=4$. Como $a>0$, a função é positiva fora do intervalo das raízes. Solução: $S=]-\infty,-1[\cup]4,+\infty[$.

29. A solução de $x^2-5x+4<0$ é o conjunto $A=]1,4[$. A interseção de A com o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ contém os naturais estritamente entre 1 e 4. Solução: $A\cap\mathbb{N}=\{2,3\}$.

30. Para que a inequação seja sempre satisfeita, a parábola deve ter concavidade para cima ($a=1>0$, o que já ocorre) e não deve ter raízes reais ($\Delta<0$). O discriminante é $\Delta=(-6)^2-4(1)(m)=36-4m$. A condição é $36-4m<0$, o que implica $m>9$. Solução: $S=]9,+\infty[$.

31. A condição é $-t^2+8t\geq 12$, que é equivalente a $t^2-8t+12\leq 0$. As raízes de $t^2-8t+12=0$ são $t=2$ e $t=6$. Como $a>0$ para esta última inequação, o sinal é negativo ou nulo entre as raízes. O intervalo de tempo é $[2,6]$ segundos.

32. O primeiro fator tem raízes 2 e 6; o segundo, 0 e 5. Analisando o produto dos sinais no quadro, a solução é $S=]0,2[\cup]5,6[$.

33. A condição de existência da raiz quadrada é $x^2-9\geq 0$. As raízes são -3 e 3. Como $a>0$, a função é positiva ou nula fora do intervalo das raízes. O domínio é $D=]-\infty,-3]\cup[3,+\infty[$.

34. O numerador tem raízes 1 e 4; o denominador, 0 e 4. Com a restrição $x\neq 4$, a inequação equivale a $\frac{x-1}{x}\leq 0$. A solução é $]0,1]$. A única solução inteira neste intervalo é $k=1$. Alternativa (A).

35. A inequação é $\frac{(5-x)(x-1)(x-3)}{(x-1)^2}\geq 0$. Com a restrição $x\neq 1$, simplifica-se para $\frac{(5-x)(x-3)}{x-1}\geq 0$. Analisando o quadro de sinais, a solução é $S=]-\infty,1[\cup[3,5]$. Alternativa (B).

36. A inequação é equivalente a $\frac{x^2+5x+6}{x+1}<0$. O numerador tem raízes -3 e -2; o denominador, -1. Analisando o quadro de sinais, a solução é $S=]-\infty,-3[\cup]-2,-1[$.

37. A inequação equivale a $\frac{4-x}{x^2-4x+3}\geq 0$. Com as restrições $x\neq 1$ e $x\neq 3$, a análise do quadro de sinais resulta em $S=]-\infty,1[\cup]3,4]$. Alternativa (D).

38. O denominador é sempre negativo. Multiplicando por ele e invertendo a desigualdade, a inequação se torna $-x^2+2\geq -x^2+2x-2$, que simplifica para $x\leq 2$. Alternativa (B).

39. A inequação equivale a $\frac{x^2-4}{9-x^2}\geq 0$. As raízes do numerador são ± 2; as do denominador, ± 3. Analisando o quadro de sinais, a solução é $S=]-3,-2]\cup[2,3[$. Alternativa (C).

40. O primeiro fator tem raízes 2 e 4. O segundo fator tem raízes $\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$. Analisando o produto dos sinais, o sistema é estável ($S(t)>0$) quando $t\in\left]\frac{5-\sqrt{5}}{2},2\right[\cup\left]\frac{5+\sqrt{5}}{2},4\right[$.

Exercício 4.2.3

1. O ponto de inflexão $I(2,5)$ é o ponto médio entre dois pontos simétricos. Para $P_1(0,1)$, o ponto simétrico $P_3(x,y)$ é tal que $\frac{0+x}{2}=2$ e $\frac{1+y}{2}=5$, resultando em $P_3(4,9)$. Com os três pontos (0,1), (3,11) e (4,9), monta-se o sistema e encontra-se o modelo $f(x)=-x^3+6x^2-7x+1$.

2. Calculando as diferenças, percebe-se que a terceira variação não é constante. Assumindo que as duas últimas medições estão corretas, a terceira variação deveria ser 6. Reconstruindo a tabela de trás para frente, o valor de $P(2)$ deveria ser 16 para manter o padrão. O valor corrompido é $P(2)=14$, e o valor corrigido é 16.

3. A taxa de variação $V(t)$ é uma parábola com concavidade para baixo. Seu máximo ocorre no vértice. A coordenada t do vértice é $t_V=\frac{-18}{2(-3)}=3$. A taxa de absorção é máxima no instante $t=3$ horas.

4. A segunda variação não é constante (resulta em 4 e 10), descartando um modelo quadrático. A terceira variação é constante e igual a 6, o que justifica a adequação de um modelo cúbico. O coeficiente líder seria $a=\frac{1}{6}(6)=1$.

5. A forma fatorada da função é $f(x)=a(x+2)(x-1)(x-3)$. Usando o ponto $f(0)=6$, encontra-se $6=a(2)(-1)(-3)$, o que resulta em $a=1$. O modelo é $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$. O coeficiente a está relacionado à terceira variação por $a=\frac{1}{6}\frac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3}$. Com $a=1$ e $\Delta x=1$, a terceira variação é $\frac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3}=6a=6$.

Exercício 4.2.4

1. a) $C(100)=100$ reais/cliente; $C(1)=10.000$ reais/cliente. b) $\lim_{x\to 0^+}\frac{10000}{x}=+\infty$. Isso significa que, à medida que o número de clientes tende a zero, o custo fixo é diluído em uma base tão pequena que o custo por cliente "explode", tendendo ao infinito. É inviável porque um único cliente teria que arcar com todo o custo fixo da empresa.

2. a) $C_m(100)=52$ reais/litro; $C_m(10.000)=2,50$ reais/litro. b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{5000+2x}{x}=\lim_{x\to+\infty}(\frac{5000}{x}+2)=2$. O limite representa o custo mínimo teórico de produção. À medida que a produção aumenta, o custo fixo de R$ 5.000 é diluído por uma quantidade imensa de litros, tornando sua contribuição para o custo médio desprezível. O custo médio se aproxima, então, do custo variável puro, que é de R$ 2,00 por litro.

3. a) $R(3)=\frac{3^2-9}{3-3}=\frac{0}{0}$, uma indeterminação. b) $R(x)=\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=x+3$, para $x\neq 3$. c) $\lim_{x\to 3}(x+3)=6$. O limite revela que a tendência da taxa de fotossíntese, ao se aproximar da radiação $x=3$, era de 6 unidades. O limite "preencheu o buraco" deixado pela falha do sensor.

4. $\lim_{p\to 10^-}F(p)=\frac{500}{10}=50$. $\lim_{p\to 10^+}F(p)=\frac{400}{10}=40$. Como os limites laterais são diferentes ($50\neq 40$), o limite geral em $p=10$ não existe. Na prática, isso significa que há um "salto" no preço. Um cliente que compra 10 toneladas paga R$ 50, mas se comprar 10,001 toneladas, o preço por tonelada cai abruptamente para perto de R$ 40.

5. $\lim_{t\to+\infty}P_A(t)=+\infty$. $\lim_{t\to+\infty}P_B(t)=10.000$. O Modelo B (Racional) prevê um crescimento sustentável que se estabiliza em um teto de 10.000 indivíduos, representando a capacidade de suporte do ambiente. O Modelo A (Cúbico) prevê um crescimento explosivo e infinito, o que é biologicamente insustentável a longo prazo.

6. a) Modelo de Saturação

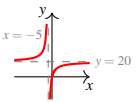
i. Usando os pontos $(5,10)$ e $(15,15)$, monta-se o sistema: $\begin{cases}10=\frac{5L}{K+5}\\15=\frac{15L}{K+15}\end{cases}$. Resolvendo, encontra-se $K=5$ e $L=20$. O modelo é $g(x)=\frac{20x}{5+x}$.

ii. Domínio (dose não pode ser negativa): $D=[0,+\infty[$. Contradomínio: $\mathbb{R}$. Imagem (a produção parte de 0 e se aproxima do teto L=20): $I=[0,20[$.

iii. $\lim_{x\to+\infty}\frac{20x}{5+x}=20$. A assíntota horizontal é $y=20$.

iv. $\lim_{x\to(-5)^-}\frac{20x}{5+x}=+\infty$ e $\lim_{x\to(-5)^+}\frac{20x}{5+x}=-\infty$. Matematicamente, a função "explode" em torno de $x=-5$. Fisicamente, não tem interpretação, pois a dose não pode ser negativa.

v. Esboço do gráfico:



b) Modelo de Custo Inverso

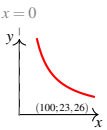
i. Usando o ponto $(100; 23,26)$, tem-se $23,26 = \frac{C}{100}$, o que resulta em $C = 2326$. O modelo é $f(x) = \frac{2326}{x}$.

ii. Domínio (poder germinativo em %): $D =]0,100]$. Contradomínio: $\mathbb{R}$. Imagem (o custo mínimo ocorre em $x = 100$ e cresce à medida que x diminui): $I = [23,26,+\infty[$.

iii. $\lim_{x\to 0+} \frac{2326}{x} = +\infty$. Interpretação: se o poder germinativo tende a zero, o custo tende ao infinito. $\lim_{x\to 0-} \frac{2326}{x} = -\infty$. Não possui interpretação física.

iv. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2326}{x} = 0$. A assíntota horizontal é $y = 0$.

v. Esboço do gráfico:



Exercício 4.3.2:

1. O expoente é $3^{-1} = 1/3$. Assim, a expressão é $3^{1/3} = \sqrt[3]{3}$. Alternativa (A).

2. Reduzindo ambos os lados à base 3: $(3^3)^{x-1} = ((3^2)^x)^{1/4}$, o que resulta em $3^{3x-3} = 3^{x/2}$. Igualando os expoentes, tem-se $3x-3 = x/2 \Rightarrow 5x = 6 \Rightarrow x = 1,2$. Alternativa (C).

3. Fatorando a expressão, tem-se $2^{x-1}(1-2^3) = -56 \Rightarrow 2^{x-1}(-7) = -56 \Rightarrow 2^{x-1} = 8 = 2^3$. Logo, $x-1 = 3 \Rightarrow x = 4$. O número 4 é divisível por 4. Alternativa (C).

4. Fazendo a substituição $y = 2^x$, a equação torna-se $\frac{y^2+4}{5} = y$, que é equivalente à equação quadrática $y^2 - 5y + 4 = 0$. As soluções são $y = 1$ e $y = 4$. Retornando à variável original, $2^x = 1 \Rightarrow x = 0$ e $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$. Solução: $S = \{0,2\}$.

5. Fazendo a substituição $y = (\frac{2}{5})^x$, a equação se torna $y^2 + y - 2 = 0$, cujas raízes são $y = 1$ e $y = -2$. Como y deve ser positivo, descarta-se $y = -2$. De $(\frac{2}{5})^x = 1$, conclui-se que $x = 0$. Solução: $S = \{0\}$.

6. A oitava parte da quantidade inicial é $\frac{1}{8} \cdot 10000$. A equação a ser resolvida é $10000 \cdot 2^{-t} = \frac{1}{8} \cdot 10000$. Simplificando, obtém-se $2^{-t} = \frac{1}{8} = 2^{-3}$. Igualando os expoentes, tem-se $-t = -3$, o que resulta em $t = 3$ anos.

6. a) $\alpha = 54$ e $\beta = -\frac{1}{90}$.

b) $t = 360$ minutos ou 6 horas.

Exercício 4.3.3

1. 2/3

2.1/2. (Dica: para um trinômio $x^2 + Bx + C$ ser quadrado perfeito, deve-se ter $C = (B/2)^2$. Use isso para encontrar m e depois calcule o logaritmo pedido).

3.27.

4. Alternativa (E). (Dica: use a propriedade $\log 5 = \log(10/2) = \log 10 - \log 2$ e encontre $\log 2$ a partir de $\log 8$).

5. $\frac{3m+2n}{m+1}$. (Dica: some $2ab$ a ambos os lados da identidade $a^2 + b^2 = 70ab$ para obter uma expressão para $(a+b)^2$. Em seguida, use a fórmula de mudança de base para expressar $\log_{10} 2$ e $\log_{10} 3$ em função de m e n).

6. (D).

7. (C).

8. $\frac{2x+y+1}{1-x}$.

9. 0.

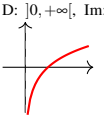
10. (E).

11. (E).

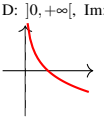
12. (C).

13.

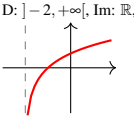
a) D: $]0,+\infty[$, Im: $\mathbb{R}$, A.V.: $x = 0$.



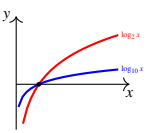
b) D: $]0,+\infty[$, Im: $\mathbb{R}$, A.V.: $x = 0$.



c) D: $]-2,+\infty[$, Im: $\mathbb{R}$, A.V.: $x = -2$.



14. O gráfico de $y = \log_2 x$ cresce mais rápido. Justificativa: para um mesmo valor de $x > 1$, uma base menor (2) precisa de um expoente maior para alcançá-lo, em comparação com uma base maior (10).



15. Domínio: $x^2 - 4 > 0 \Rightarrow D =]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$. Limite: $\lim_{x\to 2+} \log_5(x^2-4) = -\infty$. A função tende a menos infinito quando x se aproxima de 2 pela direita, o que define a reta $x = 2$ como uma assíntota vertical.

16. Todas são V.

17. -2

18. $\log 6$

19. Demonstração: Vide! Justificativa de positividade: Como $o < a < 1$ e $2c^2 > 1$, $\log 2c^2 < 0$. Pelo gráfico, $c > 0$, assim o produto é positivo.

20. a) $60 \cdot (1,04)^9 \approx 85,9bi$. b) $\log_{1,04} 2 \approx 18 \rightarrow$ ano de 2014; $\log_{1,04} 3 \approx 28 \rightarrow$ ano de 2024. c) $log_{1,04} x$

21. pH $= 2 \Rightarrow [H^+]_L = 10^{-2}$. pH $= 4 \Rightarrow [H^+]_T = 10^{-4}$. A razão é $\frac{10^{-2}}{10^{-4}} = 100$. A concentração no limão é 100 vezes maior.

22. a) $\beta = 10 \cdot \log_{10}(10^6) = 60$ dB. b) Não. Dobrar a intensidade I adiciona um valor constante de $10 \cdot \log_{10}(2) \approx 3$ dB ao nível sonoro, em vez de dobrá-lo.

23 $x = 4$.

24 $x = 99$. (Dica: use a propriedade da diferença de logaritmos e a definição).

25. $S = \{64\}$. (Dica: mude todos os logaritmos para a base 2).

26. $x = 2$. (Dica: a equação pode ser escrita como $\log_3(x+16) = \log_3(x) + 2$).

27. 3/2. (Dica: use as propriedades para simplificar ambos os lados da equação primeiro).

26. $S = \{3\}$. (Dica: agrupe os termos com $\log x$ de um lado e os demais do outro, depois use as propriedades).

29. $S = \{(4,2)\}$. (Dica: mude a base do segundo logaritmo para 2 e use a substituição $y = 8/x$ na primeira equação).

30. $x = 1$. (Dica: simplifique o logaritmando e use a propriedade de mudança de base no lado direito da equação).

31. $S = \varnothing$. (Dica: analise as condições de existência da base x e do logaritmando $1 - |x|$ simultaneamente).

32. (E). (Dica: a primeira condição de existência a ser verificada é a do logaritmando, $x^2 > 0$, que é satisfeita por $x = -10$. A segunda é a do radical, $x^2 - \log_{10} x^2 \geq 0$. Para $x = -10$, o radicando é $100 - \log_{10}(100) = 98 > 0$. Portanto, a função está definida, mas o valor $f(-10) = -10 + \sqrt{98}$ não corresponde a nenhuma das alternativas numéricas, indicando uma inconsistência no problema proposto).

33. a) 68% b) $t = 99$ minutos

34. (A). (Dica: use a propriedade da cadeia de logaritmos para simplificar o lado direito da inequação para 2).

35. a) $S = \{2\}$. b) $S =]1,2[$. (Dica: combine os logaritmos, resolva a equação/inequação quadrática resultante e faça a interseção com a con-

dição de existência $x > 1$).

36. a) $x = 1/7$. b) $S =]-\infty, -2[\cup]1/7, +\infty[$. (Dica: resolva a equação/inequação e faça a interseção com a condição de existência do logaritmando).

37. $D = [1/2, 1[\cup]1, +\infty[$. (Dica: estabeleça três condições simultâneas: o radicando deve ser ≥ 0, o logaritmando deve ser > 0, e o denominador deve ser $\neq 0$).

38. (A). (Dica: a resolução deve ser dividida em dois casos, para $0 < x < 1$ e para $x > 1$, analisando a inversão da desigualdade).

39. $0 \leq t < 3$ horas. (Dica: resolva a inequação e lembre-se que o tempo t não pode ser negativo).

Exercício 4.3.4

1. Do gráfico, extraem-se os pontos (0, 2) e (1, 4). Substituindo em $y = a^x + b$, obtém-se o sistema: $\begin{cases} 2 = a^0 + b \\ 4 = a^1 + b \end{cases}$. Da primeira equação, $b = 1$. Substituindo na segunda, $a = 3$. O valor pedido é $a^3 + b^3 = 3^3 + 1^3 = 27 + 1 = 28$.

2. a) $f(-2) = 2^{-2} + 2^2 = 17/4$; $f(2) = 2^2 + 2^{-2} = 17/4$; $f(0) = 2^0 + 2^0 = 2$. O valor é $[17/4 + 17/4] \cdot 2 = 17$. b) A função é a soma de um número positivo com seu inverso. Pela desigualdade das médias, $2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$. O mínimo ocorre em $x = 0$. A imagem é $I = [2, +\infty[$.

3. a) Verdadeiro, pois $g(t+1) = 2g(t)$. b) Verdadeiro, pois $g(51) - g(50) = 10(2^{51} - 2^{50}) = 10 \cdot 2^{50}(2-1) = g(50)$. c) Falso, pois $f(1) = 37$ e $g(1) = 20$. d) Falso, para $t = 2$ tem-se $f(2) = g(2) = 40$.

4. a) Para $t = 2$, $Q = 700 - 400e^{-1} \approx 700 - 400/2,7183 \approx 553$ peças. b) Para $t = 0$, $Q = 700 - 400e^0 = 300$ peças. Os resultados são coerentes, pois indicam um aumento da produção com a experiência, conforme o conceito de curva de aprendizagem.

5. $S =]-\infty, 3]$.

6. $S =]-3, 1]$.

7. (B). (Dica: escreva o lado esquerdo na base $3/5$, resultando em $(3/5)^{x-2} > (3/5)^{1-2x}$. Como a base está entre 0 e 1, inverta a desigualdade dos expoentes).

8. (D). (Dica: reescreva a inequação como $(1/2)^3 < (1/2)^n \leq (1/2)^{-3}$. Lembre-se de inverter as desigualdades ao comparar os expoentes. Os inteiros no intervalo são -2, -1, 0, 1, 2, 3).

9. (C). (Dica: faça a substituição $y = 3^x$. A inequação se torna $9/y + 9y > 18$, que simplifica para $(y-1)^2 > 0$. A solução é todo $y \neq 1$, o que implica $x \neq 0$).

10. A idade máxima é de aproximadamente 688 anos. (Dica: a inequação é $N_0 \cdot (0,5)^{t/5730} \geq 0,92 \cdot N_0$. Usando o dado fornecido, tem-se $(0,5)^{t/5730} \geq (0,5)^{0,12}$. Como a base é menor que 1, inverte-se a desigualdade: $t/5730 \leq 0,12$).

11. a) $P(4) = P_0 \cdot b^4 \Rightarrow 3200 = 50 \cdot b^4 b^4 = 64 \Rightarrow b = \sqrt[4]{64} = \sqrt{8} \approx 2,828$. b) Substituindo P_0 e b: $P(t) = 50 \cdot (2,828)^t$. c) $10.000 = 50 \cdot (2,828)^t \Rightarrow 200 = (2,828)^t$. Testando $t = 5$: $(2,828)^5 = (\sqrt{8})^5 = 8^{2,5} = 8^2 \cdot \sqrt{8} 64 \cdot 2,828 = 180,992$. Como $180,992 \approx 200$, a estimativa de 5 semanas é válida para o contexto.

12. a) 20% ao ano. b) R$ 39.321,60. c) Aproximadamente 7,2 anos.

13. a) As razões são $\approx 1,45$, $\approx 1,465$, $\approx 1,47$. Como são próximas, o modelo é adequado. b) Usando $\bar{b} \approx 1,46$, a estimativa para 2026 é de aproximadamente 265 fazendas.

14. Banco Terra: $i_{ef} \approx 12,55\%$. Banco Campo: $i_{ef} \approx 12,57\%$. A proposta do Banco Terra é mais vantajosa.

15. 8 meses. (Dica: resolva a equação $4096 \cdot M_0 \cdot (0,5)^{t/2} = M_0 \cdot 2^t$. Simplifique para $2^{12} \cdot 2^{-t/2} = 2^t$ e iguale os expoentes).

Exercício 4.3.5

1. (D). A função e^x está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ e sua imagem é o conjunto dos números reais positivos, $\mathbb{R}_+^*$.

2. a) $k \approx 0,051$. b) Aproximadamente $45,7°$C.

3. a) O valor máximo é $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,399$. b) O valor de $f(x)$ tende a 0. Isso implica que a probabilidade de ocorrerem eventos muito distantes da média é extremamente baixa, tornando-os raros.

4. a) A altura mínima é $y(0) = 10$ metros. b) A altura nos pontos de suspensão é $y(20) \approx 37,6$ metros.

5. a) A probabilidade é de aproximadamente 5%. b) A probabilidade é de aproximadamente 22,5%.

Exercício 4.3.6

1. a) A razão é constante e igual a 1,5. b) Os valores de $\log_{10}(P)$ são aprox. 1,30, 1,48, 1,65, 1,83, 2,01. c) $m = \log_{10}(1,5) \approx 0,176$ e $c = \log_{10}(20) \approx 1,30$. Portanto, $b = 1,5$ e $P_0 = 20$.

2. a) $N_0 = 100$. b) $b \approx 1,78$. c) $N(t) = 100 \cdot (1,78)^t$.

3. A constante é $k \approx 3$. (Dica: a equação linearizada é $\log_{10}(T) = 2 - kc$. O coeficiente angular da reta formada pelos dados é $-k$).

4. a) $b = \sqrt{2} \approx 1,414$. A função é $N(t) = 50 \cdot (\sqrt{2})^t$. b) A equação da reta é $Y \approx 0,1505t + \log_{10}(50)$. O coeficiente angular $m = \log_{10}(\sqrt{2})$ representa o logaritmo do fator de crescimento anual.

5. O Surto B. Justificativa: uma razão constante entre termos sucessivos é a definição de uma progressão geométrica, que é descrita por uma função exponencial. O coeficiente angular da reta no gráfico semilog representaria o logaritmo da taxa de transmissão diária do surto.

Exercício 4.3.7

1. a) Os pontos no gráfico log-log são aprox. (-1,7, -0,7), (0,48, 1,18), (1,85, 2,0) e (3,6, 3,4). Eles se alinham em uma reta. b) $\beta \approx \frac{3,4-(-0,7)}{3,6-(-1,7)} \approx 0,77$. Sim, o valor é muito próximo de $3/4 = 0,75$.

2. a) $\beta = 3/2 = 1,5$. b) A inclinação da reta seria exatamente 1,5. c) $T \approx (1,52)^{1,5} \approx 1,88$ anos.

3. $\beta \approx -6,6$. (Dica: Se a tensão aumenta por um fator de 1,1 (10%), a vida útil muda por um fator de $(1,1)^\beta$. Queremos que $(1,1)^\beta \approx 0,5$. Resolvendo $\beta \cdot \log(1,1) = \log(0,5)$, encontramos $\beta \approx -6,6$).

4. a) $\beta = 1,2$. b) $L = 100^{1,2} = 100^1 \cdot 100^{0,2} \approx 100 \cdot 2,5 = 250$ km.

5. O fenômeno segue um modelo de potência ($y = \alpha x^\beta$). Justificativa: A linearidade no gráfico log-log é a assinatura de uma lei de potência. Ele determinaria os parâmetros da seguinte forma: a inclinação da reta no Gráfico 2 é o expoente β, e o intercepto da reta no eixo Y é $A = \log(\alpha)$, de onde se calcula $\alpha = 10^A$.

Exercício 4.4.5

2. a) D: $\mathbb{R}$, Im: $[1,3]$. b) D: $\mathbb{R}$, Im: $[-1,1]$. c) D: $\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, Im: $\mathbb{R}$.

2. $\frac{7\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{3}$ e $\frac{13\pi}{3}$ são côngruos a $\frac{\pi}{3}$, pois a diferença para $\frac{\pi}{3}$ é um múltiplo de 2π.

3. a) Verdadeiro (função par). b) Verdadeiro (função ímpar). c) Falso, a identidade fundamental vale para qualquer ângulo $x \in \mathbb{R}$.

4. A: $(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. B: $(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2})$. C: $(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. D: $(\frac{11\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

5. a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Nesses pontos, $\cos(x) = 0$, o que levaria a uma divisão por zero. b) O período é π, que é metade do período de seno e cosseno (2π).

Exercício 4.4.6

1. a) $D = \mathbb{R}$, Im= $[-1,1]$, Amp= 1, Per= 2π. b) $D = \mathbb{R}$, Im= $[-1,1]$, Amp= 1, Per= 2π. c) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$, Im= $\mathbb{R}$, Amp=N/D, Per= π.

2. a) $h = 12 \cdot \text{tg}(60°) = 12\sqrt{3} \approx 20,78$ m. b) Erro $= |20,78 - 20,5|/20,5 \approx 1,36\%$.

3. Resposta individual (depende dos dados coletados em campo).

Exercício 4.4.7

1. a) $T(4) \approx 26,88°$C. b) Nos meses de Maio ($x = 5$) e Novembro ($x = 11$). c) Uma redução de $1,85°$C (de $25,95°$C para $24,1°$C). d) O gráfico é uma cossenóide com valor médio

de 25,95, amplitude de 1,85, máximo em $x = 2$ e período de 12 meses.
2. a) $h(t) = 25 - 20\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$. b) $h(1) = 35$ metros. c) Em $t = 1$ minuto e $t = 2$ minutos.
3. a) Temperatura média de 12°C e amplitude térmica de 8°C. b) A temperatura mais alta ocorre em Julho ($m = 7$) e a mais baixa em Janeiro ($m = 1$).
4. a) $v(t) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$. b) A turbina opera de forma eficiente por 8 horas em cada ciclo de 12 horas (nos intervalos $1 < t < 5$ e $7 < t < 11$).
5. a) O período do ciclo para ambas as espécies é de 12 meses. b) A população de predadores atinge seu máximo no mês $t = 3$. O atraso significa que a população de predadores cresce em resposta à abundância de presas, atingindo seu pico algum tempo depois que a fonte de alimento se torna máxima.
6. a) Significa que ambas as notas são percebidas com o mesmo volume. b) Período de Lá: $1/440$ s. Período de Dó: $1/523$ s. A nota Dó (C5) é mais "aguda", pois tem menor período e, consequentemente, maior frequência.
7. a) $d(\theta) = 100 \cdot \tan(\theta)$. b) A distância d tende ao infinito. As assíntotas significam que, quando o feixe de luz se torna paralelo à praia, ele "nunca mais" a atinge, viajando infinitamente ao longo de uma linha paralela.

Exercício 4.4.8

1. O ângulo é $\theta_2 \approx 124,7°$. (Dica: Isole $\cos(180° - \theta_2)$ na fórmula, calcule seu valor, e então use a função arccos para encontrar $180° - \theta_2$).
2. O ângulo de elevação é $\alpha \approx 29,7°$. (Dica: A relação entre a altura da haste e o comprimento da sombra forma um triângulo retângulo. Use a função arctg(altura/sombra)).
3. O ângulo é $\theta \approx 30,5°$. (Dica: O ângulo é dado por $\theta = \text{arctg}(50/85)$).
4. A proa é de aproximadamente $36,9°$. (Dica: Primeiro, calcule o ângulo α dentro do triângulo retângulo com catetos 150 e 200 usando $\alpha = \text{arctg}(150/200)$. A proa será $90° - \alpha$).
5. O ângulo do joelho é de aproximadamente $108,4°$. (Dica: Use a fórmula da distância para encontrar os comprimentos dos três segmentos (coxa, canela e a distância direta ancatornozelo). Em seguida, aplique a Lei dos Cossenos para encontrar o ângulo no vértice J).

Exercício 4.5.2

1. (B). O módulo de x é x se $x \geq 0$ e $-x$ se $x < 0$. Em ambos os casos, o resultado é o maior valor entre o número e seu oposto.
2. (C). A equação se desmembra em $5x - 1 = 6$ (cuja raiz é $x_1 = 7/5$) e $5x - 1 = -6$ (cuja raiz é $x_2 = -1$). A soma das raízes é $7/5 + (-1) = 2/5$.
3. (E). A inequação resulta em $-3 < x < 7$. Os inteiros não-negativos neste intervalo são 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Total de 7 números.
4. (A). A inequação se desmembra em $2x - 1 \geq 3$ (que leva a $x \geq 2$) ou $2x - 1 \leq -3$ (que leva a $x \leq -1$).
5. (D). A equação resulta em $|x| = 3$ ou $|x| = -2$ (impossível). As soluções são $x = 3$ e $x = -3$. Para uma equação quadrática $x^2 - ax + b = 0$, a soma das raízes é a e o produto é b. Soma = $3 + (-3) = 0$. Produto = $3 \cdot (-3) = -9$. Logo, $a = 0$ e $b = -9$.
6. (E). A condição de existência $-2 + 2x \geq 0$ implica $x \geq 1$. Ao resolver a equação modular, as duas potenciais raízes são $x = 0$ e $x = 4/5$. Nenhuma delas satisfaz a condição $x \geq 1$, portanto o conjunto solução é vazio.
7. (C). $A = \{3,4,5,6,7\}$. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 3 \text{ ou } x \geq 5\}$. A interseção $A \cap B$ é $\{3,5,6,7\}$. A soma é $3+5+6+7 = 21$.
8. (A). Como o denominador $|x-2|$ é sempre positivo (para $x \neq 2$), a fração só pode ser menor ou igual a zero se o numerador for menor ou igual a zero. $2x + 4 \leq 0$ implica $x \leq -2$. A única forma de satisfazer a igualdade é $x = -2$. As opções de resposta sugerem que apenas a solução para a igualdade é considerada.
9. a) $|p - 500| \leq 4$. b) Os pacotes de 495g (desvio de 5g) e 504.1g (desvio de 4.1g) devem ser rejeitados.
10. a) $|P - 6,0| > 0,4$. b) O alarme soará quando $0,05t > 0,4$, ou seja, $t > 8$ horas.
11. O circuito desarma quando $|\sin(120\pi t)| > 155/170$. Usando o arco-seno, $120\pi t > 1,15$. Isso dá $t > 1,15/(120\pi) \approx 0,00305$ s. O primeiro intervalo é aproximadamente de 3,05 ms até o ponto simétrico seguinte no ciclo.
12. Os desvios são: $\{2,1,0,3,3,2,1,5,4,1\}$. A soma é 22. O desvio absoluto médio é $22/10 = 2,2$ cm.
13. a) $S(20) = 70$, $S(50) = 60$, $S(100) = 70$. b) O valor mínimo da soma das distâncias é 60, e ocorre para qualquer ponto x no intervalo $[30,90]$. Este é o intervalo ótimo para a construção.

Exercício 4.5.2

14. a) Média $\approx 13,33°$Bx; Desvio Padrão $\approx 2,56°$Bx. b) Mediana $= 12,35°$Bx; MAD $= 0,15°$Bx. c) O MAD descreve melhor a variabilidade, pois não é inflado pelo valor extremo (outlier) de 18,5, refletindo a concentração dos dados em torno de 12,3.
15. O MAE é de 0,2 mm/dia. (Cálculo: $\frac{|4,5-4,7|+|4,8-4,6|+|5,2-5,0|+|4,9-5,1|+|5,5-5,3|}{5} = \frac{0,2+0,2+0,2+0,2+0,2}{5} = 0,2$). Em termos práticos, significa que, em média, a previsão do modelo erra em 0,2 mm/dia para cima ou para baixo.
16. Não. O desvio absoluto máximo medido foi $|-2,1| = 2,1$ cm, que é maior que a tolerância de 2 cm especificada no projeto.
17. A Reta A representa o ajuste por LAD. Justificativa: O método de Mínimos Quadrados (LS) penaliza erros grandes de forma quadrática ($erro^2$), fazendo com que a reta (Reta B) seja fortemente "puxada" em direção ao outlier para minimizar esse grande erro ao quadrado. O método LAD minimiza o erro absoluto ($|erro|$), sendo menos influenciado por pontos extremos e, portanto, ajustando-se melhor à tendência geral dos dados (Reta A).
18. O desvio absoluto é de 1°C. (Cálculo: Em $t = 4$, $T(4) = 5 + 2\cos(\frac{4\pi}{6}) = 5 + 2\cos(\frac{2\pi}{3}) = 5 + 2(-\frac{1}{2}) = 4$. O desvio absoluto é $|T(4) - 5| = |4-5| = |-1| = 1$).

Capítulo 5

Exercício 5.2

1. $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 6$, $a_4 = 12$. O padrão de crescimento é quadrático; a diferença entre termos consecutivos aumenta linearmente ($a_{n+1} - a_n = 2n$).
2. $b_2 = 6$, $b_3 = 18$, $b_4 = 54$. A fórmula explícita é $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ (uma progressão geométrica).
3. $c_2 = 4$, $c_3 = 9$, $c_4 = 16$. A fórmula explícita é $c_n = n^2$. Cada termo é o quadrado do seu índice.
4. A sequência representa um processo de decaimento percentual constante de 10% a cada etapa, onde cada termo é 90% do valor anterior.
5. a) $h_n = 2 \cdot (0,8)^n$. É uma progressão geométrica de razão 0,8. b) $h_5 \approx 0,655$ metros. c) A distância total é de 18 metros. (Cálculo: $D = 2 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot (0,8)^n = 2 + 4 \cdot \frac{0,8}{1-0,8} = 18$).
6. a) $Q_{n+1} = 0,4 \cdot Q_n + 250$. b) $Q_2 = 350$ mg; $Q_3 = 390$ mg; $Q_4 = 406$ mg. c) A quantidade parece convergir para aproximadamente 416,67 mg. (Dica: o equilíbrio ocorre quando $Q = 0,4Q + 250 \implies 0,6Q = 250$).
7. Os pontos de equilíbrio são $P = 0$ (população extinta) e $P = 0,5$ (população estável em 50
8. a) $N_n = 3 \cdot 4^n$. b) $L_n = L \cdot (\frac{1}{3})^n$. c) $P_n = 3L \cdot (\frac{4}{3})^n$. Como a razão é maior que 1, o perímetro P_n tende ao infinito, mesmo que a área do floco seja finita.
9. a) $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $R_3 = 1,5$, $R_4 \approx 1,667$, $R_5 = 1,6$, $R_6 = 1,625$, $R_7 \approx 1,615$, $R_8 \approx 1,619$. b) A sequência converge para o Número de Ouro, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$. c) Dividindo $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ por F_{n+1}, obtemos $\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}}$. No limite, isso se torna $L = 1 + \frac{1}{L}$, que rearranja para $L^2 - L - 1 = 0$.

Exercício 5.3

1. $s_1 = 1, s_2 = 4, s_3 = 9, s_4 = 16$. A expressão é $s_n = n^2$.
2. Para $|r| < 1$, o termo r^n tende a 0 quando $n \to \infty$. Isso significa que a soma da série geométrica infinita converge para $\frac{1}{1-r}$.
3. $s_n = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{2})^k$. Esta é uma PG de primeiro termo $a_1 = 1/2$ e razão $r = 1/2$. A soma é $s_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{1/2(1-(1/2)^n)}{1-1/2} = 1-(\frac{1}{2})^n$.
4. a) $s_1 = 1 - 1/2$; $s_2 = (1-1/2)+(1/2-1/3) = 1-1/3$; $s_3 = 1-1/4$; $s_4 = 1-1/5$. b) $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. c) A soma infinita é $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1}) = 1$.
5. A série é uma PG com primeiro termo $a = 0,36$ e razão $r = 0,01$. A soma é $S = \frac{a}{1-r} = \frac{0.36}{1-0.01} = \frac{0.36}{0.99} = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$.
6. a) A distância é a soma da PG: $50 + 25 + 12,5 + \ldots$. b) É uma PG infinita com $a = 50$ e $r = 1/2$. A soma é $S = \frac{a}{1-r} = \frac{50}{1-1/2} = 100$ metros.
7. A série é uma PG com primeiro termo $a = 10000/1,05$ e razão $r = 1/1,05$. A soma é $S = \frac{a}{1-r} = \frac{10000/1.05}{1-1/1.05} = \frac{10000/1.05}{0.05/1.05} = \frac{10000}{0.05} = 200.000$. O investimento inicial necessário é de R$ 200.000,00.

Exercício 5.4

1. $a_n = 2 \cdot (1,5)^{n-1}$.
2. $b_1 = 50$, $b_2 = 50$, $b_3 = 50$. A sequência é constante, indicando um estado de equilíbrio (ponto fixo da recorrência).
3. $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, $F_8 = 21$.
4. $S_1 = 1,01(100000) - 2000 = 99000$. $S_2 = 1,01(99000) - 2000 = 97990$. O saldo devedor será de R$ 97.990,00.
5. $P_1 = 3(200) - 500 = 100$. $P_2 = 3(100) - 500 = -200$. Como a população atinge um valor negativo na segunda semana, conclui-se que a praga será erradicada entre a primeira e a segunda semana. **6.** (C)

Exercício 5.5

Todos são de demonstração!

Exercício 5.6

1. $a_{10} = 31$; $S_{10} = 175$.
2. $r = 3$; $a_1 = 5$.
3., **4.** e **5.** Demonstração.
6. Trata-se de uma PA com $a_1 = 20$ e $r = 4$. O termo $a_{15} = 20 + 14(4) = 76$. A soma é $S_{15} = \frac{15(20+76)}{2} = 720$ árvores.
7. A diferença entre os termos é constante: $14,7 - 4,9 = 9,8$ e $24,5 - 14,7 = 9,8$. Logo, é uma PA de razão $r = 9,8$. A distância no 10° segundo é $a_{10} = 4,9 + 9(9,8) = 93,1$ metros.

Exercício 5.7

1. $a_7 = 5 \cdot 3^6 = 3645$; $S_7 = 5\frac{3^7-1}{3-1} = 5465$.
2. $a_5 = a_2 q^3 \Rightarrow 96 = 12q^3 \Rightarrow q = 2$; $a_1 = 6$.
3. e **4.** Demonstração.
5. a) Demonstração. b) A área total removida é a soma infinita da PG com $a_1 = 1/9$ e $q = 8/9$. Logo, $S = \frac{1/9}{1-8/9} = 1$.
6. $V_n = 500000 \cdot (0,85)^n$. Após 4 anos, $V_4 = 500000 \cdot (0,85)^4 \approx 261.003,13$ reais.
7. A área no mês n é $A_n = 2 \cdot 2^n$. Impondo $2 \cdot 2^n > 256 \Rightarrow 2^n > 128 \Rightarrow n > 7$. A área ultrapassará 256 hectares a partir do 8° mês.

Exercício 5.8

1. Demonstração.
2. A sequência assume os valores $1, 0, -1, 0$ repetidamente. Logo, $\limsup = 1$ e $\liminf = -1$.
3. A sequência é crescente e limitada por 1. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.
4. e **5.** Demonstração.
6. Trata-se da soma de uma PG infinita com $a_1 = 2$ e $q = 1/3$. Logo, $S = \frac{2}{1-1/3} = \frac{2}{2/3} = 3$. Alternativa correta: **(C)**.
7. $\lim_{n\to\infty}\left(5 - \frac{2}{n}\right) = 5 - 0 = 5$ mm. A deformação estabiliza-se em 5 mm.
8. $\lim_{n\to\infty} \frac{50n+10}{2n+1} = \frac{50}{2} = 25$ mg/kg.

Interpreta-se que, a longo prazo, o solo não acumula o nutriente indefinidamente, mas atinge um limiar de saturação química de 25 mg/kg.
9. Pelo Critério de Leibniz, exige-se que o primeiro termo descartado seja menor que a tolerância de erro desejada: $a_{n+1} < 0,01$. Assim, tem-se $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{100} \Rightarrow n+1 > 100 \Rightarrow n > 99$. Logo, devem ser somados no mínimo 100 termos para garantir a precisão exigida. **9.** (E)

Capítulo 6

Exercício 6.2.3

1. 75 kWh. **2.** 14 horas.
3. 130 peças. **4.** 76,8 kg.
5. 60 m^2. **6.** 400 km.
7. 6,75 g. **8.** 24 min.
9. 3 h e 20 min. **10.** 200 mL.

Exercício 6.2.4

1. 15 horas/dia. **2.** 9 horas.
3. 25 operários. **4.** 5 dias.
5. 18 caminhões. **6.** 15 teares.
7. 16 pessoas. **8.** 10 horas/dia.
9. 5 dias. **10.** 5 horas.

Exercício 6.3.1

1. Comprimento de 120 metros por pedaço; 12 pedaços no total.
2. Área de 72 hectares por talhão; 17 talhões no total.
3. Capacidade de 180 litros por tanque; 16 tanques no total.
4. 36 animais por lote.
5. 28 metros.
6. 12 cm.
7. 150.000 comprimidos.
8. 300 metros.
9. 1,5 litros.
10. 12 mm.

Exercício 6.3.2

1. 300 dias.
2. Às 18h (6h da tarde) de uma sexta-feira.
3. 5 voltas.
4. 36 dias.
5. No ano de 2144.
6. 12 segundos.
7. 7,5 minutos.
8. Janeiro de 2026.
9. 300 ms.
10. 15 segundos.

Exercício 6.4

1. 20 maneiras.
2. 10.000 senhas.
3. 72 combinações.
4. 20 trajetos.
5. 1.757.600 animais.
6. 256 estados.
7. 210 maneiras.
8. 48 maneiras.
9. 60 sequências.
10. 60 configurações.
11. 720 maneiras (6!).
12. 120 (5!).
13. 45 maneiras.
14. 5.040 microestados (7!).
15. 120 arranjos (5!).

Exercício 6.5

1. 140 animais.
2. 45 ligas.
3. 220 tentativas.
4. 29 amostras.
5. 35 caminhões.
6. 50 consumidores.
7. 12 motores.
8. 30 fazendas.
9. 13 usuários.
10. 70 genes.

Exercício 6.6

1. 10^{10} grãos.
2. 10^9 kg de CO_2.
3. 10^{12} litros.
4. 10^6 tijolos.
5. 10^8 latas.

6. A equação é dimensionalmente consistente. Lado esquerdo: $[v] = LT^{-1}$. Lado direito: $[\sqrt{gh}] = (LT^{-2} \cdot L)^{1/2} = (L^2T^{-2})^{1/2} = LT^{-1}$.
7. A relação é $f \propto \frac{1}{L}\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$. Os expoentes são $a = -1$, $b = 1/2$ e $c = -1/2$.
8. A dimensão de n é $L^{-1/3}T$.
9. A dimensão de R é $ML^2T^{-2}N^{-1}\Theta^{-1}$.
10. Os expoentes são $a = 1$, $b = 1$ e $c = -2$. A relação é $P_{cr} \propto \frac{EI}{L^2}$.

Exercício 6.7

1. a) 4 algarismos significativos. b) 2 algarismos significativos. c) 1, 2 ou 3 algarismos significativos, dependendo do contexto. Se escrito como $3,00 \times 10^2$ m, teria 3.
2. $(9,82 \pm 0,02)$ m/s^2.
3. (8950 ± 50) kg/m^3.
4. 318 m^2.
5. 18,0 g/L.
6. 15000 N pode ter 2, 3, 4 ou 5 algarismos significativos, sendo ambíguo. $1,50 \times 10^4$ N especifica inequivocamente 3 algarismos significativos, indicando que a medição é precisa até a centena.
7. 3,76 kg/dia. (Como 30 é um número exato de contagem, ele possui um número infinito de algarismos significativos, e o resultado final é limitado pelos 4 algarismos significativos de 112,8 kg. Contudo, a convenção usual limita a um número razoável de decimais, sendo 3,76 apropriado).
8. $(13,6 \pm 0,2)\%$.

Exercício 6.8

1. O sistema é $3x = z$, $8x = 2w$, $2y = 2z + w$. A menor solução inteira é $x = 1, y = 5, z = 3, w = 4$.
2. $I_1 = 3$ A, $I_2 = 1$ A, $I_3 = 2$ A.
3. a) O sistema é $0.45x = 0.20$ e $0.18y = 0.10$. b) A primeira equação fixa x, mas não há equação para z, deixando-o livre. A relação é $y \approx 0.556$, e como $x + y + z = 1$, temos $z \approx 1 - 0.444 - 0.556 = 0$. c) A solução que minimiza z é $z = 0$, o que implica $x \approx 0.444$ e $y \approx 0.556$.
4. Somando as três equações, obtém-se $x_1 + x_2 + x_3 + 1300 = x_1 + x_2 + x_3 + 1250$, o que leva à contradição $1300 = 1250$.
5. O sistema é $0.46x + 0.30y + 0.18z = 0.326$, $0.10y + 0.08z = 0.064$, $x + y + z = 1$. A solução é $x = 0.5$ (50**6.** O sistema é $-y_0 = 3$ e $x_0 = 5$. A posição inicial era $P_{inicial} = [5, -3]^T$.
7. O sistema é $x_A = 0.2x_A + 0.4x_I + 500$ e $x_I = 0.3x_A + 0.1x_I + 300$. A solução é $x_A \approx 977,3$ milhões e $x_I \approx 659,1$ milhões.
8. Este é um SPI. Uma solução possível (entre infinitas) é: $x \approx 0.55$ (55**9.** O sistema é $c = 0.5$, $2500a + 50b + c = 1.8$, $10000a + 100b + c = 2.5$. A solução é $a = -0.00012$, $b = 0.032$, $c = 0.5$.
10. De $q^2 = 0.64$, tira-se $q = 0.8$. Logo, $p = 0.2$. Indivíduos AA: $p^2 \cdot 1000 = 40$. Indivíduos Aa: $2pq \cdot 1000 = 320$.

Exercício 6.9

1. A dose ótima é de 120 kg/ha, resultando em uma produtividade máxima de 152 sacas/ha.
2. As dimensões que minimizam a tensão para uma área fixa são aquelas em que $h = \sqrt{2}b$. Para uma área de 200 cm^2, tem-se $b \approx 11,9$ cm e $h \approx 16,8$ cm.
3. O custo mínimo ocorre no vértice (2, 6), que é a interseção das duas retas de restrição. A solução é usar 2 kg de farelo de soja e 6 kg de farinha de peixe.
4. O custo mínimo ocorre quando o custo de pedido é igual ao custo de armazenamento. Usando AM-GM, o mínimo de $C(q)$ ocorre quando $200000/q = 5q$, o que leva a $q = 200$ unidades.
5. A área é mínima quando a altura da lata é igual ao seu diâmetro, ou seja, $h = 2r$.
6. Em $R = 2$, $P(2) = 3,125$ W. Para $R = 1.9$, $P(1.9) \approx 3,1248$ W. Para $R = 2.1$, $P(2.1) \approx 3,1248$ W. Ambos são menores, confirmando que $R = 2$ é um ponto de máximo local.
7. A função erro é $E(m) = 14m^2 - 98m + 98$. O mínimo ocorre no vértice $m = -(-98)/(2 \cdot 14) = 3,5$.
8. A função de custo total em x_A é $C(x_A) = 0.03x_A^2 - 3x_A + 10150$. O custo mínimo ocorre no vértice $x_A = 50$. A distribuição ótima é 50 pacotes para cada centro.
9. O raio que maximiza a área é $r = \frac{8}{4+\pi} \approx 1,12$ metros.
10. A taxa máxima ocorre no vértice da parábola, que é $x = -1/(2 \cdot -0.1) = 5$ mol/L.

Capítulo 7

Exercício 7.2

1. O valor da expressão é -1.
2. A coordenada será $(0, -1)$.
3. Ele obterá o ponto $-i$.
4. a) Os termos são rotações sucessivas de $45°$. $z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $z_2 = i$, $z_3 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$, $z_4 = -1$, $z_5 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$, $z_6 = -i$, $z_7 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$, $z_8 = 1$. b) O período é 8. c) Os pontos formam os vértices de um octógono regular inscrito no círculo unitário.
5. a) $Z_1 = 1$, $Z_2 = i$, $Z_3 = 1 + i$, $Z_4 = 1 + 2i$, $Z_5 = 2 + 3i$, $Z_6 = 3 + 5i$, $Z_7 = 5 + 8i$, $Z_8 = 8 + 13i$. b) Os pontos formam uma espiral que se afasta da origem. c) Sim. Para $n \geq 3$, $\mathrm{Re}(Z_n) = F_{n-2}$ e $\mathrm{Im}(Z_n) = F_{n-1}$, onde F_n é a sequência de Fibonacci padrão (começando com $F_1 = 1, F_2 = 1$).

Exercício 7.3

1. $z = 2 + 3i$.
2. a) $k = 0$ ou $k = \pm 2$.
3. $z_2 = 5i$
4. $\mathrm{Re}(uz) = 2$ e $\mathrm{Im}(uz) = 2\sqrt{3}\ i$
5. $Z_T = 10 + 20j\,\Omega$.
6. $z_3 = 1 + i$ e $z_4 = 9 + 3i$.
7. Demonstração.

Exercício 7.4

1. $z = 8i$.
2. a) $I = \frac{120}{4}(\cos(30° - (-60°)) + i\sin(30° - (-60°))) = 30(\cos 90° + i\sin 90°) = 30i$ Amperes. b) $S = V \cdot \overline{I} = [120(\cos 30° + i\sin 30°)] \cdot [30(\cos(-90°) + i\sin(-90°))] = 3600(\cos(-60°) + i\sin(-60°))$. A potência aparente é $|S| = 3600$ VA.
3. a) $z_k = \cos(\frac{2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{2k\pi}{n})$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$. b) A soma é uma PG de primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n})$. A soma é $S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{1((\cos(2\pi)+i\sin(2\pi))-1)}{q-1} = \frac{1-1}{q-1} = 0$. c) Geometricamente, as raízes formam os vértices de um polígono regular centrado na origem. A soma dos vetores que ligam o centro aos vértices é zero, indicando que o "centro de massa" do polígono está na origem.
4. $z_4 \approx 4,26 + 4,26i$.
5. O lugar geométrico é uma semicircunferência. A condição $\arg(z-2) - \arg(z+2) = \pi/2$ significa que o ângulo formado pelos vetores $\vec{PZ}$ e $\vec{QZ}$ (onde $P = 2$ e $Q = -2$) é de $90°$. Este é o arco capaz de $90°$ sobre o segmento de reta que liga -2 e 2. O lugar geométrico é a semicircunferência superior do círculo com diâmetro no segmento $[-2, 2]$, ou seja, o círculo $x^2 + y^2 = 4$ com $y > 0$.

Exercício 7.5

1. a) $|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$ e $\phi = \arctan\left(\frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}\right)$. Logo, $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \cdot e^{j\phi}$. b) A frequência de ressonância é $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. c) Na ressonância, a parte imaginária é zero, então $\phi = \arctan(0) = 0$. Isso significa que a tensão e a corrente estão perfeitamente em fase, e o circuito se comporta como um resistor puro.
2. a) $H = (1 - \cos\omega) + j\sin\omega$. b) $|H|^2 = (1 - \cos\omega)^2 + \sin^2\omega = 1 - 2\cos\omega + \cos^2\omega + \sin^2\omega = 2 - 2\cos\omega = 4\sin^2(\omega/2)$. Portanto, $|H| = 2|\sin(\omega/2)|$. c) O ganho é zero quando $\omega = 0, 2\pi, \ldots$ (frequências DC). O ganho é máximo (igual a 2) quando $\omega = \pi$ (a frequência mais alta possível no sistema discreto).

3. A velocidade do fluido é $2V$. (Dica: A derivada é $F'(z) = V(1-\frac{R^2}{z^2})$. Substituindo $z = iR$, temos $F'(iR) = V(1-\frac{R^2}{(iR)^2}) = V(1-\frac{R^2}{-R^2}) = V(1-(-1)) = 2V$).

4. a) $z_1 = i$, $z_2 = i^2 + i = -1 + i$, $z_3 = (-1+i)^2 + i = -i$, $z_4 = (-i)^2 + i = -1 + i$, $z_5 = (-1+i)^2 + i = -i$. b) A sequência se torna periódica após o segundo termo, alternando entre $-1+i$ e $-i$. Ela não diverge para o infinito, então $z_0 = 0$ pertence ao conjunto de Julia para $c = i$.

5. O novo estado é $\psi = \begin{pmatrix}\cos(\pi/4) & \sin(\pi/4)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$. A probabilidade de encontrar o sistema no estado $\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$ é o módulo ao quadrado do segundo coeficiente, ou seja, $|\frac{\sqrt{2}}{2}|^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ou 50

6. As quatro raízes são $z_k = 2[\cos(\frac{\pi+2k\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi+2k\pi}{4})]$ para $k = 0,1,2,3$. Na forma algébrica: $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$. Geometricamente, são os vértices de um quadrado inscrito em uma circunferência de raio 2, rotacionado em 45°.

7. a) A rotação é representada pela multiplicação por $e^{i\pi/3}$. b) A posição final é $z_2 = (10+15)e^{i\pi/3} = 25(\cos(60°) + i\sin(60°)) = 12,5 + 21,65i$. (Nota: O enunciado pode ser interpretado de duas formas. A solução apresentada assume que o drone continua na mesma direção após a rotação. Uma interpretação alternativa seria $z_2 = z_1 + 15e^{i\pi/3} = 10 + 15(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 17,5 + 12,99i$. Ambas as interpretações são válidas dependendo do contexto da cinemática).

8. $s(t) = \frac{1}{2}e^{i2t} + \frac{1}{2}e^{-i2t} + \frac{1}{2}e^{i3t} + \frac{1}{2}e^{-i3t}$. Essa representação é a base da Análise de Fourier, que decompõe um sinal complexo em suas frequências fundamentais (neste caso, as frequências angulares 2 e 3), permitindo analisar, filtrar ou comprimir o sinal.

9. a) $z_n = 4 \cdot (1,1)^n e^{in\pi/4}$. b) $z_2 = 4 \cdot (1,1)^2 e^{i\pi/2} = 4 \cdot 1,21 \cdot i = 4,84i$. c) A trajetória é uma espiral que se expande para fora. A cada segundo, a distância da partícula à origem aumenta em 10% (fator 1,1) e sua posição rotaciona 45° no sentido anti-horário.

10. As soluções são $z = 0$, $z = 1$, $z = -1$, $z = i$ e $z = -i$. (Dica: Substituindo $z = re^{i\theta}$ na equação, obtém-se $r^3 e^{i3\theta} = re^{-i\theta}$. Comparando os módulos, $r^3 = r \Rightarrow r = 0$ ou $r = 1$. Comparando os argumentos, $3\theta = -\theta + 2k\pi \Rightarrow 4\theta = 2k\pi \Rightarrow \theta = k\pi/2$. Para $k = 0,1,2,3$ obtêm-se os ângulos $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$).

Capítulo 8

Exercício 8.2

1. 20.

2. a) $P(0) = 3$, $P(1) = 2$ e $P(2) = 1$.

3. $a = 1$ e $b = 0$.

4. a) Como 1,2,3 são raízes, o polinômio pode ser escrito como $P(x) = c(x-1)(x-2)(x-3)$ para alguma constante c. b) $P(4) = -4$. (Dica: Use $P(0) = 12$ para encontrar c. $P(0) = c(-1)(-2)(-3) = -6c = 12 \implies c = -2$. Portanto, $P(x) = -2(x-1)(x-2)(x-3)$. Calcule $P(4)$).

5. a) $y(0) = k(0-0+0) = 0$. $y(L) = k(L^4 - 2L(L^3) + L^3(L)) = k(L^4 - 2L^4 + L^4) = 0$. b) Substituindo x por $L-x$ na expressão de $y(x)$ e simplificando algebricamente, chega-se à mesma expressão original, provando a simetria.

6. As outras raízes são $r_2 = 2$ e $r_3 = 2$. O valor de k é 8. (Dica: Use $r_1 = 1$ nas relações de Girard para obter um sistema para r_2 e r_3: $r_2 + r_3 = 4$ e $r_2 + r_3 + r_2 r_3 = 6$. A única solução é $r_2 = r_3 = 2$. O produto das raízes é $r_1 r_2 r_3 = -(-k)/2 \implies 1 \cdot 2 \cdot 2 = k/2 \implies k = 8$).

7. a) $V(x) = x(16-2x)(10-2x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x$. b) O lado x deve ser positivo e menor que metade do menor lado da folha, logo $0 < x < 5$. c) $x = 2$ cm. (Dica: Resolva a equação $4x^3 - 52x^2 + 160x = 144$ e verifique qual solução está no domínio do problema).

8. a) $P(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$. $P(1) = 1^2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 = 0 + 1 = 1$. O polinômio não possui raízes em $\mathbb{Z}_2$. b) O produto é $x^3 + 1$. (Dica: $(x^2+x+1)(x+1) = x^3 + x^2 + x + x^2 + x + 1 = x^3 + (1+1)x^2 + (1+1)x + 1 = x^3 + 0x^2 + 0x + 1 = x^3 + 1$).

Exercício 8.3.1

1. O resultado é $x^4 - 3x^2 - 4x + 12$.

2. $a = 1$, $b = 1$ e $c = -3$.**3.** O resultado da subtração é $-7x + 1$, cujo grau é 1. Como $\deg(r) = 5$, tem-se que $1 < 5$, o que demonstra a afirmação.

Exercício 8.3

1. $P(x) = 4x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 8x - 6$. O grau do polinômio resultante é 4.

2. $L(x) = R(x) - C(x) = (-2x^2 + 100x) - (x^2 + 10x + 300) = -3x^2 + 90x - 300$.

3. O resto é -24.

4. $k = 3$.

5. $Q(x) = 2x^3 + x^2 + 3x + 10$ e $R(x) = 23$.

6. $a = -4$ e $b = 1$.

7. Quociente $Q(x) = x^2 + 2x - 3$ e Resto $R(x) = 3x - 2$.

8. O resto é R$ 8.900,00.

9. $A = 2$ e $B = 3$.

10. $S(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Exercício 8.4.5

1. As quatro raízes em $\mathbb{C}$ são $\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $-\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$. A fatoração em fatores quadráticos reais é $p(x) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$.

2. A decomposição em fatores reais é $q(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 3)$. As raízes são $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{3}$ e $x = -\sqrt{3}$.

3. Os valores que são raízes são $x = -2$, $x = 2$ e $x = 3$. A decomposição completa do polinômio é $r(x) = (x+2)(x-2)(x-3)$.

4. Se $a + bi$ é raiz de um polinômio com coeficientes reais, então seu conjugado $a - bi$ também é raiz. Pelo Teorema do Fator, $(x - (a+bi))$ e $(x - (a-bi))$ são fatores de $p(x)$. O produto desses dois fatores é $(x-a-bi)(x-a+bi) = (x-a)^2 - (bi)^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$, que é um fator de $p(x)$ com coeficientes reais.

Exercício 8.4.6

1. $a = -6$ e $b = 11$.

2. $k = 6$.

3. $p = 5$ e $q = -2$. A raiz $x = 1$ tem multiplicidade 2, pois aparece duas vezes no conjunto de raízes.

Exercício 8.4.7

1. As raízes reais são $x = 2$ (multiplicidade 4) e $x = -1$ (multiplicidade 3). O fator $(x^2 + 1)$ não possui raízes reais. O gráfico tangencia o eixo x em $x = 2$ (multiplicidade par) e cruza o eixo x em $x = -1$ (multiplicidade ímpar).

2. A multiplicidade é 3.

Exercício 8.4.9

1. a) As raízes são 1,2 e 3.
b) As raízes são -1, 2 e $-\frac{4}{3}$.
c) As raízes são 3, -1, $-\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{2}$.

2. As possíveis raízes racionais do polinômio mônico $s(x) = x^3 + x + 1$ são os divisores de 1, i.e., 1 e -1. Testando os valores: $s(1) = 1 + 1 + 1 = 3 \neq 0$ e $s(-1) = -1 - 1 + 1 = -1 \neq 0$. Como nenhum dos candidatos é raiz, o polinômio não possui raízes racionais.

Exercício 8.4

1. $P(x) = 4x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 8x - 6$. O grau do polinômio resultante é 4.

2. $L(x) = R(x) - C(x) = (-2x^2 + 100x) - (x^2 + 10x + 300) = -3x^2 + 90x - 300$.

3. O resto é -16.

4. $k = 1$.

5. $Q(x) = 2x^3 + x^2 + 3x + 10$ e $R(x) = 23$.

6. $a = -4$ e $b = 1$.

7. Quociente $Q(x) = x^2 + 2x - 3$ e Resto $R(x) = 3x - 2$.

8. O resto é R$ 8.900,00.

9. $A = 2$ e $B = 3$.

10. $S(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Bibliografia

ALENCAR FILHO, Edgard de. **Iniciação à Lógica Matemática**. São Paulo: Nobel, 2002. ISBN 85-213-0403-X.

AMARAL, João Tomás do (Ed.). **Manual Compacto de Matemática do 1° grau**: Teoria e Prática. São Paulo: Rideel, 1997. ISBN 85-339-0216-16.

ANTAR NETO, Aref et al. **Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral**. Fortaleza: Ed. Vestseller, 2010. v. 8. (Noções de matemática). ISBN 84-2037.

_____. **Noções de Matemática Volume 1**: Conjuntos e Funções. São Paulo: Editora Moderna, 1979. (2° Grau). ISBN 78-1507.

_____. **Noções de Matemática Volume 2**: Progressões e Logaritmos. São Paulo: Editora Moderna, 1979. (2° Grau). ISBN 78-1723.

BARRETO FILHO, Benigno; XAVIER DA SILVA, Cláudio. **Matemática Aula por Aula**. 1. ed. São Paulo: FTD, 2003. v. 1. ISBN 85-322-5189-7.

_____._____. 1. ed. São Paulo: FTD, 2003. v. 3. ISBN 85-322-5191-9.

BOLDRINI, José Luiz et al. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 2012. Título original: A history of mathematics. 3. ed. norte-americana. Tradução de Helena Castro. ISBN 978-85-212-0641-5.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Livro do Aluno**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2004. 3° ano do Ensino Médio. 1ª impressão 2006. ISBN 85-08-091328.

DUARTE, Sergio Nascimento; FRANÇA, Ênio Farias de et al. **Fundamentos de drenagem agrícola**. [S.l.]: Fealq, 2023. ISBN 978-65-89722-22-9.

FÁTIMA SVIERCOSKI, Rosângela de. **Matemática Aplicada às Ciências Agrárias**: Análise de Dados e Modelos. 4. ed. Viçosa, MG: Ed. UFV, 2008. P. 333. Reimpressão. ISBN 978-85-7269-038-6.

GIMENEZ, Carmem S. Comitre; BURIN, Nereu Estanislau. **Resolução de Problemas**. Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2008. P. 181. ISBN 85-99379-31-3.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. **Matemática Completa**. 2. ed. São Paulo: FTD, 2005. 3° ano do Ensino Médio. ISBN 85-322-5613-9.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**: Volume 1. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008. P. 380. ISBN 978-85-216-1259-9.

HARIKI, Seiji; ABDOUNUR, Oscar João. **Matemática Aplicada: Administração, Economia, Contabilidade**. São Paulo: Saraiva, 1999. ISBN 978-85-02-02802-9.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo et al. **Matemática Volume 1**: Ciência e Aplicações. São Paulo: Atual, 2001. ISBN 85-357-021-0 (Livro do aluno); 85-357-029-6 (Livro do professor).

_____. **Matemática: ciência e aplicações: ensino médio**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. v. 1. Suplementado pelo manual do professor. Bibliografia. ISBN 978-85-472-0536-2.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar Volume 1**: Conjuntos e Funções. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993. ISBN 85-7056-270-5.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; MACHADO, Nilson José. **Fundamentos de Matemática Elementar Volume 8**: Limites, Derivadas, Noções de Integral. 6. ed. São Paulo: Atual, 2005. ISBN 85-357-0547-3.

KAPLAN, Wilfred. **Cálculo avançado**. São Paulo: Edgard Blücher; Ed. da Universidade de São Paulo, 1972. v. 1-2. 2v. ilust. Coordenação Elza Gomide; Tradução Frederic Tsu. Bibliografia.

LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e Outras Histórias**. Rio de Janeiro: SBM, 1991. (Coleção do Professor de Matemática). ISBN 85-85818-06-9.

LIRA, Alex; MEIRELLES, Alexandre. **Matemática Básica Definitiva para Concursos**. 3. ed. São Paulo: Editora JusPodivm, 2023. P. 1408. Edição revista e atualizada. Inclui bibliografia. ISBN 978-85-442-4386-2.

_____. **Raciocínio Lógico Definitivo para Concursos**. 2. ed. São Paulo: Editora JusPodivm, 2022. P. 1296. Inclui bibliografia. ISBN 978-65-5680-700-3.

PAIVA, Manoel. **Matemática**: Paiva. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015. Obra em 3v. Componente curricular: Matemática.

STEWART, James. **Cálculo**: Volume 1. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. Edição americana. Tradução EZ2 Translate. ISBN 978-85-221-1258-6.

VIVEIRO, Tânia Cristina Neto G.; CORRÊA, Marlene Lima Pires. **Manual Compacto de Matemática do 2° grau**: Teoria e Prática. São Paulo: Rideel, 1996. Para 2° grau. ISBN 85-339-0213-1.

Índice Remissivo

A Função exponencial de base e, 202
A Série Harmônica, 278
Análise Dimensional e Estimativa, 316
Aplicações da Função de Grau 1°, 119
Aplicações da Função de Grau 2°, 152
Aplicações da Função de Grau 3°, 158
Aplicações da Função Exponencial, 193
Aplicações da Função Módulo, 248
Aplicações das Funções Trigonométricas, 228
Argumentos Lógicos, 34
Arredondamento científico, 320

Bijeção, 92

Cotas, 274
Critério da Comparação para Séries, 279
Critérios de convergência e divergência, 274

Determinação das razões trigonométricas para ângulos notáveis, 221
Diagrama de Venn-Euler, 82
Dispositivo prático de Briot-Ruffini, 422

Fatorial, 306
Floco de Neve de Koch, 256
Forma de Euler para um número complexo, 386
Função, 79
Função Composta, 97
Função Inversa, 94
Fórmula de Bháskara, 124

Ilustrações dos tipos de sequências, 276
Indução Matemática, 260
Infimo e Supremo, 275
Intervalos reais, 59

Limites de Sequências, 272
Linearização da Função Racional, 162
Linearização de Funções Potenciais, 212
Linearização Exponencial, 209

Método da Bisseção, 446
Módulo ou valor absoluto, 53

Número e de Euler, 202
Número complexo, 354

O Limite de uma Função, 163
O número i, 347
Operadores lógicos, 11
Otimização, 330

Potências fundamentais de i, 348
Primeira fórmula de De Moivre, 379
Problemas de Fermi, 316
Progressões Aritméticas, 262
Progressões Geométricas, 268
Propagação de Incertezas, 320
Proposição, 2

Quantificadores, 8

Raio de convergência, 280
Recorrência, 259
Regras de três, 285
Relação, 78
Relações de Girard, 436
Relações entre as funções $f(x) = a^x$ e $f(x) = e^x$, 204

Segunda fórmula de De Moivre, 382
Sequências, 253
Sequências Monótonas, 276
Sistemas Lineares, 324
Série de Taylor, 386
Séries, 257

Tautologia, 23
Teorema da Convergência Monótona, 276
Teorema da Decomposição, 433
Teorema das Raízes Complexas, 441
Teorema das Raízes Racionais, 443
Teorema de D'Alembert ou Teorema do Fator, 420
Teorema do Resto, 419
Teorema Fundamental da Álgebra, 431

Vizinhança, 65

TÍTULO	Pré-Cálculo: Fundamentos de Matemática para Engenharia e Ciências
AUTOR	João Valério de Souza Neto
SUPORTE	Digital (PDF)
PROJETO GRÁFICO E CAPA	João Valério
PÁGINAS	471
TIPOGRAFIA	Times New Roman (corpo de texto) | Helvetica (títulos e destaques)
EDIÇÃO	1ª edição
ANO	2026
EDITORA	Editora da Universidade Federal do Maranhão (EDUFMA)
ISBN	978-65-5363-580-7
LICENÇA	Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA)
DEPÓSITO LEGAL	Realizado conforme Lei n° 10.994, de 14 de dezembro de 2004, na Biblioteca Nacional

Este livro foi composto em LaTeX e está disponível em formato digital aberto.

E nada do que foi feito aqui se faria sem a iluminação do Espírito Santo de Deus!

João Valério de Souza Neto

Professor Adjunto da Universidade Federal do Maranhão
Doutor em Biometria e Estatística Aplicada (UFRPE/2024)
Mestre em Engenharia de Materiais (IFPI/2015)
Especialista em Matemática Aplicada (IFPI/2014)
Graduado em Licenciatura em Matemática (UESPI/2013)

3,	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9	7	9	3	2	3	8	4	6
2	6	4	3	3	8	3	2	7	9	5	0	2	8	8	4	1	9	7	1	6
9	3	9	9	3	7	5	1	0	5	8	2	0	9	7	4	9	4	4	5	9
2	3	0	7	8	1	6	4	0	6	2	8	6	2	0	8	9	9	8	6	2
8	0	3	4	8	2	5	3	4	2	1	1	7	0	6	7	9	8	2	1	4
8	0	8	6	5	1	3	2	8	2	3	0	6	6	4	7	0	9	3	8	4
4	6	0	9	5	5	0	5	8	2	2	3	1	7	2	5	3	5	9	4	0
8	1	2	8	4	8	1	1	1	7	4	5	0	2	8	4	1	0	2	7	0
1	9	3	8	5	2	1	1	0	5	5	5	9	6	4	4	6	2	2	9	4
8	9	5	4	9	3	0	3	8	1	9	6	4	4	2	8	8	1	0	9	7
5	6	6	5	9	3	3	4	4	6	1	2	8	4	7	5	6	4	8	2	3
3	7	8	6	7	8	3	1	6	5	2	7	1	2	0	1	9	0	9	1	4
5	6	4	8	5	6	6	9	2	3	4	6	0	3	4	8	6	1	0	4	5
3	2	6	6	4	8	2	1	3	3	9	3	6	0	7	2	6	0	2	4	9
1	4	1	2	7	3	7	2	4	5	8	7	0	0	6	6	0	6	3	1	5
5	8	8	1	7	4	8	8	1	5	2	0	9	2	0	9	6	2	8	2	9
2	5	4	0	9	1	7	1	5	3	6	4	3	6	7	8	9	2	5	9	0
3	6	0	0	1	1	3	3	0	5	3	0	5	4	8	8	2	0	4	6	6
5	2	1	3	8	4	1	4	6	9	5	1	9	4	1	5	1	1	6	0	9
4	3	3	0	5	7	2	7	0	3	6	5	7	5	9	5	9	1	9	5	3
0	9	2	1	8	6	1	1	7	3	8	1	9	3	2	6	1	1	1	7	...

EDITORA ASSOCIADA À ABEU
abeu.org.br

ISBN 978-65-5363-580-7